



УДК 539.3

О соответствии теоретических моделей продольных колебаний стержня с кольцевыми дефектами экспериментальным данным

© А. Л. Попов¹, С. А. Садовский²¹ Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Россия, 119526, Москва, просп. Вернадского, 101, корп. 1.² Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Россия, 129337, Москва, Ярославское шоссе, 26.

Аннотация

Рассматривается ряд теоретических моделей для описания продольных колебаний стержня. Наиболее простая и распространенная основана на волновом уравнении. Далее идет модель, учитывающая поперечное смещение (поправка Рэлея). Более совершенной считается модель Бишопа, учитывающая как поперечное смещение, так и деформацию сдвига. Казалось бы, чем совершеннее теоретическая модель, тем она лучше должна согласовываться с экспериментальными данными. Тем не менее, при сравнении с реально определенным экспериментальным спектром продольных колебаний стержня на большой базе собственных частот оказывается, что это не совсем так. Причем, в относительном проигрыше оказывается наиболее сложная модель Бишопа. Сопоставления проведены для стержня с малыми кольцевыми проточками, моделирующими поверхностные дефекты, который рассматривается как ступенчатый стержень. Затронуты также вопросы уточнения с помощью экспериментально найденных частот скорости продольных волн и коэффициента Пуассона материала стержня.

Ключевые слова: ступенчатый стержень, продольные колебания, волновое уравнение, поправка Рэлея, поправка Бишопа, экспериментальные данные.

Получение: 25 сентября 2020 г. / Исправление: 13 января 2021 г. /

Принятие: 10 марта 2021 г. / Публикация онлайн: 17 марта 2021 г.

Научная статья

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Попов А. Л., Садовский С. А. О соответствии теоретических моделей продольных колебаний стержня с кольцевыми дефектами экспериментальным данным // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 1. С. 97–110. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1827>.

Сведения об авторах

Александр Леонидович Попов  <https://orcid.org/0000-0002-4841-5657>

доктор физико-математических наук; ведущий научный сотрудник; лаб. механики прочности и разрушения материалов и конструкций; e-mail: popov@ipmnet.ru

Сергей Александрович Садовский  <https://orcid.org/0000-0002-6190-5861>

аспирант; лаб. механики прочности и разрушения материалов и конструкций; e-mail: bigostart@rambler.ru

Введение. Продольные колебания стержня рассматривались многими авторами. Достаточно упомянуть классические монографии [1–3]. Наиболее распространенной и простой моделью их описания является волновое уравнение. При его использовании предполагается, что поперечные размеры стержня малы по сравнению с длиной. Это позволяет при определении продольных смещений пренебречь влиянием поперечных деформаций, сопровождающих деформации расширения-сжатия в процессе продольных колебаний стержня. Вывод уточненного уравнения, учитывающего поперечную деформацию при продольных колебаниях стержня, приведен в [2]. Получающаяся из него поправка для частот колебаний совпадает с поправкой Рэлея, выведенной из энергетических соображений [1]. Обобщением модели Рэлея является модель, предложенная Бишопом [4] для безграничного стержня, в которой, наряду с поперечными деформациями, учитываются и деформации сдвига. Эта модель описывается дифференциальным уравнением более высокого — 4-го порядка по продольной координате. Формулировка граничных условий для уравнения продольных колебаний с поправкой Бишопы приведена в [5]. Считается, что модель Бишопы лучше описывает колебания толстых коротких стержней, чем две предыдущие [6, 7].

При рассмотрении стержня с малыми кольцевыми проточками, моделирующими поверхностные дефекты, как ступенчатого стержня, участки под проточками могут быть отнесены к толстым коротким стержням. На первый взгляд это не согласуется с классическим определением стержня как тела, поперечные размеры которого малы по сравнению с длиной. В динамике это определение наиболее важно при описании поперечных колебаний, где направление колебаний не совпадает с направлением распространения волн. Однако при продольных колебаниях подобной поляризации не возникает, так как направление продольных колебаний совпадает с направлением их распространения. Вследствие этого поперечные размеры тела малозначительны при продольных колебаниях. Характерным примером является прохождение плоских звуковых волн через жидкий слой, разделяющий два акустических полупространства с параметрами, отличными от слоя. При нормальном падении звука волны сдвига в слое не возбуждаются вне зависимости от того, является ли он жидким или упругим, что в полной мере относится и к слою в виде упругой пластины. При этом в ней возникают колебания, симметричные относительно средней плоскости [8]. Именно такое возбуждение и подобные колебания происходят в коротком участке стержня под кольцевой проточкой между двумя длинными участками стержня при продольных колебаниях.

Предложенный подход к моделированию дефектов является альтернативой их учету с помощью пружин, работающих при продольных колебаниях на растяжение-сжатие; жесткости таких пружин увязываются с размерами трещин [9].

Экспериментальные исследования продольных колебаний стержней берут начало с экспериментов Кундта, выполненных с помощью изобретенной им трубы [10]. В дальнейшем и по настоящее время используются два способа возбуждения колебаний: кратковременным ударным воздействием, вызывающим свободно затухающие колебания стержня (метод свободных колебаний), либо непрерывным воздействием с плавно изменяющейся частотой (резонансный метод) [11]. С появлением современных спектроанализаторов

первый способ, позволяющий определять сразу множество собственных частот, становится более предпочтительным. Ниже с помощью этого способа на большом числе прецизионно измеряемых собственных частот колебаний ступенчатого металлического стержня рассмотрено соответствие теоретических моделей продольных колебаний стержня экспериментальным данным. Рассмотрение проводится на трех моделях в порядке возрастания их сложности.

1. Базовая теоретическая модель на основе волнового уравнения.

Рассмотрим сначала свободные продольные колебания ступенчатого стержня с описанием колебаний каждого из участков с помощью волнового уравнения [12]:

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2}, \quad c = \sqrt{E/\rho}, \quad (1)$$

где $u_j = u_j(x, t)$, $0 \leq x \leq l_j$ — функции продольных перемещений по участкам длиной l_j , $j = 1, 2, \dots, N$; $\sum_{j=1}^N l_j = l$, E — модуль упругости, ρ — плотность стержня, N — число участков.

В случае гармонических колебаний стержня с круговой частотой ω решения этих уравнений могут быть представлены в виде

$$u_j(x, t) = (C_{1j} \cos \lambda x + C_{2j} \sin \lambda x) \exp(i\omega t), \quad \lambda = \omega/c, \quad i = \sqrt{-1}, \quad (2)$$

где C_{1j} , C_{2j} — постоянные, определяемые из граничных условий на концах участков стержня, $j = 1, 2, \dots, N$.

Естественными граничными условиями для системы (1) являются следующие условия на концах стержня:

$$\left. \frac{\partial u_k}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial u_k}{\partial x} \right|_{x=l} = 0, \quad k = 1, N. \quad (3)$$

Физический смысл этих условий состоит в отсутствии усилий на концах стержня; поэтому их называют условиями свободных концов.

В случае закрепления одного или двух концов стержня в качестве граничных условий вместо условий (3) может быть задано отсутствие перемещений на этом конце, например, $u_N|_{x=l} = 0$.

Для определения всех констант к граничным условиям необходимо добавить условия сопряжения по участкам [12, 13]:

$$u_j|_{x=l_j} = u_{j+1}|_{x=l_j}, \quad \left[F_j \frac{\partial u_j}{\partial x} \right]_{x=l_j} = \left[F_{j+1} \frac{\partial u_{j+1}}{\partial x} \right]_{x=l_j}, \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \quad (4)$$

где F_j — площадь поперечного сечения j -того участка ступенчатого стержня.

При подстановке решения (2) в граничные условия и условия сопряжения выводятся частотные уравнения для собственных частот продольных колебаний стержня. В общем случае для N участков они имеют громоздкий вид. Компактная запись для двух участков приведена в [13]. Ниже рассмотрен экспериментальный стержень (рис. 1, а) с двумя одинаковыми кольцевыми проточками, симметричными относительно середины его длины. Несмотря на то, что общее число участков такого стержня равно пяти, а частотное уравнение имеет сложный ненаглядный вид, получающийся спектр частот при

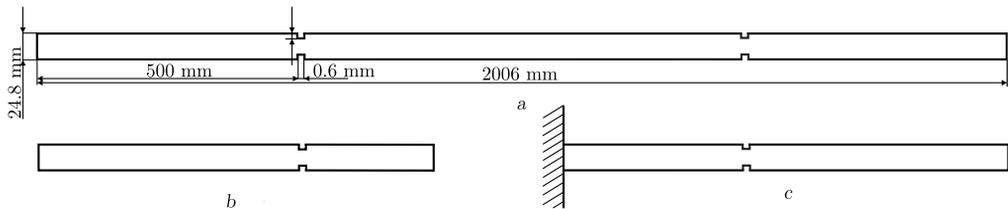


Рис. 1. Схема экспериментального стержня с малыми кольцевыми проточками: стержень полной длины (а); стержни половинной длины со свободными (b) и закрепленно-свободными концами (с)

[Figure 1. Design diagram of an experimental rod with small annular cut grooves: a full-length rod (a), a half-length rod with free ends (b), a half-length rod with fixed-free ends (c)]

однотипных граничных условиях по его концам будет состоять, как указывал еще Рэлей [1], из чередующихся частот колебаний стержня половинной длины с закрепленно-свободным и свободно-свободным концами, т.е. из частот колебаний трехступенчатых стержней. На рис. 1, b, c показана трансформация пятиступенчатого стержня в 2 трехступенчатых с $F_2 = F_1$. Выпишем соответствующие частотные уравнения:

– для свободно-свободного стержня половинной длины:

$$\operatorname{tg} \lambda l_1 + \operatorname{tg} \lambda l_3 + \operatorname{tg} \lambda l_2 \left(\frac{F_2}{F_1} - \frac{F_1}{F_2} \operatorname{tg} \lambda l_1 \operatorname{tg} \lambda l_3 \right) = 0, \quad (5)$$

– для закрепленно-свободного стержня половинной длины:

$$1 - \operatorname{tg} \lambda l_1 \operatorname{tg} \lambda l_3 - \operatorname{tg} \lambda l_2 \left(\frac{F_1}{F_2} \operatorname{tg} \lambda l_3 + \frac{F_2}{F_1} \operatorname{tg} \lambda l_1 \right) = 0. \quad (6)$$

Здесь l_1 – расстояние от центра стержня до проточки, l_2 – ширина проточки, l_3 – расстояние от проточки до конца стержня.

В частном случае (при $l_3 = 0$) из (5), (6) получаются частотные уравнения для двухступенчатых стержней со свободными и закрепленно-свободными концами.

2. Экспериментальное измерение спектра продольных колебаний стержня. В эксперименте наиболее просто реализуются продольные колебания стержня с условиями свободных концов, например, при горизонтальной подвеске стержня на двух нитях (рис. 2). Для возбуждения свободно затухающих продольных колебаний стержня и регистрации их спектра использовалась экспериментальная установка, схема которой показана на рис. 2.

Колебания стержня создавались однократным ударом шарика из закаленной стали по одному из торцов стержня. Регистрация колебаний осуществлялась с помощью лабораторного микрофона, установленного вблизи другого торца. Сигнал от микрофона передавался на анализатор спектра А19-У2 и далее на компьютер, где обрабатывался с помощью программного комплекса ZETLab (<https://zetlab.com/>).

В качестве образца для исследования был выбран прямолинейный цилиндрический стержень из алюминиевого сплава длиной $L = 2006$ мм диаметром 24.8 мм с двумя одинаковыми кольцевыми проточками шириной 0.6 мм и глубиной 1 мм на расстояниях 500 мм от торцов (рис. 1). На рис. 3 сверху показан фрагмент микрофонной записи многочастотного сигнала звукоизлучения

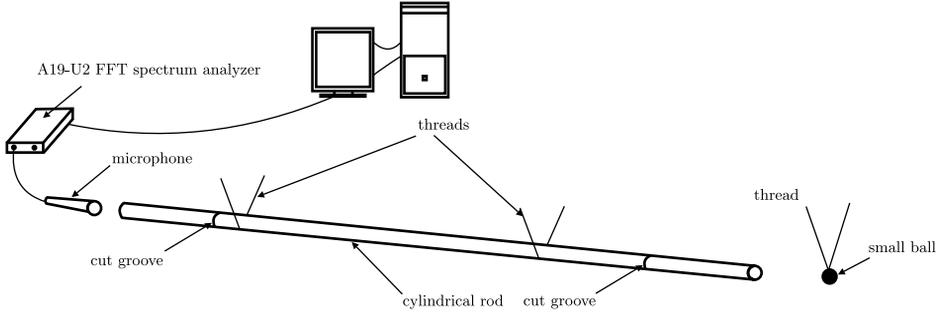


Рис. 2. Схема установки [Figure 2. The measurement setup block diagram]

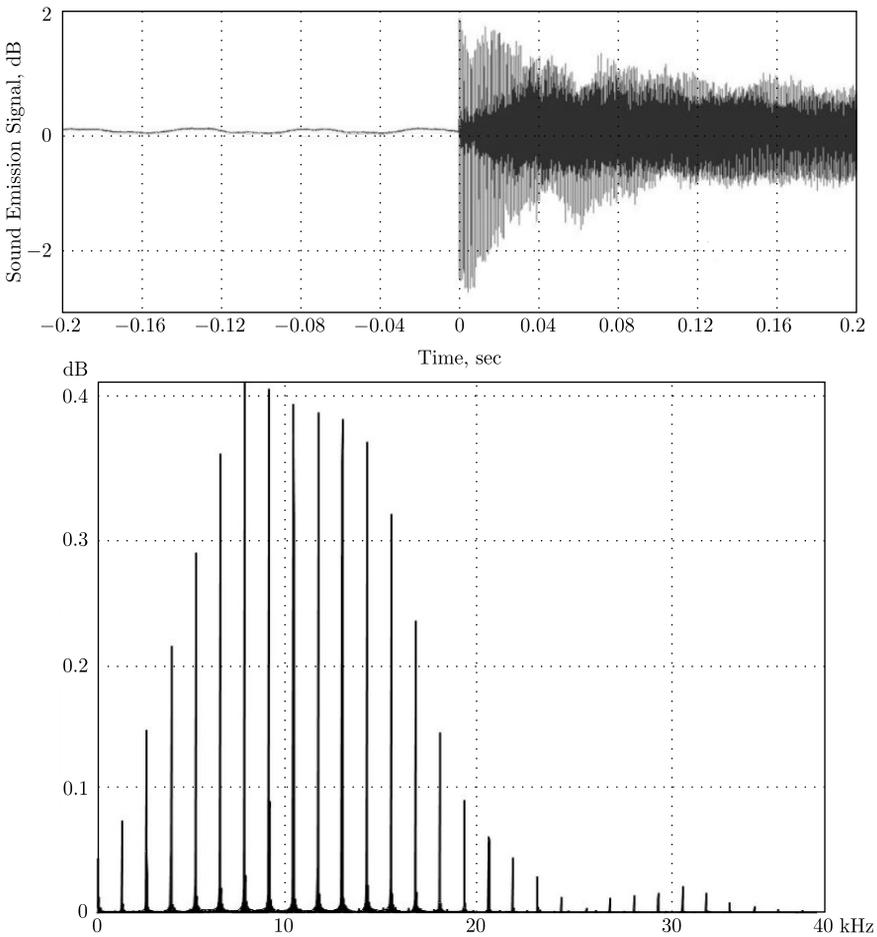


Рис. 3. Запись многочастотного сигнала звукоизлучения стержня после ударного воздействия по его торцу (сверху) и спектр этого сигнала (снизу)

[Figure 3. The multi-frequency signal recording of sound emission of a rod after impact on its end (top), and the spectrum of this signal (bottom)]

стержня продолжительностью 0.2 с после ударного воздействия в момент времени $t = 0$, а снизу — графическое отображение спектра этого сигнала в ГГц (амплитуды по осям ординат отложены в единицах электрического сигнала (дБ), передаваемого с микрофона).

В таблице приведены значения первых 30 экспериментально измеренных собственных частот продольных колебаний стержня с проточками.

Собственные частоты колебаний стержня с двумя проточками (в Гц)
 [Natural vibration frequencies of a rod with two cut grooves (in Hz)]

| | | | | | | |
|-------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| f_{1-6} | 1297.78 | 2594.90 | 3893.03 | 5192.81 | 6488.18 | 7781.71 |
| f_{7-12} | 9080.34 | 10380.51 | 11671.76 | 12959.86 | 14259.11 | 15556.23 |
| f_{13-18} | 16842.64 | 18125.61 | 19421.21 | 20717.67 | 21996.85 | 23272.82 |
| f_{19-24} | 24565.13 | 25857.51 | 27131.27 | 28396.33 | 29682.21 | 30969.38 |
| f_{25-30} | 32232.40 | 33488.83 | 34766.42 | 36046.22 | 37279.97 | 38524.60 |

Для сопоставления экспериментальных и теоретических частот колебаний стержня в частотных уравнениях (5), (6) должна быть известна скорость волн сжатия-расширения c , которая определяется из (1) через модуль упругости E и плотность ρ материала стержня. Справочные значения этих параметров для стержня из алюминиевого сплава имеют некоторый разброс [14]: $E = (69 \div 72.5)$ ГПа, $\rho = (2650 \div 2850)$ кг/м³, что приводит к интервальным расчетным значениям для скорости продольных волн $c = (4980 \div 5230)$ м/с.

Для уточнения скорости звука в стержне применен подход к ее вычислению через найденную в эксперименте собственную частоту колебаний и длину стержня, реализованный впервые в трубке Кундта [10]. Используя найденную по спектроанализатору первую экспериментальную частоту продольных колебаний стержня $f_{1\text{exp}} = 1297.78$ Гц, считая ее практически совпадающей с первой частотой свободных колебаний стержня без повреждений ($f_{10} = 1297.81$ Гц) и применяя явное выражение частоты для стержня со свободными концами [13], находим $c = 2Lf_{1\text{exp}} = 5206.8$ м/с.

3. Поправка Рэлея. В уточненной теории продольных колебаний стержня дополнительно учитывается инерция поперечных смещений, посредством которой сечения растягиваются или сжимаются в своих плоскостях при продольных колебаниях стержня. В соответствии с эффектом Пуассона перемещения будут иметь вид [5]

$$u = u(x, t), \quad v = -\nu y \frac{\partial u}{\partial x}, \quad w = -\nu z \frac{\partial u}{\partial x},$$

где через ν обозначен коэффициент Пуассона; y, z — расстояния от нейтральной оси до выбранной точки поперечного сечения.

Уравнения уточненной теории продольных колебаний участков ступенчатого стержня имеют вид [2]

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} - g_j \frac{\partial^4 u_j}{\partial x^2 \partial t^2} = 0, \quad g_j = \nu^2 \frac{I_j}{F_j}, \quad (7)$$

где $I_j = \int_{F_j} (y^2 + z^2) dF_j$ — полярные моменты инерции поперечных сечений участков стержня, $j = 1, 2, \dots, N$.

Граничные условия для уравнений на крайних участках стержня сводятся к тем же, что и в случае волнового уравнения [12].

Для решения уравнений (7) могут быть использованы представления, подобные (2):

$$u_j(x, t) = (C_{1j} \cos \lambda_j x + C_{2j} \sin \lambda_j x) \exp(i\omega t), \quad \lambda_j = \lambda(1 - g_j \lambda^2)^{-1/2}.$$

Подстановка их в условия (4) приводит к несколько более сложным, чем (5), (6), частотным уравнениям:

– для свободно-свободного стержня половинной длины:

$$\frac{\operatorname{tg} \lambda_1 l_1}{\cos \lambda_2 l_2 \cos \lambda_1 l_3} + \operatorname{tg} \lambda_1 l_3 + \frac{F_2 \lambda_2}{F_1 \lambda_1} \operatorname{tg} \lambda_2 l_2 - \frac{F_1 \lambda_1}{F_2 \lambda_2} \operatorname{tg} \lambda_1 l_1 \operatorname{tg} \lambda_2 l_2 \operatorname{tg} \lambda_1 l_3 = 0;$$

– для закрепленно-свободного стержня половинной длины:

$$1 - \operatorname{tg} \lambda_1 l_1 \operatorname{tg} \lambda_3 l_3 - \operatorname{tg} \lambda_2 l_2 \left(\frac{F_1 \lambda_1}{F_2 \lambda_2} \operatorname{tg} \lambda_3 l_3 + \frac{F_2 \lambda_2}{F_1 \lambda_1} \operatorname{tg} \lambda_1 l_1 \right) = 0.$$

4. Поправка Бишопа для стержня ступенчатого поперечного сечения. Главной особенностью модели Бишопа является учет не только поперечных, но и сдвиговых деформаций [4, 5]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = -\nu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = -\nu \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\nu y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\nu z \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \end{aligned}$$

Система уравнений продольных колебаний ступенчатого стержня по этой модели может быть представлена в виде

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} - g_j \frac{\partial^4 u_j}{\partial x^2 \partial t^2} + g_j \eta c^2 \frac{\partial^4 u_j}{\partial x^4} = 0, \quad \eta = \frac{1}{2(1 + \nu)}, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (8)$$

С учетом того, что система (8) состоит из уравнений 4-го порядка по координате, решения по участкам выражаются через тригонометрические и гиперболические функции:

$$\begin{aligned} u_j(x, t) &= (C_{1,j} \operatorname{ch} \beta_{1,j} x + C_{2,j} \operatorname{sh} \beta_{1,j} x + C_{3,j} \cos \beta_{2,j} x + C_{4,j} \sin \beta_{2,j} x) \exp(i\omega t), \\ \beta_{1,2,j}^2 &= \left(a_j^2 + \frac{\lambda^2}{\eta g_j} \right)^{-1/2} \pm a_j, \quad a_j = \frac{1}{2\eta} \left(\frac{1}{g_j} - \lambda^2 \right), \quad j = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (9)$$

На свободных концах стержня и границах между участками ставятся следующие условия [7]:

$$\begin{aligned}
 u_j \Big|_{x=l_j} &= u_{j+1} \Big|_{x=l_j}, & \frac{\partial u_j}{\partial x} \Big|_{x=l_j} &= \frac{\partial u_{j+1}}{\partial x} \Big|_{x=l_j}, \\
 \left[I_j \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} \right]_{x=l_j} &= \left[I_{j+1} \frac{\partial^2 u_{j+1}}{\partial x^2} \right]_{x=l_j}, & [\Gamma_j u_j]_{x=l_j} &= [\Gamma_{j+1} u_{j+1}]_{x=l_j}, \\
 & & j &= 1, 2, \dots, N-1; \\
 [\Gamma_j u_j]_{x=0} &= 0, & \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} \Big|_{x=0} &= 0, & [\Gamma_j u_j]_{x=l} &= 0, & \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} \Big|_{x=l} &= 0, \\
 & & j &= 1, N; \\
 \Gamma_j u_j &= \left(-EF_j \frac{\partial}{\partial x} - \rho \nu^2 I_j \frac{\partial^3}{\partial x \partial t^2} + \nu^2 \eta I_j \frac{\partial^3}{\partial x^3} \right) u_j, & j &= 1, 2, \dots, N.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Подстановка выражений (9) в граничные и переходные условия (10) с последующим приравнованием нулю определителя получающейся системы алгебраических уравнений относительно постоянных $C_{k,j}$ ($k = 1, \dots, 4$, $j = 1, \dots, N$) приводит к частотному уравнению для ступенчатого стержня (ввиду громоздкости оно не выписывается).

Заметим, что при рассмотрении ступенчатого стержня по модели волнового уравнения и с поправкой Рэлея в решении сохраняются только осциллирующие компоненты, а в условиях перехода — соотношения для перемещений и продольных сил, что кардинально упрощает проведение расчетных операций по определению собственных частот.

Для сравнения расчетных значений частот по моделям Рэлея и Бишопа с экспериментально измеренными частотами необходимо, кроме скорости продольных волн, знание и коэффициента Пуассона материала стержня. Здесь так же как и в случае с другими упругими параметрами, справочные данные по алюминиевым сплавам имеют достаточно большой разброс в пределах $0.31 \div 0.33$ [14], $0.32 \div 0.36$ [15]. Для уточнения этого значения применительно к материалу испытываемого стержня используем подход к определению коэффициента Пуассона, предложенный в [16].

Суть подхода в следующем. Задавая коэффициент Пуассона в возможном интервале значений ($0.31 \div 0.36$) и вычисляя значения собственных частот колебаний стержня, получаем набор расчетных частот, соответствующий измеренным экспериментальным частотам. Далее, составляя модули разностей экспериментальных и расчетных частот с одинаковыми номерами и суммируя эти разности с делением на число частот, получаем критерий отклонения расчетных значений частот от экспериментальных при выбранном значении коэффициента Пуассона:

$$\Delta(\nu) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |\Delta f_n(\nu)|, \quad \Delta f_n(\nu) = f_n^{\text{calc}}(\nu) - f_n^{\text{exp}}(\nu). \tag{11}$$

На рис. 4 приведен график зависимости $\Delta(\nu)$, из которого видно, что минимальное отклонение между экспериментальными и расчетными наборами

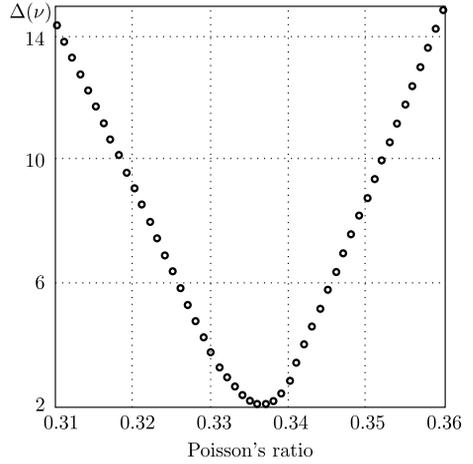


Рис. 4. Определение коэффициента Пуассона из условия минимума разницы между наборами экспериментальных и расчетных частот (см. (11))

[Figure 4. Determination of Poisson's ratio from the minimum difference condition between the sets of experimental and calculated frequencies (11)]

частот имеет место при $\nu = 0.337$. Данный результат был проверен экспериментально при статических испытаниях образца из материала стержня. С точностью до 2-х значащих цифр коэффициент Пуассона был определен равным 0.34.

При выбранном таким образом значении коэффициента Пуассона были рассчитаны 30 собственных частот продольных колебаний стержня и их отличия от экспериментальных частот. На рис. 5 представлены сравнительные диаграммы распределений отличий расчетных частот стержня с двумя проточками от соответствующих экспериментальных частот в зависимости от номера частоты.

Из приведенных диаграмм видно, что, как и в случае гладкого стержня, более простая модель Рэлея намного точнее описывает спектр частот продольных колебаний стержня с малыми дефектами, чем более сложная модель, предложенная Бишопом.

Из рис. 5 также видно, что изменение отличий расчетных частот от экспериментальных в зависимости от номера частот при наличии дефектов носит неравномерный, похожий на волновой характер, что может указывать на разную чувствительность к одним тем же дефектам частот колебаний стержня при разном сочетании граничных условий. Имея в виду, что как расчетный, так и измеренный экспериментально, спектры частот продольных колебаний стержня со свободными концами могут быть сведены к двум подспектрам чередующихся частот колебаний стержня половинной длины с закрепленно-свободными и свободно-свободными концами и симметричное расположение кольцевых проточек относительно середины длины стержня не нарушает эту закономерность, для этих подспектров можно составить следующие критерии:

$$\delta_n = f_1(2n - 1) - f_{2n-1}, \quad \eta_n = f_2n - f_{2n}, \quad n = 1, 2, \dots, N/2,$$

первый из которых показывает отличие от равномерного распределения частот подспектра колебаний стержня половинной длины с закрепленно-свободными концами (f_{2n-1}), а второй — со свободно-свободными концами (f_{2n}); N — четное число учитываемых частот стержня полной длины.

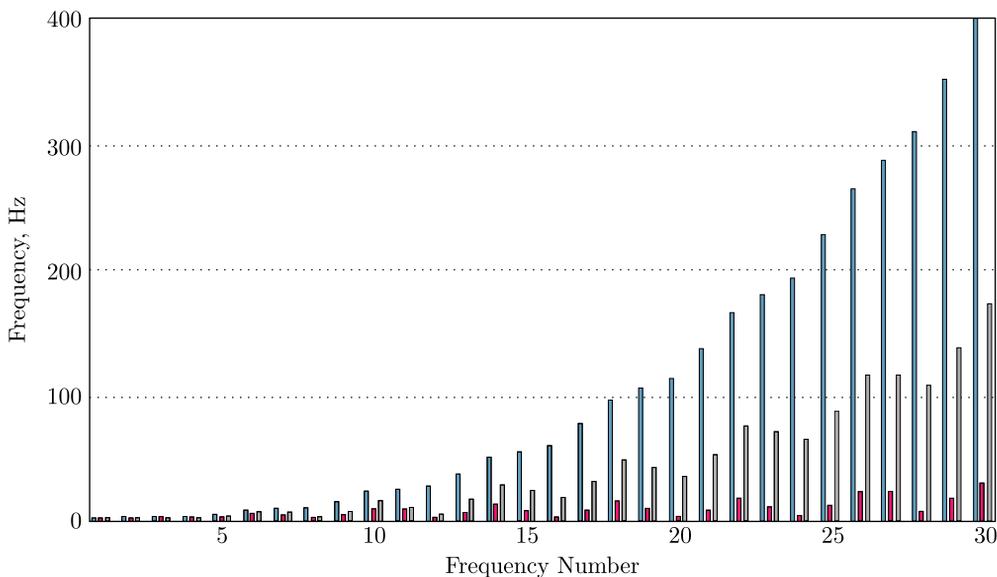


Рис. 5. Отличия расчетных частот, вычисленных по волновому уравнению и с поправками Рэлея и Бишопа от экспериментальных частот при $\nu = 0.34$: голубой — волновое уравнение, розовый — поправка Рэлея, серый — поправка Бишопа (онлайн в цвете)

[Figure 5. (color online) Differences between the calculated frequencies calculated by the wave equation (blue) with Rayleigh (pink) and Bishop (grey) corrections from the experimental frequencies]

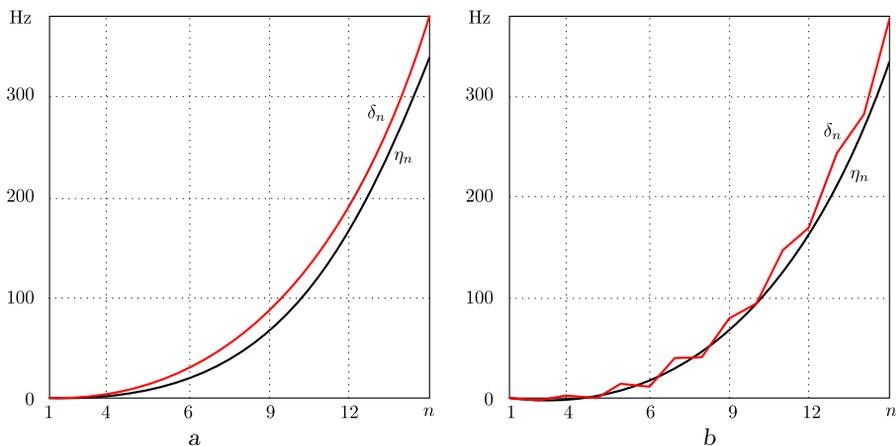


Рис. 6. Отличия от равномерного распределения частот продольных колебаний стержня без дефектов (а) и с малой кольцевой проточкой (б); красные линии — консольный стержень, черные линии — стержень со свободными концами

[Figure 6. Differences from the uniform distribution of the frequencies of longitudinal vibrations of the rod without defects (a) and with a small annular cut groove (b); red lines — the cantilever rod, black lines — the rod with free ends]

На рис. 6 показаны графики зависимостей значений δ_n и η_n от номеров частот продольных колебаний стержня половинной длины в отсутствии (рис. 6, а) и при наличии (рис. 6, b) малой кольцевой проточки указанного выше вида.

Из рис. 6 видна значительная чувствительность частот продольных колебаний консольно закрепленного стержня к наличию малого кольцевого дефекта при почти полном отсутствии чувствительности частот колебаний стержня со свободными концами к такому же дефекту. Это может быть использовано в развитии экспериментальной методики диагностики наличия дефектов в стержне.

Заключение. Широко распространено положение о том, что чем больше теоретически возможных факторов учитывается в математической модели, тем она совершеннее и должна лучше согласовываться с экспериментальными данными. В работе на примере продольных колебаний стержня ступенчатого поперечного сечения были рассмотрены три уровня таких моделей: волновое уравнение, уточненное уравнение, учитывающее влияние поперечной деформации стержня, и уравнение четвертого порядка по координате, учитывающее, наряду с предыдущим, также и сдвиговые деформации. Спектры частот колебаний стержня, полученные по этим моделям, сравнивались с экспериментальным набором частот, определенным с помощью высокоточной спектроанализирующей аппаратуры. Результат этого сравнения оказался неочевидным.

Сравнение экспериментальных частот с частотами, полученными по модели волнового уравнения, показало их быстро увеличивающееся расхождение с ростом номера частоты. Наилучшее согласование с экспериментальными частотами показали расчетные значения, вычисленные с поправкой Рэлея, т.е. в модели, учитывающей влияние поперечной деформации. Частоты, определенные из более сложной модели, разработанной Бишопом, учитывающей как поперечные, так и сдвиговые деформации, несколько улучшают результаты, полученные из волнового уравнения, но несравненно хуже аппроксимируют их значения при сравнении с экспериментом, чем частоты, вычисленные только с учетом поперечной деформации. Это может быть объяснено принципиальным свойством симметричности деформации поперечного сечения стержня при продольных колебаниях.

Возможно, конечно, рассмотрение вариантов продольных колебаний стержней несимметричного поперечного сечения, которые, скорее всего, будут сопровождаться и колебаниями других типов. В этих случаях, вероятно, сдвиговые деформации будут играть какую-то роль в уточнении расчетных частот продольных колебаний стержня. Однако для длинных стержней с симметричным поперечным сечением при расчете частот продольных колебаний не требуется перехода к более сложной модели, чем уравнение колебаний с учетом поперечной деформации.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. А.Л. Попов — идея исследования, общая постановка задачи, анализ литературы, теоретический анализ, разработка алго-

ритмов, анализ результатов, руководство и консультирование, черновик рукописи. С.А. Садовский — реализация алгоритмов на компьютере, расчеты, визуализация результатов расчетов и экспериментов, чистовик рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00100).

Библиографический список

1. Strutt Lord Rayleigh J. W. *The Theory of Sound (in two volumes)*. vol. 1. New York: Dover Publications, 1877.
2. Love A. E. H. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Cambridge: University Press, 1920.
3. Timoshenko S. P. *Vibration Problems in Engineering*. New York: D. Van Nostrand, 1955.
4. Bishop R. E. D. Longitudinal waves in beams // *Aeronautical Journal*, 1952. vol. 3, no. 4. pp. 280–293. <https://doi.org/10.1017/S0001925900000706>.
5. Rao S. S. *Vibration of Continuous Systems*. New York: John Wiley & Sons, 2007.
6. Федотов И. А., Полянин А. Д., Шаталов М. Ю., Тенкам Э. М. Продольные колебания стержня Рэлея–Бишопа // *Доклады Академии наук*, 2010. Т. 435, № 5. С. 613–618.
7. Marais J., Fedotov I., Shatalov M. Longitudinal vibrations of a cylindrical rod based on the Rayleigh–Bishop theory // *Afrika Matematika*, 2015. vol. 26, no. 7–8. pp. 1549–1560. <https://doi.org/10.1007/s13370-014-0286-3>.
8. Шендеров Е. Л. *Волновые задачи гидроакустики*. Л.: Судостроение, 1972.
9. Лебедев И. М., Шифрин Е. И. Решение обратной спектральной задачи для стержня, ослабленного поперечными трещинами, с помощью оптимизационного алгоритма Левенберга–Марквардта // *Изв. РАН. МТТ*, 2019. № 4. С. 8–26. <https://doi.org/10.1134/S0572329919040056>.
10. Kundt A. Acoustic Experiments // *London Edinburgh Dublin Philos. Mag. J. Sci.*, 1868. vol. 35, no. 4. pp. 41–48. <https://doi.org/10.1080/14786446808639937>.
11. *Неразрушающий контроль и диагностика: Справочник* / ред. В. В. Клюев. М.: Машиностроение, 2003.
12. *Вибрации в технике: Справочник в 6-ти т. Т. 1: Колебания линейных систем* / ред. В. Н. Челомей. М.: Машиностроение, 1978.
13. *Прочность, устойчивость, колебания: Справочник в 3 т. Т. 3* / ред. И. А. Биргер, Я. Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1968.
14. *Физические величины. Т. Справочник* / ред. И. С. Григорьев, Е. З. Мейлихов. М.: Энергоатомиздат, 1991.
15. Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. *Справочник по сопротивлению материалов* / ред. Г. С. Писаренко. Киев: Наук. думка, 1988.
16. Akulenko L. D., Nesterov S. V. *High-Precision Methods in Eigenvalue Problems and Their Applications*. New York: CRC Press, 2004.

MSC: 74H45, 74K10

On the conformity of theoretical models of longitudinal rod vibrations with ring defects experimental data

© A. L. Popov¹, S. A. Sadovsky²¹ Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, 101–1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.² National Research Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russian Federation.

Abstract

The paper considers a number of theoretical models for describing longitudinal vibrations of a rod. The most simple and common is based on the wave equation. Next comes the model that takes into account the lateral displacement (Rayleigh correction). Bishop's model is considered to be more perfect, taking into account both transverse displacement and shear deformation. It would seem that the more perfect the theoretical model, the better it should agree with the experimental data. Nevertheless, when compared with the actually determined experimental spectrum of longitudinal vibrations of the rod on a large base of natural frequencies, it turns out that this is not entirely true. Moreover, the most complex Bishop's model turns out to be a relative loser. The comparisons were made for a bar with small annular grooves that simulate surface defects, which is considered as a stepped bar. The questions of refinement with the help of experimentally found frequencies of the velocity of longitudinal waves and Poisson's ratio of the rod material are also touched upon.

Keywords: stepped bar, longitudinal vibrations, Rayleigh correction, Bishop's correction, wave equation, experimental data.

Received: 25th September, 2020 / Revised: 13th January, 2021 /

Accepted: 10th March, 2021 / First online: 17th March, 2021

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

Research Article

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Popov A. L., Sadovsky S. F. On the conformity of theoretical models of longitudinal rod vibrations with ring defects experimental data, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 1, pp. 97–110. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1827> (In Russian).

Authors' Details:

Alexandr L. Popov  <https://orcid.org/0000-0002-4841-5657>

Dr. Phys.& Math. Sci.; Leading Researcher; Lab. of Strength and Fracture Mechanics of Materials and Structures; e-mail: popov@ipmnet.ru

Sergei A. Sadovsky  <https://orcid.org/0000-0002-6190-5861>

Postgraduate Student; Leading Researcher; Lab. of Strength and Fracture Mechanics of Materials and Structures; e-mail: bigostart@rambler.ru

Author's Responsibilities. A.L. Popov: Idea of study; General Problem Statement; Literature review; Theoretical analysis, Development of algorithms; Analysis of results; Supervision and consulting; Writing — original draft. S.A. Sadovsky: Implementation of the computer algorithms; Performing Calculations; Visualization of experimental and calculated results; Writing — review & editing. We take full responsibility for submitting the final manuscript in print. We approved the final version of the manuscript.

Funding. This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 19-01-00100).

References

1. Strutt Lord Rayleigh J. W. *The Theory of Sound (in two volumes)*, vol. 1. New York, Dover Publications, 1877.
2. Love A. E. H. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Cambridge, University Press, 1920.
3. Timoshenko S. P. *Vibration Problems in Engineering*. New York, D. Van Nostrand, 1955.
4. Bishop R. E. D. Longitudinal waves in beams, *Aeronautical Journal*, 1952, vol. 3, no. 4, pp. 280–293. <https://doi.org/10.1017/S0001925900000706>.
5. Rao S. S. *Vibration of Continuous Systems*. New York, John Wiley & Sons, 2007.
6. Fedotov I. A., Polyanin A. D., Shatalov M. Yu., Tenkam H. M. Longitudinal vibrations of a Rayleigh–Bishop rod, *Dokl. Phys.*, 2010, vol. 55, pp. 609–614. <https://doi.org/10.1134/s1028335810120062>.
7. Marais J., Fedotov I., Shatalov M. Longitudinal vibrations of a cylindrical rod based on the Rayleigh–Bishop theory, *Afrika Matematika*, 2015, vol. 26, no. 7–8, pp. 1549–1560. <https://doi.org/10.1007/s13370-014-0286-3>.
8. Shenderov E. L. *Volnovye zadachi gidroakustiki* [Wave Problems of Hydroacoustic]. Leningrad, Sudostroenie, 1972 (In Russian).
9. Lebedev I. M., Shifrin E. I. Solution of the inverse spectral problem for a rod weakened by transverse cracks by the Levenberg—Marquardt optimization algorithm, *Mech. Solids*, 2019, vol. 54, no. 6, pp. 857–872. <https://doi.org/10.3103/S0025654419060025>.
10. Kundt A. Acoustic Experiments, *London Edinburgh Dublin Philos. Mag. J. Sci.*, 1868, vol. 35, no. 4, pp. 41–48. <https://doi.org/10.1080/14786446808639937>.
11. *Nerazrushaiushchii kontrol' i diagnostika* [Non-destructive Testing and Diagnostics], Handbook, ed. V. V. Klyuev. Moscow, Mashinostroenie, 2003 (In Russian).
12. *Vibratsii v tekhnike* [Vibrations in Engineering], Handbook in 6 volumes, vol. 1, Kolebaniia lineinykh sistem [Oscillations of Linear Systems], ed. V. N. Chelomei. Moscow, Mashinostroenie, 1978 (In Russian).
13. *Prochnost', ustoychivost', kolebaniia* [Strength, Stability, Vibration], Handbook in 3 volumes, vol. 3, ed. I. A. Birger, Ya. G. Panovko. Moscow, Mashinostroenie, 1968 (In Russian).
14. *Handbook of Physical Quantities*, ed. I. S. Grigoriev, E. Z. Meilikhov. Boca Raton, CRC Press, 1997.
15. Pisarenko G. S., Yakovlev A. P., Matveev V. V. *Spravochnik po soprotivleniiu materialov* [Handbook on Strength of Materials], ed. G. S. Pisarenko. Kiev, Nauk. Dumka, 1988 (In Russian).
16. Akulenko L. D., Nesterov S. V. *High-Precision Methods in Eigenvalue Problems and Their Applications*. New York, CRC Press, 2004.