



УДК 517.15, 517.581, 511.331.1

Асимптотика сумм с гауссовым ядром и мультипликативными коэффициентами

А. С. Зинченко, А. М. Романенков

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)
Россия, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, 4.

Аннотация

Исследуется задача определения асимптотического поведения конечной суммы, содержащей гауссову функцию и мультипликативный множитель. Суммы подобного вида возникают при анализе сложности алгоритмов обхода бинарного дерева и лучевого поиска. Метод комплексного интегрирования позволяет перейти от конечной дискретной суммы к интегралу по бесконечной вертикальной прямой в одномерной комплексной плоскости. Установлено, что подынтегральная функция включает целую положительную степень дзета-функции Римана. Применение стандартной техники вычисления вычетов дает возможность получить асимптотическое значение данного интеграла.

Ключевые слова: асимптотический анализ, конечные суммы, гауссово ядро, мультипликативные коэффициенты, метод комплексного интегрирования, дзета-функция Римана.

Получение: 6 сентября 2024 г. / Исправление: 21 января 2025 г. /

Принятие: 21 февраля 2025 г. / Публикация онлайн: 6 мая 2025 г.

Дифференциальные уравнения и математическая физика Краткое сообщение

© Коллектив авторов, 2025

© СамГТУ, 2025 (составление, дизайн, макет)

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Зинченко А. С., Романенков А. М. Асимптотика сумм с гауссовым ядром и мультипликативными коэффициентами // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2025. Т. 29, № 2. С. 381–389. EDN: BCHVZM. DOI: 10.14498/vsgtu2113.

Сведения об авторах

Александр Сергеевич Зинченко  <https://orcid.org/0000-0001-7971-4572>

кандидат экономических наук; доцент; каф. 916 математики; e-mail: zinchenkoas@mail.ru

Александр Михайлович Романенков  <https://orcid.org/0000-0002-0700-8465>

кандидат технических наук, доцент; каф. 916 математики;

e-mail: romanaleks@gmail.com

В прикладных задачах возникает необходимость вычисления конечных сумм специального вида. Подобные суммы появляются при оценке сложности алгоритмов и обычно называются функциями стоимости. Функция стоимости тем или иным образом сводится к временной оценке выполнения алгоритма. Таким образом, для анализа сложности можно учитывать определенные операции алгоритма, однако в конечном итоге задача сводится к оценке скорости его выполнения. Примечательным фактом является взаимосвязь между внешне различными алгоритмами, которая устанавливается посредством известных арифметических функций (число делителей, сумма делителей и их степеней). В частности, при оценке сложности алгоритмов требуются данные об асимптотическом поведении этих арифметических функций, причем типичным инструментом исследования выступает дзета-функция Римана. Именно свойства дзета-функции позволяют получить оценки сложности.

Следует отметить, что анализ поведения дзета-функции Римана представляет собой сложную и нетривиальную задачу. Так, в работе [1] продемонстрирована методика оценки среднего квадрата обобщения дзета-функции на коротких интервалах. В работе [2] дзета-функция и ее обобщение возникают при исследовании параметрических конечных сумм с биномиальными коэффициентами. В [3] проведен анализ конечных симметричных сумм Эйлера.

При анализе алгоритмов пузырьковой сортировки, обменной сортировки и поиска в бинарном дереве [4] возникает необходимость исследования конечной суммы следующего вида:

$$W(m, k, f) = \sum_{t=1}^{m-1} \exp\left(-\frac{t^2}{2m}\right) t^k f(t), \quad (1)$$

где $m \geq 2$, $m, k \in \mathbb{Z}$, а $f(t)$ — мультипликативная функция.

Для дальнейшего анализа потребуется представление выражения (1) в виде комплексного интеграла.

УТВЕРЖДЕНИЕ. *Функция $W(m, k, f)$, определенная формулой (1), допускает представление*

$$W(m, k, f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} \Gamma(z) (2m)^z \left(\sum_{t=1}^{m-1} \frac{f(t)}{t^{2z-k}} \right) dz,$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера.

Доказательство. Воспользуемся преобразованием Меллина для экспоненты. Пусть x — произвольное положительное число. Тогда справедливо равенство [2, 4]:

$$e^{-x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(z) x^{-z} dz, \quad c > 0. \quad (2)$$

Подставляя в формулу (2) $x = t^2/(2m)$ из (1) получаем

$$W(m, k, f) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{t=1}^{m-1} \left(\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(z) t^{k-2z} (2m)^z dz \right) f(t). \quad (3)$$

Пусть $z = x + iy$. Оценим интеграл в (3):

$$\begin{aligned} \left| \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(z) t^{k-2z} (2m)^z dz \right| &\leq \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} |\Gamma(z) t^{k-2z} (2m)^z| dy = \\ &= t^{k-2c} (2m)^c \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{c-g_1(b)}^{c+ig_2(b)} |\Gamma(c+iy)| dy, \end{aligned}$$

где $g_1(x)$, $g_2(x)$ — вещественнозначные функции вещественного переменного, такие что $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_1(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_2(x) = +\infty$.

Из [5] известна оценка для $|\Gamma(x+iy)|$. А именно, $\exists C_1, C_2 > 0$:

$$C_1(|x+iy|+1)^{x-1/2} e^{-|y|\pi/2} \leq |\Gamma(x+iy)| \leq C_2(|x+iy|+1)^{x-1/2} e^{-|y|\pi/2}, \quad (4)$$

где $x \in K \subset \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$.

В силу оценки (4) интеграл в (3) сходится абсолютно, поэтому можно изменить порядок суммирования и интегрирования. Полагая $c = 1/2$, окончательно получаем

$$W(m, k, f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} \Gamma(z) (2m)^z \sum_{t=1}^{m-1} \frac{f(t)}{t^{2z-k}} dz. \quad \square$$

Следуя работам [3, 4], изложим метод комплексного интегрирования. Рассмотрим в комплексной плоскости прямоугольный контур $\gamma_1 = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$ (рис. 1), который при фиксированных значениях N и M охватывает конечное число особых точек $\Gamma(z)$. При стремлении N и M к бесконечности в указанный контур попадают все особые точки подынтегральной функции.

Выберем числа N и M достаточно большими. Согласно теореме Коши о вычетах, значение интеграла по замкнутому контуру равно сумме вычетов в особых точках, расположенных внутри контура. При этом интеграл по всему контуру можно представить как сумму интегралов по его составляющим:

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z) = \sum_{j=1}^4 \int_{\gamma_j} f(z) dz. \quad (5)$$

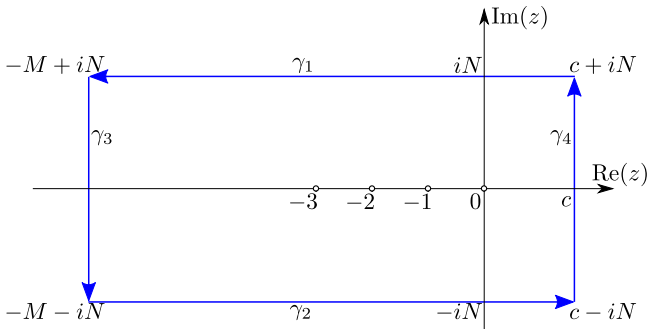


Рис. 1. Контур интегрирования [Fig. 1. Integration contour]

Пусть $\tau_k(n)$ обозначает количество решений в натуральных числах уравнения

$$x_1 x_2 \cdots x_k = n,$$

где $k, n \in \mathbb{N}$. Таким образом, функция $\tau_k(n)$ определяет число способов разложения натурального числа n в произведение k натуральных сомножителей.

Далее будем рассматривать $W(m, k, f)$, где положим $f(t) = \tau_k(t)$. В утверждении присутствует конечная сумма, верхний предел которой можно устремить к бесконечности. Поскольку

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{\tau_k(t)}{t^{2z-k}} = \sum_{t=1}^{m-1} \frac{\tau_k(t)}{t^{2z-k}} + \sum_{t=m}^{\infty} \frac{\tau_k(t)}{t^{2z-k}},$$

справедливо равенство

$$\sum_{t=1}^{m-1} \frac{\tau_k(t)}{t^{2z-k}} = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\tau_k(t)}{t^{2z-k}} - \sum_{t=m}^{\infty} \frac{\tau_k(t)}{t^{2z-k}}. \quad (6)$$

Учитывая, что для любого $\varepsilon > 0$ выполняется $\tau_k(t) \ll C_\varepsilon t^\varepsilon$ [6], из (6) получаем асимптотическую оценку по z :

$$\left| \sum_{t=m}^{\infty} \frac{\tau_k(t)}{t^{2z-k}} \right| \ll C_\varepsilon \sum_{t=m}^{\infty} \frac{1}{t^{2\operatorname{Re} z - k - \varepsilon}},$$

где ряд в правой части сходится при $\operatorname{Re} z > (1+k)/2 + \varepsilon/2$. Следовательно,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{t=m}^{\infty} \frac{\tau_k(t)}{t^{2z-k}} = 0.$$

Известно [6], что для $n \in \mathbb{N}$ ряд Дирихле для $\tau_n(t)$ выражается через дзета-функцию Римана:

$$\zeta^n(z) = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\tau_n(t)}{t^z}.$$

Тогда можем записать:

$$W(m, k, \tau_n(t)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} \Gamma(z) (2m)^z \zeta^n(2z-k) dz.$$

Отметим, что функцию, определяемую рядом Дирихле, можно аналитически продолжить левее точки $z = (1+k)/2$ [6].

Оценим интеграл по контуру $\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid z = t + iN, t \in [1/2, -\infty)\}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \Gamma(z) (2m)^z \zeta^n(2z-k) dz &= \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{1/2}^{-\infty} \Gamma(t + iN) (2m)^{t+iN} \zeta^n(2t + 2iN - k) dt \ll \end{aligned}$$

$$\ll e^{-N\pi/2}(N^{1/2} \ln N)^n \int_{1/2}^{-\infty} (|t + iN| + 1)^{t-1/2} (2m)^t dt. \quad (7)$$

При $N \rightarrow \infty$ правая часть оценки (7) стремится к нулю благодаря экспоненциальному множителю. Интеграл по контуру $\gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid z = t - iN, t \in [1/2, -\infty)\}$ оценивается аналогичным образом.

Далее оценим интеграл по контуру $\gamma_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid z = 1/2 + it - M, t \in (N, -N)\}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_3} \Gamma(z) (2m)^z \zeta^n(2z - k) dz &= \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_N^{-N} \Gamma\left(\frac{1}{2} + it - M\right) (2m)^{1/2+it-M} \zeta^n(1 + 2it - 2M - k) dt \ll \\ &\ll \frac{(2m)^{1/2-M}}{(M-1)!} \int_N^{-N} e^{-t\pi/2} (t^{2M} \ln t)^n dt. \end{aligned} \quad (8)$$

При $M \rightarrow \infty$ и $t \rightarrow \infty$ интеграл (8) стремится к нулю.

Рассмотрим теперь интеграл по контуру $\gamma_4 = \{z \in \mathbb{C} \mid z = 1/2 + it, t \in (-N, N)\}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_4} \Gamma(z) (2m)^z \zeta^n(2z - k) dz &= \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-N}^N \Gamma\left(\frac{1}{2} + it\right) (2m)^{1/2+it} \zeta^n\left(\frac{1}{2} + it - k\right) dz. \end{aligned}$$

Согласно (5), данный интеграл полностью определяется вычетами в особых точках подынтегральной функции. В точке $z = -j$ имеем следующий вычет:

$$\operatorname{Res}_{z=-j} (\Gamma(z) (2m)^z \zeta^n(2z - k)) = \frac{(-1)^j}{j! (2m)^j} \left(\frac{B_{2j+k+1}}{2j+k+1} \right)^n,$$

где B_{2j+k+1} — числа Бернулли.

Далее, подынтегральное выражение имеет полюс в точке $z = (k+1)/2$. Для нахождения вычета выполним замену $w = (z - (k+1))/2$ и разложим подынтегральную функцию в ряд Лорана:

$$\begin{aligned} \Gamma\left(w + \frac{k+1}{2}\right) (2m)^{w+(k+1)/2} \zeta^n(2w+1) &= \\ &= \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \left(1 + w\psi\left(\frac{k+1}{2}\right) + O(w^2)\right) \times \\ &\times (2m)^{(k+1)/2} (1 + w \ln 2m + O(w^2)) \left(\frac{1}{2w} + \gamma + O(w)\right)^n, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\psi(z) = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z)$, γ — постоянная Эйлера.

Рассмотрим последний сомножитель в (9) и применим бином Ньютона

$$\left(\frac{1}{2w} + \gamma\right)^n = \sum_{p=0}^n \frac{C_n^p}{(2w)^{n-p}} \gamma^p,$$

выделяя слагаемые

$$C_n^{n-2} \left(\frac{1}{2w} \right)^{n-(n-2)} \gamma^{n-2} + C_n^{n-1} \left(\frac{1}{2w} \right)^{n-(n-1)} \gamma^{n-1} = \frac{n(n-1)\gamma^{n-2}}{8w^2} + \frac{n\gamma^{n-1}}{2w},$$

которых достаточно для того, чтобы найти вычет в точке $z = (k+1)/2$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=(k+1)/2} (\Gamma(z)(2m)^z \zeta^n(2z-k)) &= \\ &= \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) (2m)^{(k+1)/2} \left(1 + w\psi\left(\frac{k+1}{2}\right) + O(w^2)\right) \times \\ &\times (1 + w \ln 2m + O(w^2)) \left(\frac{n(n-1)\gamma^{n-2}}{8w^2} + \frac{n\gamma^{n-1}}{2w}\right) \approx \\ &\approx \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) (2m)^{(k+1)/2} \left(\frac{n(n-1)\gamma^{n-2}}{8} \left(\psi\left(\frac{k+1}{2}\right) + \ln 2m\right) + \frac{n\gamma^{n-1}}{2}\right). \end{aligned} \quad (10)$$

Формула (10) позволяет анализировать все подобные интегралы в точке $z = (k+1)/2$ при $n \geq 1$. Например, для $n = 1$:

$$\operatorname{Res}_{z=(k+1)/2} (\Gamma(z)(2m)^z \zeta(2z-k)) \approx \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) (2m)^{(k+1)/2},$$

что согласуется с известными результатами из [4, 7].

При $n = 2$ вычет в точке $z = (k+1)/2$ вычисляется так:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=(k+1)/2} (\Gamma(z)(2m)^z \zeta^2(2z-k)) &\approx \\ &\approx \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) (2m)^{(k+1)/2} \left(\frac{1}{4} \left(\psi\left(\frac{k+1}{2}\right) + \ln 2m\right) + \gamma\right). \end{aligned}$$

Формула (10) позволяет находить оценки для случаев, когда подынтегральное выражение содержит многочлен от дзета-функции Римана:

$$\Omega_q(m) = \frac{1}{2\pi i} \int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} \Gamma(z)(2m)^z P_q(\zeta(2z-k)) dz,$$

где

$$P_q(\zeta(2z-k)) = \sum_{l=0}^q p_l \zeta^l(2z-k).$$

В случае $q = 3$

$$\begin{aligned} \Omega_3(m) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} \Gamma(z)(2m)^z P_3(\zeta(2z-k)) dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} \Gamma(z)(2m)^z (p_0 + p_1 \zeta(2z-k) + p_2 \zeta^2(2z-k) + p_3 \zeta^3(2z-k)) dz \end{aligned}$$

оценка в точке $z = (k+1)/2$ определяется выражением

$$\Omega_3(m) \approx \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)(2m)^{(k+1)/2} \left[p_0 + \frac{1}{2}p_1 + p_2 \left(\frac{1}{4} \left(\psi\left(\frac{k+1}{2}\right) + \ln 2m \right) + \gamma \right) + p_3 \left(\frac{3}{4} \gamma \left(\psi\left(\frac{k+1}{2}\right) + \ln 2m \right) + \frac{3}{2} \gamma^2 \right) \right].$$

Закключение. В работе предложен метод вычисления асимптотического поведения конечных сумм специального вида, основанный на сведении исходной суммы к комплексному интегралу. Ключевой особенностью исследуемого интеграла является наличие в подынтегральном выражении полинома от дзета-функции Римана.

Основные результаты работы включают:

- разработку алгоритма вычисления асимптотического значения суммы через анализ особенностей подынтегральной функции;
- явное получение асимптотических выражений для случая полинома третьей степени от дзета-функции;
- анализ вычетов в особых точках, определяющих главный член асимптотики.

Полученные результаты могут быть применены для анализа сложности алгоритмов, связанных с обходом бинарных деревьев и задачами лучевого поиска, где возникают суммы рассматриваемого типа.

Конкурирующие интересы. У нас нет конфликта интересов в отношении авторства и публикации этой статьи.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Библиографический список

1. Laurinćikas A., Šiaučiūnas D. The mean square of the Hurwitz zeta-function in short intervals // *Axioms*, 2024. vol. 13, no. 8, 510. DOI: <https://doi.org/10.3390/axioms13080510>.
2. Batır N. Choi J. Parameterized finite binomial sums // *Mathematics*, 2024. vol. 12, no. 16, 2450. DOI: <https://doi.org/10.3390/math12162450>.
3. Zhao J. Finite and symmetric Euler sums and finite and symmetric (alternating) multiple T -values // *Axioms*, 2024. vol. 13, no. 4, 210. DOI: <https://doi.org/10.3390/axioms13040210>.
4. Knuth D. E. *The Art of Computer Programming*. vol. 3: Sorting and Searching. Bonn: Addison-Wesley, 1997. 736 pp.
5. Евграфов М. А. *Асимптотические оценки и целые функции*. М.: Наука, 1979. 320 с.
6. Чанга М. Е. Метод комплексного интегрирования / Лекц. курсы НОЦ, Т. 2. М.: МИАН, 2006. С. 3–56. EDN: TSOAMP. DOI: <https://doi.org/10.4213/1kn2>.
7. Соломинов В. М., Романенков А. М. Методы аналитической теории чисел для асимптотического анализа пузырьковой сортировки / *Стратегии развития науки и образования в XXI веке*. Смоленск, 2016. С. 119–128. EDN: XVXECL.

MSC: 30E15, 11N37, 11M06

Asymptotics of sums with Gaussian kernel and multiplicative coefficients

A. S. Zinchenko, A. M. Romanenkov

Moscow Aviation Institute (National Research University),
4, Volokolamskoe Shosse, Moscow, 125993, Russian Federation.

Abstract

This study deals with the asymptotic behavior of finite sums containing a Gaussian function and a multiplicative term. Such sums naturally arise in complexity analysis of binary tree traversal and ray searching algorithms. Using the method of complex integration, we transform the discrete finite sum into an integral along an infinite vertical line in the complex plane. We demonstrate that the integrand contains a positive integer power of the Riemann zeta function. By applying standard residue calculation techniques, we obtain the asymptotic value of this integral.

Keywords: asymptotic analysis, finite sums, Gaussian kernel, multiplicative coefficients, complex integration method, Riemann zeta function.

Received: 6th September, 2024 / Revised: 21st January, 2025 /

Accepted: 21st February, 2025 / First online: 6th May, 2025

Competing interests. We have no conflict of interest regarding the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. All authors participated in the development of the article's concept and in writing the manuscript. The authors bear full responsibility for submitting the final manuscript for publication. The final version of the manuscript was approved by all authors.

Differential Equations and Mathematical Physics

Short Communication

© The Author(s), 2025

© Samara State Technical University, 2025 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Zinchenko A. S., Romanenkov A. M. Asymptotics of sums with Gaussian kernel and multiplicative coefficients, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2025, vol. 29, no. 2, pp. 381–389. EDN: BCHVZM. DOI: [10.14498/vsgtu2113](https://doi.org/10.14498/vsgtu2113) (In Russian).

Authors' Details:

Alexander S. Zinchenko  <https://orcid.org/0000-0001-7971-4572>

Cand. Econom. Sci.; Associate Professor; Dept. of Mathematics; e-mail: zinchenkoas@mai.ru

Alexander M. Romanenkov  <https://orcid.org/0000-0002-0700-8465>

Cand. Techn. Sci., Associate Professor; Associate Professor; Dept. of Mathematics;
e-mail: romanaleks@gmail.com

References

1. Laurinćikas A., Šiaučiūnas D. The mean square of the Hurwitz zeta-function in short intervals, *Axioms*, 2024, vol. 13, no. 8, 510. DOI: <https://doi.org/10.3390/axioms13080510>.
2. Batır N. Choi J. Parameterized finite binomial sums, *Mathematics*, 2024, vol. 12, no. 16, 2450. DOI: <https://doi.org/10.3390/math12162450>.
3. Zhao J. Finite and symmetric Euler sums and finite and symmetric (alternating) multiple T -values, *Axioms*, 2024, vol. 13, no. 4, 210. DOI: <https://doi.org/10.3390/axioms13040210>.
4. Knuth D. E. *The Art of Computer Programming*, vol. 3, Sorting and Searching. Bonn, Addison-Wesley, 1997, 736 pp.
5. Evgrafov M. A. *Asymptotic Estimates and Entire Functions*. Mineola, NY, Dover Publ., 2020, x+181 pp.
6. Changa M. E. Method of complex integration, *Lekts. Kursy NOC*, 2. Moscow, Steklov Math. Institute of RAS, 2006, pp. 3–56 (In Russian). EDN: [TSOANP](https://doi.org/10.4213/1kn2). DOI: <https://doi.org/10.4213/1kn2>.
7. Solominov V. M., Romanenkov A. M. Methods of analytic number theory for asymptotic analysis of bubble sort, In: *Development Strategies of Science and Education in the 21st Century*. Smolensk, 2016, pp. 119–128 (In Russian). EDN: [XVXECL](https://doi.org/10.4213/1kn2).