Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2024. Т. 28, № 4. С. 682–700
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2112
EDN: AAAAAA

УДК 539.3 + 624.042

Модель изгиба ортотропной консольно закрепленной балки Бернулли–Эйлера под действием нестационарных термомеханодиффузионных нагрузок

А. В. Земсков[1,2]***, В. Х. Ле***[1]***, Д. О. Сердюк***[1]

[1] Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Россия, 125993, Москва, Волоколамское ш., 4.
[2] Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Научно-исследовательский институт механики, Россия, 119192, Москва, Мичуринский проспект, 1.

Аннотация

Исследуется взаимодействие механического, температурного и диффузионного полей при нестационарном изгибе консольно закрепленной балки. Математическая постановка задачи основана на системе уравнений нестационарных изгибных колебаний балки Бернулли–Эйлера с учетом тепломассопереноса. Данная система получена из общей модели термомеханодиффузии для сплошных сред с использованием обобщенного принципа виртуальных перемещений. В рамках исследования предполагается, что скорость распространения тепловых и диффузионных возмущений является конечной. На примере консольно закрепленной трехкомпонентной балки из сплава цинка, меди и алюминия, находящейся под действием нестационарной нагрузки, приложенной к свободному концу, проведен анализ взаимодействия механического, температурного и диффузионного полей.

Ключевые слова: термомеханодиффузия, балка Бернулли–Эйлера, консоль, функция Грина, метод эквивалентных граничных условий, нестационарные задачи.

Механика деформируемого твердого тела
Научная статья

© Коллектив авторов, 2024
© СамГТУ, 2024 (составление, дизайн, макет)
Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru)

Образец для цитирования
Земсков А. В., Ле В. Х., Сердюк Д. О. Модель изгиба ортотропной консольно закрепленной балки Бернулли—Эйлера под действием нестационарных термомеханодиффузионных нагрузок // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2024. Т. 28, № 4. С. 682–700. EDN: AAAAAA. DOI: 10.14498/vsgtu2112.

Сведения об авторах

Андрей Владимирович Земсков https://orcid.org/0000-0002-2653-6378
доктор физико-математических наук, доцент; профессор; каф. прикладные программные средства и математические методы[1]; ведущий научный сотрудник; лаб. динамических испытаний[2]; e-mail: azemskov1975@mail.ru

Ван Хао Ле https://orcid.org/0000-0002-0456-6429
аспирант; каф. сопротивления материалов, динамики и прочности машин[1]; e-mail: vanhaovtl@gmail.com

Дмитрий Олегович Сердюк https://orcid.org/0000-0003-0082-1856
кандидат технических наук, доцент; доцент; каф. сопротивления материалов, динамики и прочности машин[1]; e-mail: d.serduk55@gmail.com

Получение: 23 августа 2024 г. / Исправление: 15 ноября 2024 г. /
Принятие: 29 ноября 2024 г. / Публикация онлайн: 26 декабря 2024 г.

Введение. В последнее время все больший научный и практический интерес вызывают связанные нестационарные модели механики деформируемого твердого тела, в частности модели термомеханодиффузии. Это связано с тем, что диффузия, особенно при повышенных температурах, влияя на напряженно-деформированное состояние тела, может оказывать нежелательное воздействие на конструкции или их отдельные элементы.

Экспериментальные исследования середины XX века и теоретические основы, заложенные в работах конца XX века, позволили перейти к построению замкнутых математических моделей и формулировке начально-краевых задач термомеханодиффузии. За последние годы опубликовано значительное количество работ, посвященных исследованию взаимодействия механических, температурных и диффузионных полей в сплошных средах, а также в балках, пластинах и оболочках, которые составляют основу большинства реальных конструкций [1–17].

Среди этих публикаций следует выделить работы, посвященные изучению влияния тепломассопереноса на напряженно-деформированное состояние пологой трансверсально-изотропной оболочки [1–4]. В частности, в статье [4] предложен вариационный подход к моделированию термодиффузионных процессов, возникающих при контакте гладких слоистых оболочек. В работах [5,6] рассчитано осесимметричное напряженное состояние нагретой трансверсально-изотропной сферической оболочки с круговым отверстием при диффузионном насыщении в квазистатическом приближении. В публикациях [7–16] проведен анализ термомеханодиффузионных явлений в балках Бернулли—Эйлера и пластинах Кирхгофа. В работе [17] экспериментально исследовано влияние деформаций на массоперенос в пластине из поликристаллического никеля, покрытой медью, к краям которой приложена растягивающая нагрузка.

Анализ публикаций показывает, что, с одной стороны, проблема взаимодействия физических полей в сплошных средах и элементах конструкций остается актуальной. С другой стороны, основное внимание уделяется преимущественно квазистатическим термомеханодиффузионным процессам. Нестационарным моделям посвящены лишь работы [10,14], где рассматриваются пластины Кирхгофа [10] и балки Бернулли—Эйлера [14].

В данной работе предложена модель нестационарных термомеханодиффузионных колебаний консольно закрепленной балки, основанная на гипотезах Бернулли—Эйлера и учитывающая конечную скорость распространения тепловых и диффузионных потоков, что отличает ее от модели, рассмотренной в [14]. Постановка задачи и общая схема решения были изложены в публикации [18], где отмечено, что граничные условия, соответствующие консольному закреплению, не позволяют получить решение в виде рядов по собственным функциям термоупругодиффузионного оператора.

В связи с этим предложен метод решения, основанный на использовании эквивалентных граничных условий. Суть метода заключается в рассмотрении вспомогательной задачи, отличающейся от исходной только краевыми

условиями, которые допускают построение аналитического решения в виде рядов Фурье методом разделения переменных. Соотношения, связывающие правые части граничных условий обеих задач, записываются в виде системы интегральных уравнений Вольтерры первого рода, которая решается численно с использованием квадратурных формул средних прямоугольников. В результате решение исходной задачи получается путем численного вычисления сверток функций Грина вспомогательной задачи с функциями, найденными в результате решения указанной системы интегральных уравнений.

1. Постановка задачи. В работе исследуются физико-механические процессы, возникающие при термоупругодиффузионном изгибе консольно закрепленной ортотропной балки Бернулли—Эйлера под действием нестационарной поперечной нагрузки, приложенной к свободному концу. Изгибные деформации вызывают нагрев и порождают диффузионные потоки, направленные из зон сжатия в зоны растяжения (эффект Горского) [19, 20]. Возникающий при этом тепломассоперенос влияет на механическое поле и, как следствие, на напряженно-деформированное состояние балки.

Математическая постановка задачи представляет собой замкнутую систему уравнений поперечных колебаний балки с учетом термодиффузии. Эта система получена с использованием обобщенного принципа виртуальных перемещений из общей модели термоупругой диффузии для сплошных сред с конечной скоростью распространения тепловых и диффузионных потоков [21–23]. Схема приложенных усилий представлена на рис. 1. На закрепленном конце поддерживаются постоянные температура и концентрации диффузантов, а свободный конец является тепло- и массоизолированным.

Математическая модель поперечных колебаний балки описывается уравнениями [18, 24] (штрих обозначает производную по продольной координате x_1, а точка — производную по времени):

$$\frac{\partial^2 v''}{\partial \tau^2} - a\frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} = v^{IV} + b_1\vartheta'' + \sum_{j=1}^{N}\alpha_1^{(j)}H_j'', \quad a = \frac{F}{J_3},$$

$$\sum_{l=0}^{M}\frac{(\tau_0)^l}{l!}\frac{\partial^{l+1}}{\partial \tau^{l+1}}\left(\vartheta - B_1 v'' + \sum_{q=1}^{N} v^{(q)}H_q\right) = \kappa_1\vartheta'', \tag{1}$$

$$\sum_{r=0}^{K}\frac{(\tau_q)^r}{r!}\frac{\partial^{r+1}H_q}{\partial \tau^{r+1}} = D_1^{(q)}H_q'' + \Lambda_{11}^{(q)}v^{IV} - M_1(q)\vartheta'', \quad H_{N+1} = -\sum_{q=1}^{N}H_q.$$

Все величины в (1) являются безразмерными. Для них приняты следую-

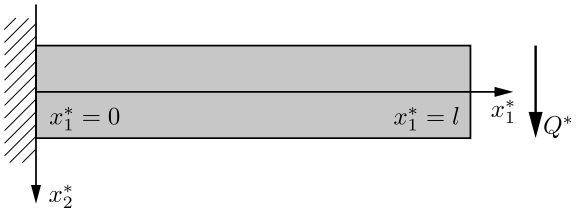

Рис. 1. Иллюстрация к постановке задачи
[Figure 1. Illustration of the problem statement]

щие обозначения:

$$x_i = \frac{x_i^*}{l}, \quad v = \frac{v^*}{l}, \quad \tau = \frac{Ct}{l}, \quad \tau_q = \frac{C\tau^{(q)}}{l}, \quad \tau_0 = \frac{C\tau_t}{l}, \quad \theta = \frac{T - T_0}{T_0},$$

$$\kappa_\alpha = \frac{\kappa_{\alpha\alpha}}{\rho c_0 C l}, \quad B_\alpha = \frac{b_{\alpha\alpha}}{\rho c_0}, \quad b_\alpha = \frac{b_{\alpha\alpha} T_0}{C_{1111}}, \quad C^2 = \frac{C_{1111}}{\rho},$$

$$M_\alpha^{(q)} = \frac{n_0^{(q)} D_{\alpha\alpha}^{(q)}}{Cl} \ln(n_0^{(q)} \gamma^{(q)}), \quad \alpha_\gamma^{(q)} = \frac{\alpha_{\gamma\gamma}^{(q)}}{C_{1111}}, \quad \upsilon^{(q)} = R \frac{\ln[n_0^{(q)} \gamma^{(q)}]}{c_0 m^{(q)}},$$

$$D_\alpha^{(q)} = \frac{D_{\alpha\alpha}^{(q)}}{Cl}, \quad \Lambda_{\alpha\beta}^{(q)} = \frac{m^{(q)} D_{\alpha\alpha}^{(q)} \alpha_{\beta\beta}^{(q)} n_0^{(q)}}{\rho R T_0 C l}, \quad J_3 = \frac{J_3^*}{l^4}, \quad F = \frac{F^*}{l^2},$$

где t — время; x_i^* — прямоугольные декартовы координаты; $v^*(x_1, \tau)$ — прогиб балки; l — длина балки; $\eta_q(x_1, x_2, \tau) = x_2 H_q(x_1, \tau)$ — приращение концентрации q-той компоненты вещества в составе $(N+1)$-компонентной среды; H_q — линейная плотность приращения концентрации; $n_0^{(q)}$ — начальная концентрация q-того вещества; C_{ijkl} — упругие постоянные; ρ — плотность; $\alpha_{ij}^{(q)}$ — коэффициенты, характеризующие объемное изменение среды за счет диффузии; $\upsilon^{(q)}$ — коэффициенты, характеризующие нагрев среды за счет диффузии; $D_{ij}^{(q)}$ — коэффициенты диффузии; R — универсальная газовая постоянная; $\theta(x_1, x_2, \tau) = x_2 \vartheta(x_1, \tau)$ — приращение температуры; $\vartheta(x_1, \tau)$ — линейная плотность приращения температуры; T — актуальная температура среды; T_0 — начальная температура среды; κ_{ij} — компоненты тензора теплопроводности; c_0 — удельная теплоемкость; b_{ij} — температурные коэффициенты, характеризующие деформации за счет нагрева; $m^{(q)}$ — молярная масса q-того вещества; $\tau^{(q)}$ и τ_t — время релаксации диффузионных и тепловых потоков; J_3^* — момент инерции сечения; F^* — площадь сечения.

Уравнения (1) дополняются начально-краевыми условиями, которые в случае консольного закрепления имеют вид

$$\begin{gathered}
v'|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=0} = 0, \quad H_q|_{x=0} = 0, \quad \vartheta|_{x=0} = 0, \\
\left[v'' + b_1 \vartheta + \sum_{j=1}^{N} \alpha_1^{(j)} H_j \right]_{x=1} = 0, \\
\left[v''' + b_1 \vartheta' + \sum_{j=1}^{N} \alpha_1^{(j)} H_j' - \frac{\partial^2 v'}{\partial \tau^2} \right]_{x=1} = -\frac{Q}{J_3}, \quad Q = \frac{Q^*}{C_{1111}}, \\
\vartheta'|_{x=1} = 0, \quad [\Lambda_{11}^{(q)} v''' - M_1^{(q)} \vartheta' + D_1^{(q)} H_q']_{x=1} = 0,
\end{gathered} \tag{2}$$

где Q^* — поперечная нагрузка на свободном конце балки. Начальные условия полагаются нулевыми.

2. Алгоритм построения функций Грина. Основная проблема заключается в невозможности построения решения задачи (1), (2) в виде рядов Фурье, что осложняет обращение преобразования Лапласа, используемого при решении этой задачи. Для преодоления указанной проблемы применяется метод эквивалентных граничных условий. Суть метода заключается

в рассмотрении вспомогательной задачи со следующими граничными условиями [23, 25]:

$$\begin{gathered}\left[v'' + b_1\vartheta + \sum_{j=1}^{N}\alpha_1^{(j)}H_j\right]_{x=0} = f_1(\tau), \quad v|_{x=0} = 0, \ \vartheta|_{x=0} = 0, \ H_q|_{x=0} = 0;\\ \left[v''' + b_1\vartheta' + \sum_{j=1}^{N}\alpha_1^{(j)}H_j' - \frac{\partial^2 v'}{\partial\tau^2}\right]_{x=1} = -\frac{Q}{J_3} = f_3(\tau), \quad \vartheta'|_{x=1} = 0;\\ [\Lambda_{11}^{(q)}v''' - M_1^{(q)}\vartheta' + D_1^{(q)}H_q']_{x=1} = 0, \quad v'|_{x=1} = f_2(\tau)\end{gathered} \tag{3}$$

при этом функции $f_1(\tau)$ и $f_2(\tau)$ подлежат определению.

Решение задачи (1), (3) представляется в виде

$$\left\{\begin{array}{c} v(x,\tau)\\ \vartheta(x,\tau)\\ H_q(x,\tau)\end{array}\right\} = \int_0^\tau \sum_{k=1}^{3}\left\{\begin{array}{c} G_{1k}(x,\tau-\xi)\\ G_{2k}(x,\tau-\xi)\\ G_{q+2,k}(x,\tau-\xi)\end{array}\right\} f_k(\xi)d\xi, \tag{4}$$

где G_{mk} — краевые функции Грина задачи (1), (3), которые, в свою очередь, являются решениями следующих задач:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 G_{1k}''}{\partial\tau^2} - a\frac{\partial^2 G_{1k}}{\partial\tau^2} = G_{1k}^{IV} + b_1 G_{2k}'' + \textstyle\sum_{j=1}^{N}\alpha_1^{(j)}G_{j+2,k}'',\\ \sum_{l=0}^{M}\frac{(\tau_0)^l}{l!}\frac{\partial^{l+1}}{\partial\tau^{l+1}}\left(G_{2k} - B_1 G_{1k}'' + \sum_{q=1}^{N}v^{(q)}G_{q+2,k}\right) = \kappa_1 G_{2k}'',\\ \sum_{r=0}^{K}\frac{(\tau_q)^r}{r!}\frac{\partial^{r+1}G_{q+2,k}}{\partial\tau^{k+1}} = D_1^{(q)}G_{q+2,k}'' + \Lambda_{11}^{(q)}G_{1k}^{IV} - M_1^{(q)}G_{2k}'',\end{gathered} \tag{5}$$

$$\begin{gathered}G_{1k}|_{x=0} = 0, \quad G_{q+2,k}|_{x_1=0} = 0, \quad G_{2k}|_{x_1=0} = 0,\\ G_{1k}'|_{x_1=1} = \delta_{2k}\delta(\tau), \quad G_{2k}'|_{x_1=1} = 0,\\ \left[G_{1k}'' + b_1 G_{2k} + \sum_{j=1}^{N}\alpha_1^{(j)}G_{j+2,k}\right]_{x=0} = \delta_{1k}\delta(\tau),\\ \left[G_{1k}''' + b_1 G_{2k}' + \sum_{j=1}^{N}\alpha_1^{(j)}G_{j+2,k}' - \frac{\partial^2 G_{1k}'}{\partial\tau^2}\right]_{x=1} = \delta_{3k}\delta(\tau),\\ \left[D_1^{(q)}G_{q+2,k}' + \Lambda_{11}^{(q)}G_{1k}''' - M_1^{(q)}G_{2k}'\right]_{x_1=1} = 0.\end{gathered} \tag{6}$$

Здесь δ_{ij} — символы Кронекера, $\delta(\tau)$ — дельта-функция Дирака.

В соответствии с алгоритмом, изложенным в работах [24, 25], к задаче (5), (6) применяется преобразование Лапласа и разложение в ряды Фурье. Для этого каждое из уравнений (5) домножается на $\sin\lambda_n x$, где $\lambda_n = \pi(n - 1/2)$, и интегрируется по промежутку $[0, 1]$ с учетом граничных условий (6). В ре-

зультате получаем (верхний индекс L обозначает трансформанту Лапласа):

$$k_{1n}(s)G^L_{1kn}(s) - b_1\lambda_n^2 G^L_{2kn}(s) - \lambda_n^2 \sum_{j=1}^{N} \alpha_1^{(j)} G^L_{j+2,kn}(s) = F_{1kn}(s),$$

$$B_1\lambda_n^2 k_0(s) G^L_{1kn}(s) + k_{2n}(s) G^L_{2kn}(s) + k_0(s) \sum_{j=1}^{N} v^{(j)} G^L_{j+2,kn}(s) = F_{2kn}(s),$$

$$-\Lambda_{11}^{(q)}\lambda_n^4 G^L_{1kn}(s) - M_1^{(q)}\lambda_n^2 G^L_{2kn}(s) + k_{q+2,n}(s) G^L_{q+2,kn}(s) = F_{q+2,kn}(s),$$

где

$$k_{1n}(s) = (\lambda_n^2 + a)s^2 + \lambda_n^4, \qquad k_{2n}(s) = k_0(s) + \kappa_1\lambda_n^2,$$

$$k_0(s) = \sum_{l=0}^{K} \frac{(\tau_0)^l s^{l+1}}{l!}, \qquad k_{q+2,n}(s) = \sum_{r=0}^{M} \frac{(\tau_q)^r s^{r+1}}{r!} + D_1^{(q)}\lambda_n^2,$$

$$F_{1kn}(s) = -2\lambda_n\delta_{1k} + 2(-1)^{n+1}\lambda_n^2\delta_{2k} - 2(-1)^{n+1}\delta_{k3},$$

$$F_{2kn}(s) = 2(-1)^{n+1}B_1 k_0(s)\delta_{2k},$$

$$F_{q+2,kn}(s) = 2\Lambda_{11}^{(q)}\lambda_n\delta_{1k} - 2(-1)^{n+1}\Lambda_{11}^{(q)}\lambda_n^2\delta_{2k},$$

$$G^L_{mk}(x,s) = \sum_{n=1}^{\infty} G^L_{mkn}(s)\sin\lambda_n x, \quad G^L_{mkn}(s) = 2\int_0^1 G^L_{mk}(x,s)\sin\lambda_n x dx.$$

Решение полученной системы имеет вид

$$G^L_{ikn} = \frac{P_{ikn}(s)}{P_n(s)}, \quad i = 1,2;$$
$$G^L_{q+2,kn} = \frac{2\Lambda_{11}^{(q)}\lambda_n\delta_{1k} - 2\Lambda_{11}^{(q)}\lambda_n^2(-1)^{n+1}\delta_{2k}}{k_{q+2,n}(s)} + \frac{P_{q+2,kn}(s)}{Q_{qn}(s)}, \tag{7}$$

где

$$P_n(s) = \big[k_{1n}(s)k_{2n}(s) + B_1 b_1\lambda_n^4 k_0(s)\big]\Pi_n(s) + \lambda_n^2 k_0(s)\sum_{j=1}^{N} C_{1n}^{(j)}\Lambda_{11}^{(j)}\Pi_{jn}(s) -$$
$$- \lambda_n^6 \sum_{j=1}^{N} C_{2n}^{(j)}\Lambda_{11}^{(j)}\Pi_{jn}(s) - \lambda_n^8 k_0(s)\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} v^{(i)}\alpha_1^{(j)} M^{(ij)}\Pi_{ijn}(s), \tag{8}$$

$$Q_{qn}(s) = k_{q+2,n}(s)P_n(s),$$

$$\Pi_n(s) = \prod_{j=1}^{N} k_{j+2,n}(s), \quad \Pi_{qn}(s) = \prod_{j=1, j\neq q}^{N} k_{j+2,n}(s), \quad \Pi_{pqn}(s) = \prod_{j=1, j\neq p,q}^{N} k_{j+2,n}(s);$$

$$P_{11n}(s) = -2\lambda_n S_{11n}(s) + 2\lambda_n^3 \sum_{j=1}^{N} C_{2n}^{(j)}(s)\Lambda_{11}^{(j)}\Pi_{jn}(s) -$$

$$- 2\lambda_n^5 k_0(s) \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} M_1^{(i)} S^{(ij)} \Lambda_{11}^{(j)} \Pi_{ijn}(s),$$

$$P_{12n}(s) = 2(-1)^{n+1} \lambda_n^2 S_{11n}(s) + 2(-1)^{n+1} B_1 \lambda_n^2 k_0(s) S_{12n}(s) -$$
$$- 2(-1)^{n+1} \lambda_n^4 \sum_{j=1}^{N} C_{2n}^{(j)}(s) \Lambda_{11}^{(j)} \Pi_{jn}(s) +$$
$$+ 2(-1)^{n+1} \lambda_n^6 k_0(s) \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} M_1^{(i)} \Lambda_{11}^{(j)} S^{(j)} \Pi_{ijn}(s),$$

$$P_{21n}(s) = 2\lambda_n^3 k_0(s) S_{21n}(s) - 2\lambda_n k_0(s) \sum_{j=1}^{N} C_{1n}^{(j)}(s) \Lambda_{11}^{(j)} \Pi_{jn}(s) +$$
$$+ 2\lambda_n^7 k_0(s) \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \Lambda_{11}^{(i)} \Lambda_{11}^{(j)} S^{(ij)} \Pi_{ijn}(s), \quad (9)$$

$$P_{22n}(s) = -2(-1)^{n+1} \lambda_n^4 k_0(s) S_{21n}(s) + 2(-1)^{n+1} B_1 S_{22n}(s) k_0(s) +$$
$$+ 2(-1)^{n+1} \lambda_n^2 k_0(s) \sum_{j=1}^{N} C_{1n}^{(j)}(s) \Lambda_{11}^{(j)} \Pi_{jn}(s) -$$
$$- 2(-1)^{n+1} \lambda_n^8 k_0(s) \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \Lambda_{11}^{(i)} \Lambda_{11}^{(j)} S^{(ij)} \Pi_{ijn}(s),$$

$$P_{13n}(s) = -2(-1)^{n+1} S_{11n}(s), \quad P_{23n}(s) = 2(-1)^{n+1} k_0(s) \lambda_n^2 S_{21n}(s),$$
$$P_{1,q+3,n}(s) = 0, \qquad P_{2,q+3,n}(s) = 0,$$
$$P_{q+2,kn}(s) = \Lambda_{11}^{(q)} \lambda_n^4 P_{1kn}(s) + M_1^{(q)} \lambda_n^2 P_{2kn}(s);$$

$$\begin{aligned}
S_{11n}(s) &= k_{2n}(s) \Pi_n(s) + \lambda_n^2 k_0(s) \sum_{j=1}^{N} v^{(j)} M_1^{(j)} \Pi_{jn}(s), \\
S_{12n}(s) &= b_1 \Pi_n(s) + \lambda_n^2 \sum_{j=1}^{N} \alpha_1^{(j)} M_1^{(j)} \Pi_{jn}(s), \\
S_{21n}(s) &= B_1 \Pi_n(s) + \lambda_n^2 \sum_{j=1}^{N} v^{(j)} \Lambda_{11}^{(j)} \Pi_{jn}(s), \\
S_{22n}(s) &= k_{1n}(s) \Pi_n(s) - \lambda_n^6 \sum_{j=1}^{N} \alpha_1^{(j)} \Lambda_{11}^{(j)} \Pi_{jn}(s),
\end{aligned} \quad (10)$$

$$C_{1n}^{(j)}(s) = k_{1n}(s)v^{(j)} + \lambda_n^4 B_1 \alpha_1^{(j)}, \quad C_{2n}^{(j)}(s) = k_{2n}(s)\alpha_1^{(j)} - b_1 k_0(s) v^{(j)},$$
$$S^{(ij)} = \alpha_1^{(i)} v^{(j)} - \alpha_1^{(j)} v^{(i)} M^{(ij)} = M_1^{(i)} \Lambda_{11}^{(j)} - \Lambda_{11}^{(i)} M_1^{(j)}.$$

Оригиналы функций (9) находятся с помощью вычетов и таблиц операционного исчисления

$$\begin{gathered} G_{ikn}(\tau) = \sum_{j=1}^{\Sigma} A_{ikn}^{(j)} \exp(s_{jn}\tau), \quad A_{ikn}^{(j)} = \frac{P_{ikn}(s_{jn})}{P_n'(s_{jn})}, \quad i = 1, 2; \\ A_{q+2,kn}^{(l)} = \frac{P_{q+1,kn}(s_{ln})}{Q_{qn}'(s_{ln})}, \quad \Sigma = (K+1)N + M + 3; \\ G_{q+2,kn}(\tau) = 2\Lambda_{11}^{(q)} \left(\lambda_n \delta_{1k} - (-1)^{n+1} \lambda_n^2 \delta_{2k}\right) \sum_{r=1}^{K+1} \frac{\exp(\xi_{qrn}\tau)}{k_{q+2,n}'(\xi_{qrn})} + \\ + \sum_{j=1}^{\Sigma+K+1} A_{q+2,kn}^{(j)} \exp(s_{jn}\tau), \end{gathered} \tag{11}$$

где s_{jn}, $j = \overline{1, \Sigma}$, — нули многочлена $P_n(s)$; ξ_{qrn} — нули многочлена $k_{q+2,n}(s)$.

3. Метод эквивалентных граничных условий. Следующий этап решения заключается в построении соотношений, связывающих правые части граничных условий исходной и вспомогательной задач. Для этого решения (4) подставляются в граничные условия (2). В результате приходим к следующей системе интегральных уравнений:

$$\sum_{j=1}^{2} \int_0^{\tau} a_{ij}(\tau - t) f_j(t) dt = \varphi_i(\tau), \tag{12}$$

где

$$a_{11}(\tau) = G_{11}'(0, \tau), \quad a_{12}(\tau) = G_{12}'(0, \tau),$$
$$a_{21}(\tau) = G_{11}''(1, \tau) + b_1 G_{21}(1, \tau) + \sum_{j=1}^{N} \alpha_1^{(j)} G_{j+2,1}(1, \tau),$$
$$a_{22}(\tau) = G_{12}''(1, \tau) + b_1 G_{22}(1, \tau) + \sum_{j=1}^{N} \alpha_1^{(j)} G_{j+2,2}(1, \tau),$$
$$\varphi_1(\tau) = -\int_0^{\tau} G_{13}'(0, \tau - t) f_3(t) dt,$$
$$\varphi_2(\tau) = -\int_0^{\tau} \left[G_{13}''(1, \tau - t) + b_1 G_{23}(1, \tau - t) + \sum_{j=1}^{N} \alpha_1^{(j)} G_{j+1,3}(1, \tau - t) \right] f_3(t) dt.$$

Интегрированием по частям система (12) приводится к виду

$$\sum_{j=1}^{2} \int_0^{\tau} A_{ij}(\tau - t) \frac{\partial f_j(t)}{\partial t} dt = \varphi_i(\tau), \quad A_{ij}(\tau) = \int_0^{\tau} a_{ij}(t) dt \tag{13}$$

и далее решается численно с помощью квадратурных формул средних прямоугольников [23,25]. Для этого область интегрирования $[0,\tau]$ разбивается на N_t отрезков точками $t_m = mh_t$, $m = \overline{0, N_t}$, с равномерным шагом $h_t = \tau/N_t$ и вводятся сеточные функции $y_m^j = \partial f_j(t_m)/\partial\tau$, $A_m^{ij} = A_{ij}(t_m)$. Интегралы аппроксимируются с помощью формул средних прямоугольников:

$$\int_0^\tau A_{ij}(\tau - t)\frac{\partial f_j(t)}{\partial t}dt \approx h_t S_{m-1/2}^{ij} + h_t A_{1/2}^{ij} y_{m-1/2}^j,$$

$$S_{m-1/2}^{ij} = \sum_{l=1}^{m-1} A_{m-l+1/2}^{ij} y_{l-1/2}^j, \quad i,j = \overline{1, N+2};$$

$$t_{m-1/2} = (t_{m-1} + t_m)/2 = h_t(m - 1/2),$$

$$t_{m-l+1/2} = t_m - t_{l-1/2} = h_t(m - l + 1/2), \quad m = \overline{1, N_t}.$$

В результате приходим к рекуррентной последовательности систем линейных алгебраических уравнений ($m \geqslant 1$):

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}_{m-1/2} = \boldsymbol{b}_{m-1/2}, \quad \boldsymbol{A} = (A_{1/2}^{ij})_{2\times 2},$$
$$\boldsymbol{b}_{m-1/2} = (b_{m-1/2}^i)_{2\times 1}, \quad b_{m-1/2}^i = \frac{F_i(t_m)}{h_t} - \sum_{j=1}^{2} S_{m-1/2}^{ij}, \tag{14}$$

где $\boldsymbol{y}_{m-1/2} = (y_{m-1/2}^i)_{4\times 4}$ — столбец неизвестных.

Решение системы (14) находится по правилу Крамера:

$$y_{m-1/2}^1 = \frac{b_{m-1/2}^1 A_{1/2}^{22} - b_{m-1/2}^2 A_{1/2}^{12}}{A_{1/2}^{11}A_{1/2}^{22} - A_{1/2}^{12}A_{1/2}^{21}}, \; y_{m-1/2}^2 = \frac{b_{m-1/2}^2 A_{1/2}^{11} - b_{m-1/2}^1 A_{1/2}^{21}}{A_{1/2}^{11}A_{1/2}^{22} - A_{1/2}^{12}A_{1/2}^{21}}. \tag{15}$$

Полученные таким образом сеточные значения функций $\partial f_1/\partial\tau$ и $\partial f_2/\partial\tau$ подставляются в свертки (4), которые также вычисляются численно. В результате получаем решение исходной задачи (1), (2):

$$v(x,t_i) = h_t \sum_{l=1}^{2}\sum_{j=1}^{i} \tilde{G}_{1l}(x, t_{i-j+1/2}) y_{j-1/2}^l + \int_0^{t_i} G_{13}(x, t_i - t) f_3(t)dt,$$
$$\vartheta(x,t_i) = h_t \sum_{l=1}^{2}\sum_{j=1}^{i} \tilde{G}_{2l}(x, t_{i-j+1/2}) y_{j-1/2}^l + \int_0^{t_i} G_{23}(x, t_i - t) f_3(t)dt,$$
$$\eta_q(x,t_i) = h_t \sum_{l=1}^{2}\sum_{j=1}^{i} \tilde{G}_{q+2,l}(x, t_{i-j+1/2}) y_{j-1/2}^l + \int_0^{t_i} G_{q+2,3}(x, t_i - t) f_3(t)dt,$$
$$\tilde{G}_{mk}(x,\tau) = \int_0^\tau G_{mk}(x,t)dt.$$

4. Предельные переходы. Полагая в (8)–(10) $\alpha_1^{(q)} = 0$, $b_1 = 0$ и $D_1^{(q)} = 0$ из соотношений (11) получаем функции Грина $G_1^{(el)}(x,\tau)$ упругой задачи [25]:

$$G_1^{(el)}(x,\tau) = -2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n \sin[\gamma(\lambda_n)\tau]}{(\lambda_n^2 + a)\gamma(\lambda_n)} \sin\lambda_n x,$$

$$G_2^{(el)}(x,\tau) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\lambda_n^2 \sin[\gamma(\lambda_n)\tau]}{(\lambda_n^2+a)\gamma(\lambda_n)} \sin\lambda_n x,$$

$$G_3^{(el)}(x,\tau) = -2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin[\gamma(\lambda_n)\tau]}{(\lambda_n^2+a)\gamma\ (\lambda_n)} \sin\lambda_n x,$$

где $\gamma(\lambda_n) = \lambda_n^2/\sqrt{\lambda_n^2+a}$.

Полагая в граничных условиях (3)

$$f_k(\tau) = \tilde{f}_k H(\tau), \quad k=\overline{1,3}$$

и переходя к пределу при $\tau\to\infty$, получаем решение задачи об изгибе консольно закрепленной балки под действием статической нагрузки, приложенной к свободному концу. Здесь $H(\tau)$ — функция Хевисайда.

Функции Грина статической задачи $G_{mk}^{(st)}(x)$ выражаются через функции Грина $G_{mk}(x,\tau)$ динамической задачи с помощью соотношений [23, 25]

$$G_{mk}^{(st)}(x) = \lim_{\tau\to\infty}[G_{mk}(x,\tau)*H(\tau)] = \lim_{s\to 0}\Big[sG_{mk}^L(x,s)\frac{1}{s}\Big] = \lim_{s\to 0} G_{mk}^L(x,s). \quad (16)$$

Преобразуя свертки (4) с помощью (16), получаем решение статической задачи:

$$\left\{\begin{array}{c} v^{(st)}(x) \\ \vartheta^{(st)}(x) \\ H_q^{(st)}(x) \end{array}\right\} = \sum_{k=1}^{3} \left\{\begin{array}{c} G_{1k}^{(st)}(x) \\ G_{21}^{(st)}(x) \\ G_{q+2,k}^{(st)}(x) \end{array}\right\} \tilde{f}_k.$$

Применяя предельный переход (16) к равенствам (7), получаем следующие выражения для функций $G_{mk}^{(st)}(x)$, $k=\overline{1,N+2}$, $m=\overline{1,N+3}$:

$$\begin{aligned}
G_{11}^{(st)}(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{P_{11n}(0)}{P_n(0)}\sin\lambda_n x = -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\lambda_n x}{\lambda_n^3}, \\
G_{12}^{(st)}(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{P_{12n}(0)}{P_n(0)}\sin\lambda_n x = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\lambda_n^2}\sin\lambda_n x, \\
G_{13}^{(st)}(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{P_{13n}(0)}{P_n(0)}\sin\lambda_n x = -2\Phi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\lambda_n^4}\sin\lambda_n x, \\
G_{q+2,3}^{(st)}(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{P_{q+2,3n}(0)}{P_n(0)}\sin\lambda_n x = -2\Lambda_{11}^{(q)}\Phi_q\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\lambda_n^2}\sin\lambda_n x.
\end{aligned} \quad (17)$$

Остальные функции равны нулю. Здесь введены следующие обозначения:

$$\Phi = \frac{\prod\limits_{j=1}^{N} D_1^{(j)}}{\prod\limits_{j=1}^{N} D_1^{(j)} - \sum\limits_{j=1}^{N}\alpha_1^{(j)}\Lambda_{11}^{(j)}\prod\limits_{r=1,r\neq j}^{N} D_1^{(r)}}, \quad \Phi_q = \frac{\prod\limits_{r=1,r\neq q}^{N} D_1^{(r)}}{\prod\limits_{j=1}^{N} D_1^{(j)} - \sum\limits_{j=1}^{N}\alpha_1^{(j)}\Lambda_{11}^{(j)}\prod\limits_{r=1,r\neq j}^{N} D_1^{(r)}}. \quad (18)$$

С учетом предельного перехода (16) система уравнений (12) запишется в виде

$$\sum_{j=1}^{2} \tilde{a}_{ij} \tilde{f}_j = \tilde{\varphi}_i, \tag{19}$$

где с учетом формул (17) и (18)

$$\tilde{a}_{11} = G_{11}^{(st)\prime}(0), \quad \tilde{a}_{12} = G_{12}^{(st)\prime}(0),$$

$$\tilde{a}_{21} = G_{11}^{(st)\prime\prime}(1) + b_1 G_{21}^{(st)}(1) + \sum_{j=1}^{N} \alpha_1^{(j)} G_{j+2,1}^{(st)}(1),$$

$$\tilde{a}_{22} = G_{12}^{(st)\prime\prime}(1) + b_1 G_{22}^{(st)}(1) + \sum_{j=1}^{N} \alpha_1^{(j)} G_{j+2,2}^{(st)}(1),$$

$$\tilde{\varphi}_1 = -G_{13}^{(st)\prime}(0) \tilde{f}_3,$$

$$\tilde{\varphi}_2 = -\left[G_{13}^{(st)\prime\prime}(1) + b_1 G_{23}^{(st)}(1) + \sum_{j=1}^{N} \alpha_1^{(j)} G_{j+2,3}^{(st)}(1) \right] \tilde{f}_3.$$

Решение системы (19) находится по формулам (15). При этом используются следующие соответствия:

$$y_{m-1/2}^i \leftrightarrow \tilde{f}_j, \quad A_{1/2}^{ij} \leftrightarrow \tilde{a}_{ij}, \quad b_{m-1/2}^i \leftrightarrow \tilde{\varphi}_i.$$

5. Пример. В качестве расчетного примера рассматривается задача для консольно закрепленного трехкомпонентного дюралюминиевого стержня, в котором компоненты цинк и медь диффундируют в алюминии. Стержень характеризуется следующими физическими параметрами [26]:

$$C_{1122} = 6.93 \cdot 10^{10}\ \text{Н/м}^2, \ \ C_{1212} = 2.56 \cdot 10^{10}\ \text{Н/м}^2, \ \ T_0 = 700\ \text{К}, \ \ \rho = 2700\ \text{кг/м}^3,$$

$$c_0 = 920\ \text{Дж/(кг} \cdot \text{К)}, \ \ \alpha_{11}^{(1)} = 1.55 \cdot 10^7\ \text{Дж/кг}, \ \ \alpha_{11}^{(2)} = 6.14 \cdot 10^7\ \text{Дж/кг},$$

$$D_{11}^{(1)} = 2.62 \cdot 10^{-12}\ \text{м}^2/\text{с}, \ \ D_{11}^{(2)} = 2.89 \cdot 10^{-14}\ \text{м}^2/\text{с}, \ \ b_{11} = 4.94 \cdot 10^6\ \text{Н/(К} \cdot \text{м}^2),$$

$$\kappa_{11} = 134\ \text{Вт/(м} \cdot \text{К)}, \ \ m^{(1)} = 0.065\ \text{кг/моль}, \ \ m^{(2)} = 0.064\ \text{кг/моль},$$

$$C_{1111} = C_{2222} = C_{1122} + 2C_{1212}, \quad n_0^{(1)} = 0.0084, \quad n_0^{(2)} = 0.045.$$

Стержень имеет прямоугольное сечение: $h \times b = 0.05l \times 0.05l$, где $l = 0.01$ м. Поперечная нагрузка на конце стержня при $x = 1$ задается в виде

$$f_3(\tau) = H(\tau),$$

где $H(\tau)$ — функция Хевисайда.

Решая численно систему (13) и подставляя найденные функции в формулы (15), получаем результаты, представленные на рис. 2–8. Здесь одна единица безразмерного времени соответствует $1.6 \cdot 10^{-6}$ секундам. Для численного решения системы интегральных уравнений Вольтерра (15) использовалось $N_t = 20$ точек разбиения. Дальнейшее увеличение количества точек не приводит к заметным изменениям результатов.

На рис. 2 показаны прогибы балки в различные моменты времени, а также прогиб балки при статической нагрузке (жирная линия). Сравнение результатов для термомеханодиффузионной и упругой (при $\alpha_{11}^{(q)} = 0$ и $b_{11} = 0$) моделей показывает, что влияние тепломассопереноса на механическое поле изгибаемой консольно закрепленной балки Бернулли—Эйлера на рассматриваемом промежутке времени пренебрежимо мало (графики совпадают).

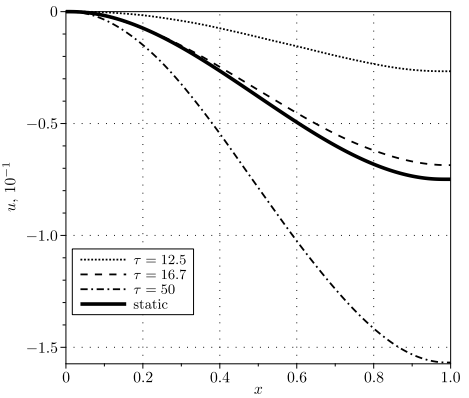

Рис. 2. Прогибы балки
[Figure 2. Beam deflections]

Графики на рис. 3 и 4 демонстрируют плотности приращений концентраций цинка и меди при динамической и статической нагрузках. На рис. 5 и 6 изображена плотность приращения температуры при динамических нагрузках.

Как показывают расчеты [24], релаксационные эффекты, обуславливающие конечную скорость распространения тепловых и диффузионных потоков, существенно проявляются в начальные моменты времени. Графики, представленные на рис. 3 и 4, одинаково подходят как для классической модели тепломассопереноса, так и для рассмотренной здесь. Примерный момент времени, когда обе модели дают достаточно близкие результаты, показан на рис. 7. Однако на более ранних стадиях развития процесса наблюдаются существенные различия в результатах, полученных по разным моделям (рис. 8).

Полученные результаты позволяют сделать вывод, что влияние механического поля на теплоперенос проявляется более существенно, чем на диффузионные процессы. При заданной нагрузке максимальная плотность приращения температуры материала составляет примерно 85 % (рис. 6). Переходя

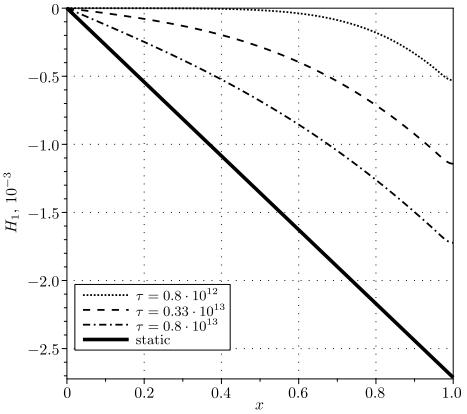

Рис. 3. Линейная плотность приращения концентрации цинка
[Figure 3. Linear density of zinc concentration increment]

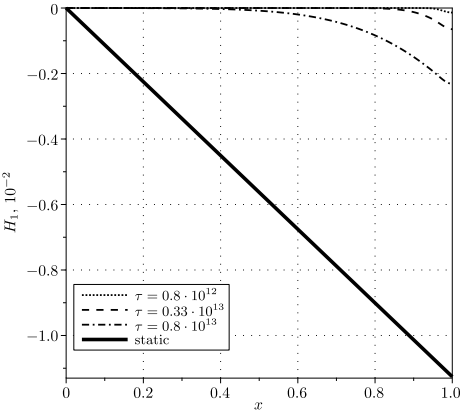

Рис. 4. Линейная плотность приращения концентрации меди
[Figure 4. Linear density of copper concentration increment]

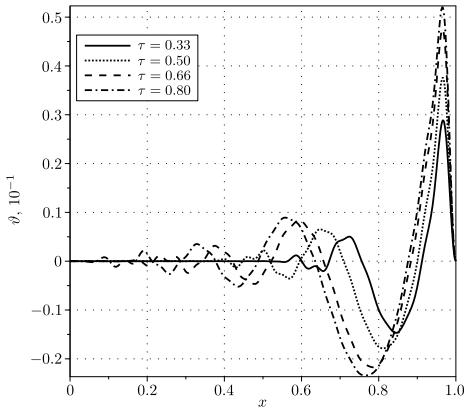

Рис. 5. Линейная плотность приращения температуры

[Figure 5. Linear density of temperature increment]

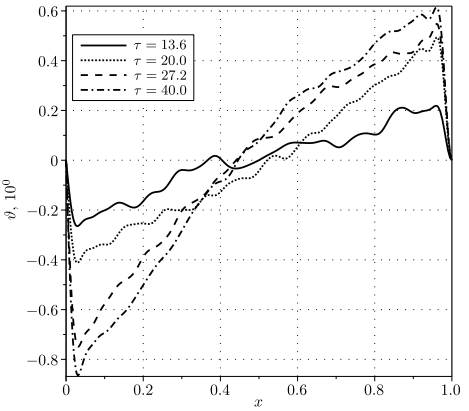

Рис. 6. Линейная плотность приращения температуры

[Figure 6. Linear density of temperature increment]

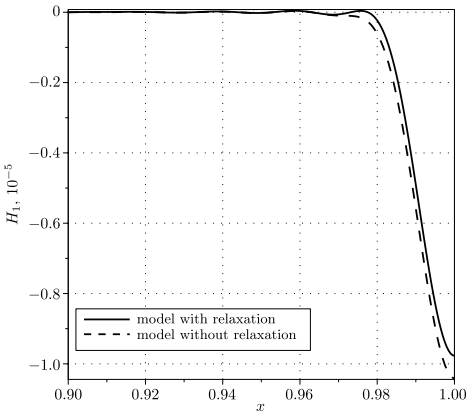

Рис. 7. Линейная плотность приращения концентрации цинка в момент времени $\tau = 10^9$

[Figure 7. Linear density of zinc concentration increment at time $\tau = 10^9$]

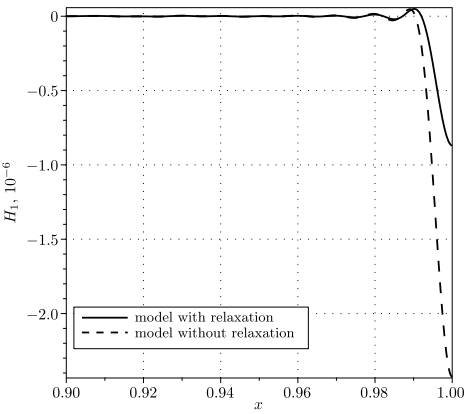

Рис. 8. Линейная плотность приращения концентрации цинка в момент времени $\tau = 10^8$

[Figure 8. Linear density of zinc concentration increment at time $\tau = 10^8$]

к размерным величинам, с учетом заданных размеров балки получаем приращение температуры на поверхности балки $x_2^* = h/2$:

$$T - T_0 = \theta T_0 = x_2 \vartheta T_0 = \frac{x_2^*}{l}\vartheta T_0 = \frac{h}{2l}\vartheta T_0 = \frac{0.05}{2} \cdot 0.85 \cdot 700 \approx 15 \text{ K}.$$

При этом изменение плотности концентрации веществ (цинк и медь) даже на значительном промежутке времени не превышает 1.1 % по отношению к начальным плотностям концентраций, что при переходе к размерным величинам дает пренебрежимо малое значение. Это, в свою очередь, подтверждается экспериментальными исследованиями [27], согласно которым влияние механических нагрузок на диффузионное поле слабо проявляется при упругих деформациях.

Результаты, представленные на рис. 2–4, хорошо согласуются с результатами, полученными ранее аналогичным способом для консольно закреплен-

ной упругодиффузионной балки Бернулли—Эйлера [25]. Кроме того, в так называемом «неопубликованном обзоре»[1] имеется немало ссылок на экспериментальные исследования, в том числе и на работу [27], подтверждающих, что взаимодействие механических и диффузионных полей наиболее существенным образом проявляется только при пластических деформациях.

6. Заключение. Таким образом, в работе построена модель нестационарных колебаний консольно закрепленной ортотропной балки Бернулли—Эйлера с учетом релаксации тепловых и диффузионных потоков. Данная модель описывает взаимосвязь между механическими, температурными и диффузионными полями в сплошных средах. Установлено, что интенсивность возникающего тепломассопереноса крайне мала и практически не оказывает обратного влияния на механическое поле в изгибаемой балке. Этот вывод подтвержден путем сравнения полученного решения с решением упругой задачи для балки Бернулли–Эйлера.

Предложен алгоритм решения задачи об изгибе консольно закрепленной балки с учетом тепломассопереноса, основанный на использовании преобразования Лапласа, разложения в тригонометрические ряды Фурье и метода эквивалентных граничных условий.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов и ответственность. Все авторы внесли равный вклад в разработку концепции статьи и написание рукописи. Авторы несут полную ответственность за подготовку и предоставление окончательной версии рукописи для публикации. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00189, https://rscf.ru/project/23-21-00189/.

Библиографический список

1. Флячок В. М., Швец Р. Н. Некоторые теоремы теории механодиффузии анизотропных оболочек // *Мат. методы и физ.-мех. поля*, 1985. № 21. С. 32–37.
2. Швец Р. Н., Флячок В. М. Уравнения механодиффузии анизотропных оболочек с учетом поперечных деформаций // *Мат. методы и физ.-мех. поля*, 1984. № 20. С. 54–61.
3. Швец Р. Н., Флячок В. М. Вариационный подход к решению динамических задач механотермодиффузии анизотропных оболочек // *Матем. физ. и нелинейн. механ.*, 1991. № 16. С. 39–43.
4. Раврик М. С. Об одной вариационной формуле смешанного типа для контактных задач термодиффузийной теории деформации слоистых оболочек // *Мат. методы и физ.-мех. поля*, 1985. № 22. С. 40–44.
5. Bhattacharya D., Kanoria M. The influence of two temperature generalized thermoelastic diffusion inside a spherical shell // *Int. J. Eng. Technol. Res.*, 2014. vol. 2, no. 5. pp. 151–159.
6. Раврик М. С., Бичуя А. Л. Осесимметричное напряженное состояние нагретой трансверсально-изотропной сферической оболочки с круговым отверстием при диффузионном насыщении // *Мат. методы и физ.-мех. поля*, 1983. № 17. С. 51–54.
7. Aouadi M., Copetti M. I. M. Analytical and numerical results for a dynamic contact problem with two stops in thermoelastic diffusion theory // *ZAMM*, 2016. vol. 96, no. 3. pp. 361–384. DOI: https://doi.org/10.1002/zamm.201400285.

[1] Бекман И. Н. Диффузионные процессы при механических воздействиях на материал: Неопубликованный обзор, М., 1980. https://profbeckman.narod.ru/DMD.pdf.

8. Aouadi M., Copetti M. I. M. A dynamic contact problem for a thermoelastic diffusion beam with the rotational inertia // *Appl. Numer. Math.*, 2018. vol. 126. pp. 113–137. DOI: https://doi.org/10.1016/j.apnum.2017.12.007.
9. Aouadi M., Copetti M. I. M. Exponential stability and numerical analysis of a thermoelastic diffusion beam with rotational inertia and second sound // *Math. Comput. Simul.*, 2021. vol. 187. pp. 586–613. DOI: https://doi.org/10.1016/j.matcom.2021.03.026.
10. Aouadi M., Miranville A. Smooth attractor for a nonlinear thermoelastic diffusion thin plate based on Gurtin–Pipkin's model // *Asymptotic Anal.*, 2015. vol. 95, no. 1–2. pp. 129–160. DOI: https://doi.org/10.3233/ASY-151330.
11. Copetti M. I. M., Aouadi M. A A quasi-static contact problem in thermoviscoelastic diffusion theory // *Appl. Numer. Math.*, 2016. vol. 109. pp. 157–183. DOI: https://doi.org/10.1016/j.apnum.2016.06.011.
12. Шевчук П. Р., Шевчук В. А. Механодиффузионный эффект при изгибе двухслойного бруса // *Физ.-хим. мех. матер.*, 1987. Т. 23, № 6. С. 75–79.
13. Huang M., Wei P., Zhao L., Li Y. Multiple fields coupled elastic flexural waves in the thermoelastic semiconductor microbeam with consideration of small scale effects // *Compos. Struct.*, 2021. vol. 270, 114104. DOI: https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.114104.
14. Kumar R., Devi S., Sharma V. Resonance of nanoscale beam due to various sources in modified couple stress thermoelastic diffusion with phase lags // *Mech. Mech. Eng.*, 2019. vol. 23, no. 1. pp. 36–49. DOI: https://doi.org/10.2478/mme-2019-0006.
15. Aouadi M. On thermoelastic diffusion thin plate theory // *Appl. Math. Mech.*, 2015. vol. 36, no. 5. pp. 619–632. DOI: https://doi.org/10.1007/s10483-015-1930-7.
16. Miranville A., Aouadi M. Quasi-stability and global attractor in nonlinear thermoelastic diffusion plate with memory // *Evol. Equ. Control Theory*, 2015. vol. 4, no. 3. pp. 241–263. DOI: https://doi.org/10.3934/eect.2015.4.241.
17. Миколайчук М. А., Князева А. Г, Грабовецкая Г. П., Мишин И. П. Изучение влияния механических напряжений на диффузию в пластине с покрытием // *Вестник ПНИПУ. Механика*, 2012. № 3. С. 120–134. EDN: PETTDJ.
18. Земсков А. В., Ле В. Х., Сердюк Д. О. Модель изгиба ортотропной консольно закрепленной балки Бернулли–Эйлера под действием нестационарных термомеханодиффузионных нагрузок / *Инновационное развитие транспортного и строительного комплексов.* Т. 2. Гомель: БелГУТ, 2023. С. 90–92.
19. Вольфсон Е. Ф. Эффект Горского (к 80-летию выдающегося открытия В. С. Горского) // *Изв. высш. учебн. завед. Черная металлургия*, 2016. Т. 59, № 5. С. 357–359. EDN: WBOQVZ. DOI: https://doi.org/10.17073/0368-0797-2016-5-357-359.
20. Кукушкин С. А., Осипов А. В. Эффект Горского при синтезе пленок карбида кремния из кремния методом топохимического замещения атомов // *Письма в ЖТФ*, 2017. Т. 43, № 13. С. 81–88. EDN: YZJPGF. DOI: https://doi.org/10.21883/PJTF.2017.13.44815.16625.
21. Князева А. Г. *Введение в термодинамику необратимых процессов. Лекции о моделях.* Томск: Иван Федоров, 2014. 172 с.
22. Келлер И. Э., Дудин И. С. *Механика сплошной среды. Законы сохранения.* Пермь: ПНИПУ, 2022. 142 с.
23. Земсков А. В., Тарлаковский Д. В. *Моделирование механодиффузионных процессов в многокомпонентных телах с плоскими границами.* М.: Физматлит, 2021. 288 с.
24. Zemskov A. V., Le V. H., Tarlakovskii D. V. Bernoulli–Euler beam unsteady bending model with consideration of heat and mass transfer // *J. Appl. Comp. Mech.*, 2023. vol. 9, no. 1. pp. 168–180. DOI: https://doi.org/10.22055/jacm.2022.40752.3649.
25. Zemskov A. V., Tarlakovskii D. V., Faykin G. M. Unsteady bending of the orthotropic cantilever Bernoulli–Euler beam with the relaxation of diffusion fluxes // *ZAMM*, 2022. vol. 102, no. 10, e202100107. DOI: https://doi.org/10.1002/zamm.202100107.

26. Бабичев А. П., Бабушкина Н. А., Братковский А. М. [и др.] *Физические величины.* М.: Энергоатомиздат, 1991. 1232 с.
27. Hirano K., Cohen M., Averbach B. L., Ujiiye N. Self-diffusion in alpha iron during compressive plastic flow // *Trans. Metall. Soc. AIME*, 1963. vol. 227. pp. 950–957.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 4, pp. 682–700
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2112

MSC: 74A15, 80A20

Model of bending of an orthotropic cantilever beam of Bernoulli–Euler under the action of unsteady thermomechanodiffusion loads

A. V. Zemskov[1,2]***, V. H. Le***[1]***, D. O. Serdyuk***[1]

[1] Moscow Aviation Institute (National Research University), 4, Volokolamskoe shosse, Moscow, 125993, Russian Federation.
[2] Lomonosov Moscow State University, Institute of Mechanics, 1, Michurinsky prospekt, Moscow, 119192, Russian Federation.

Abstract

The study investigates the interaction of mechanical, thermal, and diffusion fields during nonstationary bending of a cantilevered beam. The mathematical formulation of the problem is based on a system of equations describing nonstationary flexural vibrations of a Bernoulli–Euler beam, accounting for heat and mass transfer. This system is derived from the general thermomechanodiffusion model for continuum media using the generalized principle of virtual displacements. The research assumes a finite velocity of thermal and diffusive perturbation propagation. The interaction of mechanical, thermal, and diffusion fields is analyzed using a cantilevered three-component beam composed of a zinc–copper–aluminum alloy under the action of a nonstationary load applied to its free end.

Keywords: thermomechanical diffusion, Bernoulli–Euler beam, console, Green's function, equivalent boundary conditions method, unsteady problems.

Received: 23rd August, 2024 / Revised: 15th November, 2024 / Accepted: 29th November, 2024 / First online: 26th December, 2024

Mechanics of Solids
Research Article

© Authors, 2024
© Samara State Technical University, 2024 (Compilation, Design, and Layout)
The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Please cite this article in press as:
Zemskov A. V., Le V. H., Serdyuk D. O. Model of bending of an orthotropic cantilever beam of Bernoulli–Euler under the action of unsteady thermomechanodiffusion loads, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 4, pp. 682–700. EDN: AAAAAA. DOI: 10.14498/vsgtu2112 (In Russian).

Authors' Details:

Andrei V. Zemskov https://orcid.org/0000-0002-2653-6378
Dr. of Phys. & Math. Sci., Associate Professor; Professor; Dept. of Applied Software and Mathematical Methods[1]; Leading Researcher; Lab. of Dynamic Tests[2]; e-mail: azemskov1975@mail.ru

Van Hao Le https://orcid.org/0000-0002-0456-6429
Postgraduate Student; Dept. of Strength of Materials, Dynamics, and Strength of Machines[1]; e-mail: vanhaovtl@gmail.com

Dmitry O. Serdyuk https://orcid.org/0000-0003-0082-1856
Cand. Techn. Sci., Associate Professor; Associate Professor; Dept. of Strength of Materials, Dynamics, and Strength of Machines[1]; e-mail: d.serduk55@gmail.com

Conflict of Interest. The authors declare that they have no conflict of interest.

Authors' Contributions and Responsibility. All authors contributed equally to the development of the article's concept and the writing of the manuscript. The authors bear full responsibility for the preparation and submission of the final version of the manuscript for publication. The final version of the manuscript was approved by all authors.

Funding. This research was supported by a grant from the Russian Science Foundation, no. 23-21-00189, https://rscf.ru/en/project/23-21-00189/.

References

1. Flyachok V. M., Shvets R. N. Theorems of the mechano-thermodiffusion theory of anisotropic shells, *Mat. Metody Fiz.-Mekh. Polya*, 1985, no. 21, pp. 32–37 (In Russian).
2. Shvets R. N., Flyachok V. M. Equations of the mechano-thermodiffusion of anisotropic shells taking into account transverse deformations, *Mat. Metody Fiz.-Mekh. Polya*, 1984, no. 20, pp. 54–61 (In Russian).
3. Shvets R. N., Flyachok V. M. Variational approach to the solution of dynamical problems of thermoelastic diffusion for anisotropic shells, *Mat. Fiz. Nelin. Mekh.*, 1991, no. 16, pp. 39–43 (In Russian).
4. Ravrik M. S. A variational mixed formula for contact problems of thermal diffusion theory of deformation of laminated shells, *Mat. Metody Fiz.-Mekh. Polya*, 1985, no. 22, pp. 40–44 (In Russian).
5. Bhattacharya D., Kanoria M. The influence of two temperature generalized thermoelastic diffusion inside a spherical shell, *Int. J. Eng. Technol. Res.*, 2014, vol. 2, no. 5, pp. 151–159.
6. Ravrik M. S., Bichuya A. L. Axisymmetric stress state of a heated transversal-isotropic spherical shell with circular opening at diffusion saturation, *Mat. Metody Fiz.-Mekh. Polya*, 1983, no. 17, pp. 51–54 (In Russian).
7. Aouadi M., Copetti M. I. M. Analytical and numerical results for a dynamic contact problem with two stops in thermoelastic diffusion theory, *ZAMM*, 2016, vol. 96, no. 3, pp. 361–384. DOI: https://doi.org/10.1002/zamm.201400285.
8. Aouadi M., Copetti M. I. M. A dynamic contact problem for a thermoelastic diffusion beam with the rotational inertia, *Appl. Numer. Math.*, 2018, vol. 126, pp. 113–137. DOI: https://doi.org/10.1016/j.apnum.2017.12.007.
9. Aouadi M., Copetti M. I. M. Exponential stability and numerical analysis of a thermoelastic diffusion beam with rotational inertia and second sound, *Math. Comput. Simul.*, 2021, vol. 187, pp. 586–613. DOI: https://doi.org/10.1016/j.matcom.2021.03.026.
10. Aouadi M., Miranville A. Smooth attractor for a nonlinear thermoelastic diffusion thin plate based on Gurtin–Pipkin's model, *Asymptotic Anal.*, 2015, vol. 95, no. 1–2, pp. 129–160. DOI: https://doi.org/10.3233/ASY-151330.
11. Copetti M. I. M., Aouadi M. A A quasi-static contact problem in thermoviscoelastic diffusion theory, *Appl. Numer. Math.*, 2016, vol. 109, pp. 157–183. DOI: https://doi.org/10.1016/j.apnum.2016.06.011.
12. Shevchuk P. R., Shevchuk V. A. Mechanodiffusion effect in bending a two-layer bar, *Mater. Sci.*, 1987, vol. 23, no. 6, pp. 604–608. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01151899.
13. Huang M., Wei P., Zhao L., Li Y. Multiple fields coupled elastic flexural waves in the thermoelastic semiconductor microbeam with consideration of small scale effects, *Compos. Struct.*, 2021, vol. 270, 114104. DOI: https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.114104.
14. Kumar R., Devi S., Sharma V. Resonance of nanoscale beam due to various sources in modified couple stress thermoelastic diffusion with phase lags, *Mech. Mech. Eng.*, 2019, vol. 23, no. 1, pp. 36–49. DOI: https://doi.org/10.2478/mme-2019-0006.
15. Aouadi M. On thermoelastic diffusion thin plate theory, *Appl. Math. Mech.*, 2015, vol. 36, no. 5, pp. 619–632. DOI: https://doi.org/10.1007/s10483-015-1930-7.

16. Miranville A., Aouadi M. Quasi-stability and global attractor in nonlinear thermoelastic diffusion plate with memory, *Evol. Equ. Control Theory*, 2015, vol. 4, no. 3, pp. 241–263. DOI: https://doi.org/10.3934/eect.2015.4.241.
17. Mikolaychuk M. A., Knyazeva A. G., Grabovetskaya G. P., Mishin I. P. Research of the stress influence on the diffusion in the coating plate, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2012, no. 3, pp. 120–134 (In Russian). EDN: PETTDJ.
18. Zemskov A. V., Le V. H., Serdyuk D. O. A model of bending of an orthotropic cantilevered Bernoulli–Euler beam under the action of nonstationary thermomechanodiffusion loads, In: *Innovatsionnoe razvitie transportnogo i stroitel'nogo kompleksov* [Innovative Development of Transport and Construction Complexes], vol. 2. Gomel', Belarusian State University of Transport, 2023, pp. 90–92 (In Russian).
19. Vol'fson E. F. To the 80th anniversary of the famous opening of V.S. Gorskii, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Chernaya Metallurgiya*, 2016, vol. 59, no. 5, pp. 357–359 (In Russian). EDN: WBOQVZ. DOI: https://doi.org/10.17073/0368-0797-2016-5-357-359.
20. Kukushkin S. A., Osipov A. V. The Gorsky effect in the synthesis of silicon-carbide films from silicon by topochemical substitution of atoms, *Tech. Phys. Lett.*, 2017, vol. 43, no. 7, pp. 631–634. EDN: XNQWWZ. DOI: https://doi.org/10.1134/S1063785017070094.
21. Knyazeva A. G. *Vvedenie v termodinamiku neobratimykh protsessov. Lektsii o modeliakh* [Introduction to Thermodynamics of Irreversible Processes. Lectures on Models]. Tomsk, Ivan Fedorov, 2014, 172 pp. (In Russian)
22. Keller I. E., Dudin I. S. *Mekhanika sploshnoi sredy. Zakony sokhraneniia* [Continuum Mechanics. Conservation Laws]. PNIPU, Perm', 2022, 142 pp. (In Russian)
23. Zemskov A. V., Tarlakovskii D. V. *Modelirovanie mekhanodiffuzionnykh protsessov v mnogokomponentnykh telakh s ploskimi granitsami* [Modeling of Mechanodiffusion Processes in Multicomponent Bodies with Flat Boundaries]. Moscow, Fizmatlit, 2021, 288 pp. (In Russian)
24. Zemskov A. V., Le V. H., Tarlakovskii D. V. Bernoulli–Euler beam unsteady bending model with consideration of heat and mass transfer, *J. Appl. Comp. Mech.*, 2023, vol. 9, no. 1, pp. 168–180. DOI: https://doi.org/10.22055/jacm.2022.40752.3649.
25. Zemskov A. V., Tarlakovskii D. V., Faykin G. M. Unsteady bending of the orthotropic cantilever Bernoulli–Euler beam with the relaxation of diffusion fluxes, *ZAMM*, 2022, vol. 102, no. 10, e202100107. DOI: https://doi.org/10.1002/zamm.202100107.
26. Babichev A. P., Babushkina N. A., Bratkovskii A. M., et al. *Fizicheskie velichiny* [Physical Quantities]. Moscow, Energoatomizdat, 1991, 1232 pp. (In Russian)
27. Hirano K., Cohen M., Averbach B. L., Ujiiye N. Self-diffusion in alpha iron during compressive plastic flow, *Trans. Metall. Soc. AIME*, 1963, vol. 227, pp. 950–957.