Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2024. Т. 28, № 3. С. 445–461
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2087
EDN: TYWWKW

УДК 539.3

Волновые числа гармонических плоских волн трансляционных и спинорных перемещений в полуизотропной термоупругой среде

Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН,
Россия, 119526, Москва, просп. Вернадского, 101, корп. 1.

Аннотация

Рассматриваются вопросы распространения плоских гармонических связанных волн температурного инкремента, трансляционных и спинорных перемещений в полуизотропном термоупругом теле. Получены и проанализированы характеристические уравнения для волновых чисел плоских гармонических связанных термоупругих продольных (бикубическое уравнение) и поперечных волн перемещений (уравнение 8-й степени, естественным образом распадающееся на два алгебраических уравнения 4-й степени). Для продольной волны комплексные амплитуды температурного инкремента, трансляционных и спинорных перемещений оказываются также связанными, в отличие от поперечной волны. С помощью системы символьных вычислений `Wolfram Mathematica 13` для волновых чисел поперечных волн получены алгебраические формы, содержащие многозначные комплексные квадратные и кубические радикалы.

Ключевые слова: микрополярная термоупругость, полуизотропное тело, трансляционное перемещение, спинорное перемещение, плоская гармоническая волна, продольная волна, поперечная волна, волновое число, комплексная амплитуда, фазовая плоскость, дисперсионное уравнение.

Получение: 5 марта 2024 г. / Исправление: 15 сентября 2024 г. / Принятие: 27 сентября 2024 г. / Публикация онлайн: 21 октября 2024 г.

Механика деформируемого твердого тела
Научная статья

Образец для цитирования
Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Волновые числа гармонических плоских волн трансляционных и спинорных перемещений в полуизотропной термоупругой среде // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2024. Т. 28, № 3. С. 445–461. EDN: TYWWKW. DOI: 10.14498/vsgtu2087.

Сведения об авторах

Евгений Валерьевич Мурашкин https://orcid.org/0000-0002-3267-4742
кандидат физико-математических наук; старший научный сотрудник; лаб. моделирования в механике деформируемого твердого тела; e-mail: murashkin@ipmnet.ru, evmurashkin@gmail.com

Юрий Николаевич Радаев https://orcid.org/0000-0002-0866-2151
доктор физико-математических наук, профессор; ведущий научный сотрудник; лаб. моделирования в механике деформируемого твердого тела; e-mail: radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com

Введение и предварительные сведения. Несмотря на многочисленные публикации по теории микрополярных тел и по проблемам распространения гармонических волн в микрополярных упругих средах [1–9], некоторые проблемы, существенные как для теории, так и для прикладных вопросов, до сих пор остаются неисследованными. К указанным проблемам следует отнести следующие.

1. Алгебраические уравнения (дисперсионные соотношения) для волновых чисел в подавляющем большинстве публикаций находятся исключительно для продольных волн. Так, в монографии [5] отсутствуют дисперсионные соотношения для поперечных волн в гемитропной среде.
2. Не исследованы вопросы ориентации в пространстве (поляризаций) для плоских гармонических волн, что препятствует применению теории микрополярной термоупругости в экспериментах и не позволяет говорить о завершенности рассматриваемых исследований.
3. Не освещается в должной мере вопрос распространения волны сколь угодно сложной формы с точки зрения принципа суперпозиции Фурье [10] и интеграла Фурье.
4. Для гемитропной среды не рассматриваются вопросы существования зеркальных мод [11]. Отметим, что в изотропном случае они не образуются и не наблюдаются.

Модели термомеханики упругих полуизотропных микрополярных сред основываются на энергетических квадратичных формах микрополярных упругих потенциалов [5, 12–26]. Представление упругих потенциалов, описывающих деформирование сплошных микрополярных сред, в общем случае может быть выполнено только при использовании формализма псевдотензорной алгебры [28–30], однако в итоговом варианте их в конце концов удается привести к абсолютной тензорной форме [27]. Следует отметить три принципиально различных способа построения упругих потенциалов.

– Представление (E) связано с разложением определяющих тензоров/псевдотензоров на симметричную и антисимметричную части и последующим понижением их ранга. Это представление наиболее подходит для конструирования фигур Ная [31–33], позволяющих быстро выяснить количество определяющих констант, установить наличие/отсутствие связей между ними [34–37] и, в конце концов, выделить наборы независимых [37].
– Представление (H) — наиболее естественное с точки зрения тензорной алгебры [41] и наиболее полезное с точки зрения построения новых моделей анизотропных тел [41–44]. Представление (H) позволяет сразу же редуцировать анизотропное тело к полуизотропному, ультрагемитропному, изотропному и ультраизотропному.
– Представление (A) основано на системах неприводимых алгебраических рациональных инвариантов [28, 38].

В настоящей статье в рамках развиваемой авторами модели полуизотропного термоупругого микрополярного тела [18–26] исследуются процессы распространения плоских гармонических связанных волн температурного инкремента, трансляционных и спинорных перемещений в полуизотропном термоупругом теле. Вычисляются волновые числа продольных и поперечных плоских гармонических волн. С помощью системы символьных вычислений `Wolfram Mathematica 13` для волновых чисел поперечных и продольных волн получены алгебраические формы, содержащие многозначные комплексные квадратные и кубические радикалы.

1. Связанные уравнения динамики и уравнение теплопроводности полуизотропной микрополярной термоупругости. Уравнения динамики микрополярного континуума выводятся из вариационного принципа виртуальных перемещений сразу в общей ковариантной форме [13, 24]:

$$
\begin{aligned}
\nabla_i t^{ik} &= -\rho(f^k - \partial_{\cdot\cdot}^2 u^k),\\
\nabla_i \mu^{i\cdot}_{\cdot k} - 2\tau_k &= -\rho(l_k - \mathfrak{I}\partial_{\cdot\cdot}^2 \phi_k).
\end{aligned} \tag{1}
$$

Здесь и далее используются терминология и обозначения, принятые в [13]. Причем $\partial_{\cdot\cdot}^2 = (\partial_{\cdot})^2 = \partial_{\cdot}\partial_{\cdot}$.

Определяющие уравнения полуизотропной микрополярной среды записываются в форме [13, 24]:

$$
\begin{aligned}
t^{(is)} &= 2G\left(\nu(1-2\nu)^{-1}g^{is}g^{lm} + g^{il}g^{sm}\right)\epsilon_{(lm)} + \\
&\quad + GL(c_4 g^{is} g_{lm}\kappa^{(lm)} + c_5\kappa^{(is)}) - 2G\underset{*}{\alpha}\frac{1+\nu}{1-2\nu}g^{is}\theta,\\
\mu_{(is)} &= 2GL^2(c_3 g_{is}g_{lm} + g_{il}g_{sm})\kappa^{(lm)} + \\
&\quad + GL(c_4 g_{is}g^{lm}\epsilon_{(lm)} + c_5\epsilon_{(is)}) - 2GL^2\underset{*}{\beta} g_{is}\theta,\\
\tau_i &= 2Gc_1 g_{is}\varphi^s + \frac{1}{2}GLc_6\kappa_i,\\
\mu^i &= 2GL^2 c_2\ g^{is}\kappa_s + \frac{1}{2}GLc_6\varphi^i,
\end{aligned}
$$

Возвращаясь к записи в терминах асимметричных тензоров силовых и моментных напряжений, получим

$$
\begin{aligned}
t_{is} &= G\Big[(1+c_1)\nabla_i u_s + (1-c_1)\nabla_s u_i + 2\nu(1-2\nu)^{-1}g_{is}\nabla_k u^k - \\
&\quad - 2c_1 e_{isl}\phi^l + Lc_4 g_{is}\nabla_l\phi^l + Lc_5\nabla_{(i}\phi_{s)} - \frac{1}{2}Lc_6\nabla_{[i}\phi_{s]} - 2\underset{*}{\alpha}\frac{1+\nu}{1-2\nu}g_{is}\theta\Big],\\
\mu_{is} &= GL^2\Big[(1+c_2)\nabla_i\phi_s + (1-c_2)\nabla_s\phi_i + 2c_3 g_{is}\nabla_l\phi^l + \\
&\quad + L\Big(c_4 g_{is}\nabla_l u^l + c_5\nabla_{(i}u_{s)} - \frac{1}{2}c_6\nabla_{[i}u_{s]} + \frac{1}{2}c_6\epsilon_{isl}\phi^l\Big) - 2\underset{*}{\beta} g_{is}\theta\Big].
\end{aligned} \tag{2}
$$

Подставив определяющие уравнения (2) в уравнения динамики (1), дополнив их уравнением теплопроводности [18, 21–26], для полуизотропного микрополярного тела получим замкнутую систему дифференциальных уравнений с частными производными:

$$
\begin{gathered}
G[(1+c_1)\nabla^s\nabla_s u^i + (1-c_1+2\nu(1-2\nu)^{-1})\nabla^i\nabla_k u^k + 2c_1\epsilon^{ikl}\nabla_k\phi_l + \\
+ Lc_4'\nabla^i\nabla_k\phi^k + Lc_5'\nabla^k\nabla_k\phi^i] - 2G\underset{*}{\alpha}\frac{1+\nu}{1-2\nu}\nabla_i\theta = \rho(\partial.)^2u^i, \\
GL^2[(1+c_2)\nabla^s\nabla_s\phi_i + (1-c_2+2c_3)\nabla_i\nabla_k\phi^k + \\
+ L^{-1}c_4'\nabla_i\nabla^k u_k + L^{-1}c_5'\nabla^k\nabla_k u_i + L^{-1}c_6'\epsilon_{isl}\nabla^s\phi^l] - \\
- 2Gc_1(2\phi_i - e^2\epsilon_{ikl}g^{ks}\nabla_s u^l) - 2GL^2\underset{*}{\beta}\nabla_i\theta = \rho\Im(\partial.)^2\phi_i, \\
\lambda\nabla_s\nabla^s\theta - C\partial.\theta - 2G\underset{*}{\alpha}\frac{1+\nu}{1-2\nu}\theta_0\nabla_s\partial.u^s - 2GL^2\underset{*}{\beta}\theta_0\nabla_s\partial.\phi^s = 0,
\end{gathered}
\tag{3}
$$

где приняты следующие обозначения:

$$
c_4' = c_4 + \frac{1}{2}c_5 + \frac{1}{4}c_6, \quad c_5' = \frac{1}{2}c_5 - \frac{1}{4}c_6, \quad c_6' = -c_6.
$$

Система дифференциальных уравнений (3) ковариантна и, следовательно, пригодна для любой криволинейной координатной системы в трехмерном пространстве; иногда проще оперировать с векторной формой уравнений:

$$
\begin{cases}
(1+c_1)\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u} + (1-c_1+2\nu(1-2\nu)^{-1})\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} + 2c_1\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\phi} + \\
\qquad + Lc_4'\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\phi} + Lc_5'\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\phi} - 2\underset{*}{\alpha}\frac{1+\nu}{1-2\nu}\boldsymbol{\nabla}\theta = \rho G^{-1}(\partial.)^2\mathbf{u}, \\
(1+c_2)\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\phi} + (1-c_2+2c_3)\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\phi} + L^{-1}c_4'\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} + \\
\qquad + L^{-1}c_5'\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u} + L^{-1}c_6'\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\phi} - 2L^{-2}c_1(2\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u}) - \\
\qquad\qquad - 2\underset{*}{\beta}\boldsymbol{\nabla}\theta = \rho\Im G^{-1}L^{-2}(\partial.)^2\boldsymbol{\phi}, \\
\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta - C\lambda^{-1}\partial.\theta - 2G\lambda^{-1}\underset{*}{\alpha}\frac{1+\nu}{1-2\nu}\boldsymbol{\nabla}\cdot\partial.\mathbf{u} - 2G\lambda^{-1}L^2\underset{*}{\beta}\boldsymbol{\nabla}\cdot\partial.\boldsymbol{\phi} = 0,
\end{cases}
\tag{4}
$$

где выполнена замена $C\theta_0^{-1} \longrightarrow C$, $\lambda\theta_0^{-1} \longrightarrow \lambda$.

Система дифференциальных уравнений в частных производных (4), записанная в терминах вектора трансляционных перемещений $\mathbf{u}$, вектора спинорных перемещений $\boldsymbol{\phi}$ и температурного инкремента θ, служит основой для исследования сильных и слабых разрывов в микрополярной гемитропной среде, а также волновых процессов, которые в рассматриваемом случае характеризуются одновременным распространением прямых и зеркальных мод.

2. Распространение плоских связанных гармонических волн в полуизотропном термоупругом микрополярном теле. Рассмотрим задачу о распространении связанной гармонической плоской волны с частотой ω. В этом случае поля температурного инкремента, трансляционных и спинорных перемещений можно представить в форме

$$
\mathbf{u} = \mathbf{A}\Phi, \quad \boldsymbol{\phi} = \mathbf{S}\Phi, \quad \theta = B\Phi, \quad \Phi = e^{i\,\mathrm{Arg}\,\Phi}, \quad \mathrm{Arg}\,\Phi = \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t, \tag{5}
$$

где $\mathbf{k}$ — волновой вектор; $\mathbf{r}$ — радиус-вектор; ω — циклическая частота гармонической волны; $\mathbf{A}$, $\mathbf{S}$ — векторы комплексных амплитуд трансляционных и спинорных перемещений соответственно; B — (комплексная) амплитуда температурного инкремента; Φ — фазовый множитель; $\operatorname{Arg}\Phi$ — фаза плоской волны. $\operatorname{Arg}\Phi = \mathrm{const}$ — фазовые плоскости. При этом для существования связанной термоупругой волны необходимо выполнение условия

$$B^2 \neq 0.$$

Производные полей температурного инкремента, трансляционных и спинорных перемещений (5) вычисляются согласно соотношениям

$$\begin{array}{ll}
\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u} = -k^2\mathbf{A}\Phi, & \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\phi} = -k^2\mathbf{S}\Phi,\\
\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} = -\mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{A})\Phi, & \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\phi} = -\mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{S})\Phi,\\
\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u} = i\mathbf{k}\times\mathbf{A}\Phi, & \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\phi} = i\mathbf{k}\times\mathbf{S}\Phi,\\
(\partial.)^2\mathbf{u} = -\omega^2\mathbf{A}\Phi, & (\partial.)^2\boldsymbol{\phi} = -\omega^2\mathbf{S}\Phi,\\
\boldsymbol{\nabla}\cdot\partial.\mathbf{u} = \omega\mathbf{k}\cdot\mathbf{A}\Phi, & \boldsymbol{\nabla}\cdot\partial.\boldsymbol{\phi} = \omega\mathbf{k}\cdot\mathbf{S}\Phi,\\
\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta = -k^2B\Phi, & \partial.\theta = -i\omega B\Phi,
\end{array} \tag{6}$$

где $k^2 = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}$. Отметим, что $\mathbf{k} = k\mathbf{s}$, k — комплексное число, $\mathbf{s}$ — вещественный вектор.

Учитывая соотношения (6), после ряда преобразований получим систему уравнений, связывающую волновой вектор $\mathbf{k}$, циклическую частоту ω, векторы поляризации плоской волны $\mathbf{A}$, $\mathbf{S}$ и амплитуду B:

$$\begin{cases}
[\rho G^{-1}\omega^2 - (1+c_1)k^2]\mathbf{A} - (1 - c_1 + 2\nu(1-2\nu)^{-1})\mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{A}) + \\
\qquad + 2c_1 i\mathbf{k}\times\mathbf{S} - Lc_4'\mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{S}) - Lc_5'k^2\mathbf{S} - 2\underset{*}{\alpha}\dfrac{1+\nu}{1-2\nu}i\mathbf{k}B = \mathbf{0},\\
[\rho\Im G^{-1}L^{-2}\omega^2 - 4L^{-2}c_1 - (1+c_2)k^2]\mathbf{S} - (1 - c_2 + 2c_3)\mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{S}) - \\
\qquad - L^{-1}c_4'\mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{A}) - L^{-1}c_5'k^2\mathbf{A} + L^{-1}c_6' i\mathbf{k}\times\mathbf{S} + 2L^{-2}c_1 i\mathbf{k}\times\mathbf{A} - \\
\qquad\qquad - 2\underset{*}{\beta}i\mathbf{k}B = \mathbf{0},\\
(C\lambda^{-1}i\omega - k^2)B - 2G\lambda^{-1}\underset{*}{\alpha}\dfrac{1+\nu}{1-2\nu}\omega(\mathbf{k}\cdot\mathbf{A}) - 2G\lambda^{-1}L^2\underset{*}{\beta}\omega(\mathbf{k}\cdot\mathbf{S}) = 0.
\end{cases} \tag{7}$$

Представим векторы комплексных амплитуд трансляционных $\mathbf{A}$ и спинорных $\mathbf{S}$ перемещений в виде суммы

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_\perp + A_\parallel\mathbf{k}, \quad \mathbf{S} = \mathbf{S}_\perp + S_\parallel\mathbf{k}, \tag{8}$$

где векторы $\mathbf{A}_\perp$ и $\mathbf{S}_\perp$ лежат в плоскости, перпендикулярной волновому вектору, т.е. в фазовой плоскости.

Подставив представление (8) в систему (7), получим

$$
\begin{cases}
[\rho G^{-1}\omega^2 - (1+c_1)k^2](\mathbf{A}_\perp + A_\parallel \mathbf{k}) - (1 - c_1 + 2\nu(1-2\nu)^{-1})A_\parallel k^2\mathbf{k} + \\
\qquad + 2c_1 i\mathbf{k}\times\mathbf{S}_\perp - Lc_4' S_\parallel k^2\mathbf{k} - Lc_5' k^2(\mathbf{S}_\perp + S_\parallel \mathbf{k}) - 2\underset{*}{\alpha}\dfrac{1+\nu}{1-2\nu} i\mathbf{k}B = \mathbf{0}, \\
[\rho\Im G^{-1}L^{-2}\omega^2 - 4L^{-2}c_1 - (1+c_2)k^2](\mathbf{S}_\perp + S_\parallel\mathbf{k}) - (1 - c_2 + 2c_3)S_\parallel k^2\mathbf{k} - \\
\qquad - L^{-1}c_4' A_\parallel k^2\mathbf{k} - L^{-1}c_5' k^2(\mathbf{A}_\perp + A_\parallel\mathbf{k}) + L^{-1}c_6' i\mathbf{k}\times\mathbf{S}_\perp + \\
\qquad\qquad + 2L^{-2}c_1 i\mathbf{k}\times\mathbf{A}_\perp - 2\underset{*}{\beta} i\mathbf{k}B = \mathbf{0}, \\
(C\lambda^{-1}i\omega - k^2)B - 2G\lambda^{-1}\underset{*}{\alpha}\dfrac{1+\nu}{1-2\nu}\omega A_\parallel k^2 - 2G\lambda^{-1}L^2\underset{*}{\beta}\omega S_\parallel k^2 = 0.
\end{cases}
\tag{9}
$$

Система (9) распадается на две независимые системы уравнений.

3. Волновые числа связанной продольной плоской гармонической волны. Проекции уравнений системы (7) на волновой вектор $\mathbf{k}$ представляют собой замкнутую систему трех линейных однородных уравнений:

$$
\begin{cases}
\left(\omega^2 - \dfrac{G(2-2\nu)}{\rho(1-2\nu)}k^2\right)A_\parallel - (c_4' + c_5')\rho^{-1}GLk^2 S_\parallel - 2\underset{*}{\alpha}\dfrac{G(1+\nu)}{\rho(1-2\nu)} iB = 0, \\
[\omega^2 - 4c_1(\rho\Im)^{-1}G - 2(1+c_3)(\rho\Im)^{-1}GL^2k^2]S_\parallel - \\
\qquad - (c_4' + c_5')(\rho\Im)^{-1}GLk^2 A_\parallel - 2\underset{*}{\beta}(\rho\Im)^{-1}GL^2 iB = 0, \\
(C\lambda^{-1}i\omega - k^2)B - 2G\lambda^{-1}\underset{*}{\alpha}\dfrac{1+\nu}{1-2\nu}\omega A_\parallel k^2 - 2G\lambda^{-1}L^2\underset{*}{\beta}\omega S_\parallel k^2 = 0.
\end{cases}
\tag{10}
$$

Для существования нетривиального решения алгебраической системы (10) необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю:

$$
\begin{vmatrix}
\omega^2 - V_\parallel^2 k^2 & -a_1 k^2 & -ia_2 \\
-a_1\Im^{-1}k^2 & \omega^2 - \Omega - (V_\parallel^{\mu\mu})^2 k^2 & -ia_3 \\
-a_4\omega k^2 & -a_5\omega k^2 & ia_6\omega - k^2
\end{vmatrix} = 0,
\tag{11}
$$

где

$$
V_\parallel^2 = \frac{G(2-2\nu)}{\rho(1-2\nu)}, \qquad (V_\parallel^{\mu\mu})^2 = \frac{2GL^2(1+c_3)}{\rho\Im}, \qquad a_2 = 2\underset{*}{\alpha}\frac{G(1+\nu)}{\rho(1-2\nu)},
$$
$$
\rho\Im\Omega = 4c_1 G, \qquad \rho a_1 = (c_4' + c_5')GL, \qquad \rho\Im a_3 = 2\underset{*}{\beta}GL^2,
$$
$$
\lambda a_4 = 2G\underset{*}{\alpha}\frac{1+\nu}{1-2\nu}, \qquad \lambda a_5 = 2GL^2\underset{*}{\beta}, \qquad \lambda a_6 = C.
$$

Алгебраическое уравнение (11) представляет собой бикубическое уравнение относительно подлежащего определению волнового числа:

$$
Q_6 k^6 + Q_4 k^4 + Q_2 k^2 + Q_0 = 0,
\tag{12}
$$

где введены обозначения

$$
\begin{aligned}
Q_6 &= a_1^2\mathfrak{I} - (V_\parallel V_\parallel^{\mu\mu})^2, \qquad\qquad Q_0 = ia_6\omega^3(\omega^2-\Omega),\\
Q_4 &= (V_\parallel^2 + (V_\parallel^{\mu\mu})^2)\omega^2 - V_\parallel^2\Omega + i[a_1(a_3a_4 + a_2a_5\mathfrak{I}) -\\
&\qquad\qquad - (a_6Q_6 + a_3a_5V_\parallel^2 + a_2a_4(V_\parallel^{\mu\mu})^2)]\omega,\\
Q_2 &= \omega^2\Omega - \omega^4 + i[a_2a_4 + a_3a_5 - a_6(V_\parallel^2 + (V_\parallel^{\mu\mu})^2)]\omega^3 +\\
&\qquad\qquad + i(a_6V_\parallel^2 - a_2a_4)\omega\Omega.
\end{aligned}
$$

Воспользовавшись заменой

$$
k^2 = Y - \frac{Q_4}{3Q_6},
$$

бикубическое уравнение (12) можно свести к неполному кубическому уравнению

$$
Y^3 + pY + q = 0, \tag{13}
$$

где коэффициенты уравнения суть

$$
p = \frac{2Q_6Q_2 - Q_4^2}{Q_6^2}, \qquad q = \frac{2Q_4^3 - 9Q_6Q_4Q_2 + 27Q_6^2Q_0}{27Q_6^3}.
$$

Уравнение (13) не имеет вещественных корней, т.е. $\operatorname{Im} k \neq 0$. Иначе продольная волна оказалась бы незатухающей.

Решение неполного кубического уравнения (13) можно найти согласно формулам Кардано [39, 40]. Приведем указанное решение в канонической алгебраической форме

$$
Y_1 = a + b, \quad Y_{2,3} = -\frac{1}{2}(a+b) \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}(a-b), \tag{14}
$$

где

$$
\begin{aligned}
a &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\mathfrak{D}_1}}, \quad b = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\mathfrak{D}_1}}, \quad \mathfrak{D}_1 = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27},\\
\operatorname{Re}\mathfrak{D}_1 &= \frac{1}{4}(\operatorname{Re} q)^2 - \frac{1}{4}(\operatorname{Im} q)^2 + \frac{1}{27}(\operatorname{Re} p)^3 - \frac{1}{9}(\operatorname{Re} p)(\operatorname{Im} p)^2,\\
\operatorname{Im}\mathfrak{D}_1 &= \frac{1}{2}(\operatorname{Re} q)(\operatorname{Im} q) + \frac{1}{9}(\operatorname{Re} p)^2(\operatorname{Im} p) - \frac{1}{27}(\operatorname{Im} p)^3.
\end{aligned}
$$

Достаточно выбрать одно из значений квадратного корня $\sqrt{\mathfrak{D}_1}$. Воспользуемся далее известной формулой для нахождения квадратного корня из комплекснозначного выражения $p = \operatorname{Re} p + i\operatorname{Im} p$. Положив $\sqrt{p} = z = \operatorname{Re} z + i\operatorname{Im} z$, имеем ровно два значения для $\sqrt{p}$, которые вычисляются согласно формулам

$$
\sqrt{2}\operatorname{Re} z = \pm\sqrt{\operatorname{Re} p + \sqrt{(\operatorname{Re} p)^2 + (\operatorname{Im} p)^2}}, \qquad \operatorname{Im} z = \frac{\operatorname{Im} p}{2\operatorname{Re} z}.
$$

Находим также

$$\sqrt{2}\mathrm{Re}\sqrt{\mathfrak{D}_1} = \sqrt{\mathrm{Re}\mathfrak{D}_1 + \sqrt{(\mathrm{Re}\mathfrak{D}_1)^2 + (\mathrm{Im}\mathfrak{D}_1)^2}},$$
$$\mathrm{Im}\sqrt{\mathfrak{D}_1} = \frac{\mathrm{Im}\mathfrak{D}_1}{2\mathrm{Re}\sqrt{\mathfrak{D}_1}}.$$

Применяя формулы (14), для каждого из трех значений величины a необходимо подбирать такое значение b, для которого выполняется условие

$$ab = -p/3.$$

Следуя указанной схеме, получаем все три комплексных корня неполного кубического уравнения (13).

Остается разрешить использованную выше подстановку относительно волнового числа и получить окончательные формулы:

$$\begin{gathered} k_{1,2,3} = \sqrt{Y_{1,2,3} - \frac{Q_4}{3Q_6}}, \\ k_4 = -k_1, \qquad k_5 = -k_2, \qquad k_6 = -k_3. \end{gathered} \tag{15}$$

Значения волновых чисел (15), полученные при исследовании бикубического (12) уравнения, можно впоследствии использовать при отделении однозначных ветвей многозначных квадратных и кубических радикалов на комплексной плоскости $k = \mathrm{Re}k + i\,\mathrm{Im}k$ $(\mathrm{Re}\,k > 0)$.

4. Волновые числа поперечной плоской атермической волны. Рассмотрим проекции системы линейных уравнений (9) в фазовой плоскости. Введем в рассмотрение два единичных взаимно ортогональных вектора $\boldsymbol{\imath}$ и $\boldsymbol{\jmath}$, лежащих в фазовой плоскости. Тогда векторы $\mathbf{A}_\perp$ и $\mathbf{S}_\perp$ можно представить в форме

$$\mathbf{A}_\perp = \underset{1}{A}_\perp \boldsymbol{\imath} + \underset{2}{A}_\perp \boldsymbol{\jmath}, \quad \mathbf{S}_\perp = \underset{1}{S}_\perp \boldsymbol{\imath} + \underset{2}{S}_\perp \boldsymbol{\jmath}.$$

Проекции системы линейных уравнений (9) на орты **1** и **2** примут вид

$$\begin{gathered}
[\omega^2 - (1 + c_1)G\rho^{-1}k^2]\underset{1}{A}_\perp - Lc_5' G\rho^{-1}k^2 \underset{1}{S}_\perp - 2ic_1 G\rho^{-1}k\underset{2}{S}_\perp = 0, \\
[\omega^2 - (1 + c_1)\rho G^{-1}k^2]\underset{2}{A}_\perp + 2ic_1\rho G^{-1}k\underset{1}{S}_\perp - Lc_5'\rho G^{-1}k^2\underset{2}{S}_\perp = 0, \\
[\omega^2 - 4c_1(\rho\mathfrak{J})^{-1}G - (1 + c_2)L^2(\rho\mathfrak{J})^{-1}Gk^2]\underset{1}{S}_\perp - \\
- Lc_5'(\rho\mathfrak{J})^{-1}Gk^2\underset{1}{A}_\perp - iLc_6'(\rho\mathfrak{J})^{-1}Gk\underset{2}{S}_\perp - 2ic_1(\rho\mathfrak{J})^{-1}Gk\underset{2}{A}_\perp = 0, \\
[\omega^2 - 4c_1(\rho\mathfrak{J})^{-1}G - (1 + c_2)L^2(\rho\mathfrak{J})^{-1}Gk^2]\underset{2}{S}_\perp - \\
- Lc_5'(\rho\mathfrak{J})^{-1}Gk^2\underset{2}{A}_\perp + iLc_6'(\rho\mathfrak{J})^{-1}Gk\underset{1}{S}_\perp + 2ic_1(\rho\mathfrak{J})^{-1}Gk\underset{1}{A}_\perp = 0.
\end{gathered} \tag{16}$$

Для существования нетривиального решения системы линейных однородных уравнений (16) необходимо и достаточно, чтобы нижеследующий определитель был равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \omega^2-(V_\perp^\mu)^2k^2 & 0 & -a_7k^2 & -ia_8k \\ 0 & \omega^2-(V_\perp^\mu)^2k^2 & ia_8k & -a_7k^2 \\ -a_7k^2 & -ia_8k & \omega^2\mathfrak{I}-4\Omega_\perp-(V_\perp^{\mu\mu})^2\mathfrak{I}k^2 & -ia_9k \\ ia_8k & -a_7k^2 & ia_9k & \omega^2\mathfrak{I}-4\Omega-(V_\perp^{\mu\mu})^2\mathfrak{I}k^2 \end{vmatrix}=0, \tag{17}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} &(V_\perp^\mu)^2=\frac{G(1+c_1)}{\rho}, \quad (V_\perp^{\mu\mu})^2=\frac{G(1+c_2)}{\rho\mathfrak{I}}, \quad 4\Omega_\perp=\mathfrak{I}\Omega, \\ &a_7\rho=Lc_5'G, \qquad a_8\rho\mathfrak{I}=2c_1G, \qquad a_9\rho\mathfrak{I}=Lc_6'G. \end{aligned}$$

Волновые числа поперечных волн вещественны, что следует из физики плоских поперечных волн. Указанное обстоятельство связано с атермичностью поперечной волны, т.е. с отсутствием потери энергии. В этом случае матрица (17) симметрична комплексно-сопряженной относительно главной диагонали.

Алгебраическое уравнение (17) представляет собой уравнение относительно квадрата волнового числа:

$$\begin{aligned} P_4^2k^8+(2P_2P_4-P_3^2)k^6+(P_2^2-2P_1P_3+2P_0P_4)k^4+ \\ +(2P_0P_2-P_1^2)k^2+P_0^2=0, \end{aligned} \tag{18}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} P_0 &=\omega^2(\mathfrak{I}\omega^2-4\Omega_\perp), \qquad && P_1=a_9\Omega_\perp^2, \\ P_4 &=a_7^2-\mathfrak{I}(V_\perp^\mu)^2(V_\perp^{\mu\mu})^2, && P_3=2a_7a_8-a_9(V_\perp^\mu)^2, \\ P_2 &=a_8^2+\mathfrak{I}(V_\perp^\mu)^2\Omega_\perp^2+\mathfrak{I}(V_\perp^{\mu\mu})^2\Omega_\perp^2-4(V_\perp^\mu)^2\Omega_\perp. \end{aligned}$$

Заметим, что уравнение (18) можно представить в виде произведения следующих двух уравнений:

$$(P_4k^4+P_3k^3+P_2k^2+P_1k+P_0)(P_4k^4-P_3k^3+P_2k^2-P_1k+P_0)=0.$$

Корни уравнения (18) вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} &k_s=\pm\frac{P_3}{4P_4}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\mathfrak{P}_5+\mathfrak{P}_4}\pm\frac{1}{2}\sqrt{2\mathfrak{P}_5-\mathfrak{P}_4-\mathfrak{P}_6\Big(\mathfrak{P}_5+\mathfrak{P}_4\Big)^{-1/2}}, \\ &s=1,\ldots,8. \end{aligned} \tag{19}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} &\mathfrak{P}_1=P_2^2-3P_1P_3+12P_0P_4, \\ &\mathfrak{P}_2=2P_2^3-9P_1P_2P_3+27P_0P_3^2+27P_1^2P_4-72P_0P_2P_4, \\ &\mathfrak{P}_3=\sqrt[3]{\mathfrak{P}_2+\sqrt{\mathfrak{P}_2{}^2-4\mathfrak{P}_1{}^3}}, \qquad \mathfrak{P}_4=\frac{\sqrt[3]{2}\mathfrak{P}_1}{3P_4\mathfrak{P}_3}+\frac{\mathfrak{P}_3}{3\sqrt[3]{2}P_4}, \\ &\mathfrak{P}_5=\frac{P_3^2}{4P_4^2}-\frac{2P_2}{3P_4}, \qquad \mathfrak{P}_6=\frac{4P_2P_3}{P_4^2}-\frac{P_3^3}{4P_4^3}-\frac{8P_1}{4P_4}. \end{aligned}$$

В формулах (19) знаки “±” выбираются независимо друг от друга. Формулы (19) позволяют определить вещественные волновые числа поперечной гармонической волны трансляционных и спинорных перемещений.

Заключение. В настоящей работе рассматриваются вопросы распространения плоских гармонических связанных волн температурного инкремента, трансляционных и спинорных перемещений в полуизотропном термоупругом теле.

1. Исследована связанная система дифференциальных уравнений с частными производными, записанная в терминах вектора трансляционных перемещений, вектора спинорных перемещений и температурного инкремента для микрополярного полуизотропного тела.
2. Получены алгебраические уравнения для волновых чисел продольных (бикубическое уравнение) и поперечных связанных волн (уравнение восьмой степени, распадающееся на два уравнения четвертой степени).
3. Волновые числа продольных гармонических волн оказываются комплексными, что соответствует связанности комплексных амплитуд температурного инкремента, трансляционных и спинорных перемещений.
4. Волновые числа поперечных гармонических волн вещественны, что обусловлено атермичностью поперечной волны.
5. Остаются неисследованными вопросы пространственной поляризации гармонических волн. В отличие от изотропного случая векторы поляризации не ортогональны между собой.

Конкурирующие интересы. У нас нет конфликта интересов в отношении авторства и публикации этой статьи.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23–21–00262, https://rscf.ru/project/23-21-00262/.

Библиографический список

1. Smith A. C. Elastic wave propagation in noncentrosymmetric, isotropic media: dispersion and field equations // *Int. J. Eng. Sci.*, 1967. vol. 5, no. 10. pp. 741–746. DOI: https://doi.org/10.1016/0020-7225(67)90019-5.
2. Willson A. J. The micropolar elastic vibrations of a circular cylinder // *Int. J. Eng. Sci.*, 1972. vol. 10, no. 1. pp. 17–22. DOI: https://doi.org/10.1016/0020-7225(72)90071-7.
3. Achenbach J. D. *Wave Propagation in Elastic Solids* / North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics. vol. 16. Amsterdam: North-Holland Publ., 1973. xiv+425 pp.
4. Maugin G. A. Acceleration waves in simple and linear viscoelastic micropolar materials // *Int. J. Eng. Sci.*, 1974. vol. 12, no. 2. pp. 143–157. DOI: https://doi.org/10.1016/0020-7225(74)90013-5.
5. Nowacki W. *Theory of Asymmetric Elasticity*. Oxford: Pergamon Press, 1986. viii+383 pp.
6. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. О сильных и слабых разрывах связанного термомеханического поля в термоупругих микрополярных континуумах второго типа // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2014. № 4. С. 85–97. EDN: TTMIUL. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1331.
7. Ковалев В. А., Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Математическая теория связанных плоских гармонических термоупругих волн в микрополярных континуумах пер-

вого типа // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика*, 2014. Т. 14, № 1. С. 77–87. EDN: SCSSSZ. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2014-14-1-77-87.

8. Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On weak discontinuities and jump equations on wave surfaces in micropolar thermoelastic continua // *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, 2015. vol. 15, no. 1. pp. 79–89. EDN: TMMCMH. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-1-79-89.
9. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Термические и атермические плоские гармонические волны в ацентрическом изотропном теле // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2023. № 2. С. 99–107. EDN: JKFXAY. DOI: https://doi.org/10.37972/chgpu.2023.56.2.010.
10. Положий Г. Н. *Уравнения математической физики.* Москва: Высш. шк., 1964. 560 с.
11. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Прямые, инверсные и зеркальные волновые моды связанных волн перемещений и микровращений в гемитропных микрополярных средах // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2021. № 2. С. 115–127. EDN: MGCJDN. DOI: https://doi.org/10.37972/chgpu.2021.48.2.014.
12. Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua / *Applied Mechanics*; eds. H. Görtler. Berlin, Heidelberg: Springer, 1966. pp. 153–158. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-29364-5_16.
13. Радаев Ю. Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2018. Т. 22, № 3. С. 504–517. EDN: YOYJQD. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1635.
14. Радаев Ю. Н., Мурашкин Е. В. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // *Проблемы прочности и пластичности*, 2020. Т. 82, № 4. С. 399–412. EDN: TODIFV. DOI: https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412.
15. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Приведение естественных форм гемитропных энергетических потенциалов к конвенциональным // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2022. № 4. С. 108–115. EDN: DTZTJY. DOI: https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.54.4.009.
16. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. О двух основных естественных формах потенциала асимметричных тензоров силовых и моментных напряжений в механике гемитропных тел // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2022. № 3. С. 86–100. EDN: YOEHQV. DOI: https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.53.3.010.
17. Мурашкин Е. В. О связи микрополярных определяющих параметров термодинамических потенциалов состояния // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2022. № 1. С. 110–121. EDN: JXXIAX. DOI: https://doi.org/10.37972/chgpu.2023.55.1.012.
18. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Теплопроводность микрополярных тел, чувствительных к зеркальным отражениям пространства // *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки*, 2023. Т. 165, № 4. С. 389–403. EDN: HTQAHJ. DOI: https://doi.org/10.26907/2541-7746.2023.4.389-403.
19. Murashkin E. V., Radayev Y. N. A negative weight pseudotensor formulation of coupled hemitropic thermoelasticity // *Lobachevskii J. Math.*, 2023. vol. 44, no. 6. pp. 2440–2449. EDN: PINYDI. DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080223060392.
20. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Theory of Poisson's ratio for a thermoelastic micropolar acentric isotropic solid // *Lobachevskii J. Math.*, 2024. vol. 45, no. 5. pp. 2378–2390. EDN: ASGCQB. DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080224602480.
21. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Связанная термоупругость гемитропных сред. Псевдотензорная формулировка // *Изв. РАН. МТТ*, 2023. № 3. С. 163–176. EDN: JMQVBJ. DOI: https://doi.org/10.31857/S0572329922600876.
22. Murashkin E. V., Radayev Y. N. Heat transfer in anisotropic micropolar solids // *Mech. Solids*, 2023. vol. 58, no. 9. pp. 3111–3119. EDN: WBUGBA. DOI: https://doi.org/10.3103/S0025654423700255.

23. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. К поливариантности основных уравнений связанной термоупругости микрополярного тела // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2023. №3. С. 112–128. EDN: RQUKBG. DOI: https://doi.org/10.37972/chgpu.2023.57.3.010.
24. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Мультивесовая термомеханика гемитропных микрополярных тел // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2023. №4. С. 86–120. EDN: RQUKBG. DOI: https://doi.org/10.37972/chgpu.2023.58.4.010.
25. Murashkin E. V., Radayev Y. N. On algebraic triple weights formulation of micropolar thermoelasticity // *Mech. Solids*, 2024. vol. 59, no. 1. pp. 555–580. EDN: GBHEKM. DOI: https://doi.org/10.1134/s0025654424700274.
26. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Термомеханические состояния гиротропных микрополярных тел // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 27, №4. С. 659–678. EDN: CRRHLO. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu2062.
27. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Алгебраический алгоритм систематического приведения одноточечных псевдотензоров к абсолютным тензорам // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2022. №1. С. 17–27. EDN: ZJWFGT. DOI: https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.51.1.002.
28. Gurevich G. B. *Foundations of the Theory of Algebraic Invariants*. Groningen, The Netherlands: P. Noordhoff, 1964. viii+429 pp.
29. Schouten J. A. *Tensor Analysis for Physicist*. Oxford: Clarendon Press, 1951. 434 pp.
30. Synge J. L., Schild A. *Tensor Calculus*. New York: Dover Publ., 1978. xi+324 pp.
31. Nye J. F. *Physical Properties of Crystals. Their Representation by Tensors and Matrices*. Oxford: Clarendon Press, 1957. xv+322 pp.
32. Wooster W. A. *Experimental Crystal Physics*. Oxford: Clarendon Press, 1957. viii+115 pp.
33. Voigt W. *Lehrbuch der Kristallphysik (mit Ausschluß der Kristalloptik)*. Leipzig: B.G. Teubner, 1928. xxvi+978 pp. (In German)
34. Murashkin E. V., Radaev Y. N. Two-dimensional Nye figures for some micropolar elastic solids // *Mech. Solids*, 2023. vol. 58, no. 6. pp. 2254–2268. EDN: AIPHVE. DOI: https://doi.org/10.3103/s0025654423700243.
35. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Двумерные фигуры Ная для гемитропных микрополярных упругих тел // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика*, 2024. Т. 24, №1. С. 109–122. EDN: FKFRHA. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-109-122.
36. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Об одном способе построения фигур Ная в асимметричных теориях демитропной микрополярной упругости // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2023. №3. С. 100–111. EDN: KSSOKR. DOI: https://doi.org/10.37972/chgpu.2023.57.3.009.
37. Krylova E. Yu., Murashkin E. V., Radayev Y. N. The Nye cells and figures for athermic hemitropic, isotropic and ultraisotropic micropolar elastic solids // *Mech. Solids*, 2024. vol. 59, no. 3. pp. 1311–1320. DOI: https://doi.org/10.1134/S0025654424603719.
38. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Об одном обобщении алгебраической теории Гамильтона–Кэли // *Изв. РАН. МТТ*, 2021. №6. С. 130–138. EDN: VGJNSG. DOI: https://doi.org/10.31857/S0572329921060106.
39. Сушкевич А. К. *Основы высшей алгебры*. М.: ОНТИ, 1937. 476 с.
40. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. *Волновые задачи теории поля и термомеханика*. Саратов: Сарат. ун-т, 2010. 328 с.
41. Jeffreys H. *Cartesian Tensors*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1931. vii+93 pp.
42. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Элементы теории // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2022. №2. С. 106–115. EDN: FQVGRK. DOI: https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.52.2.012.

43. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Приложения к механике континуума // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2022. № 2. С. 118–127. EDN: ESTJSA. DOI: https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.52.2.013.
44. Радаев Ю. Н. Тензоры с постоянными компонентами в определяющих уравнениях гемитропного микрополярного тела // *Изв. РАН. МТТ*, 2023. № 5. С. 98–110. EDN: PHNOCG. DOI: https://doi.org/10.31857/S057232992370006X.
45. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a micropolar theory of growing solids // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020. vol. 24, no. 3. pp. 424–444. EDN: TYGBER. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1792.
46. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. К теории линейных гемитропных микрополярных сред // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2020. № 4. С. 16–24. EDN: IZKTBQ. DOI: https://doi.org/10.37972/chgpu.2020.89.81.031.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 3, pp. 445–461
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2087

MSC: 15A72, 53A45, 74D05

Wave numbers of harmonic plane waves of translational and spinor displacements in a semiisotropic thermoelastic solid

E. V. Murashkin, Yu. N. Radayev

Ishlinsky Institite for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences,
101–1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.

Abstract

In present paper the propagation of plane harmonic coupled waves of temperature increment, translational and spinor displacements in a semiisotropic thermoelastic solid is discussed. Characteristic equations for the wave numbers of plane harmonic coupled thermoelastic longitudinal (bicubic equation) and transverse waves (biquartic equation that naturally splits into two quartic algebraic equations) are obtained and analyzed. For a longitudinal wave, the complex amplitudes of the temperature increment, translational and spinor displacements are also coupled, contrary to a transverse wave. Algebraic forms containing multivalued complex square and cubic radicals for the wave numbers of transverse waves are derived by using the `Wolfram Mathematica 13` symbolic computing system.

Keywords: micropolar thermoelasticity, semiisotropic solid, translational displacement, spinor displacement, plane harmonic wave, longitudinal wave, transverse wave, wave number, complex amplitude, phase plane, dispersion equation.

Received: 5th March, 2024 / Revised: 15th September, 2024 /
Accepted: 27th September, 2024 / First online: 21st October, 2024

Competing interests. We have no conflict of interest regarding the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. All authors participated in the development of the article's concept and in writing the manuscript. The authors bear full

Mechanics of Solids
Research Article

Please cite this article in press as:
M u r a s h k i n E. V., R a d a y e v Yu. N. Wave numbers of harmonic plane waves of translational and spinor displacements in a semiisotropic thermoelastic solid, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 3, pp. 445–461. EDN: TYWWKW. DOI: 10.14498/vsgtu2087 (In Russian).

Authors' Details:

Evgenii V. Murashkin https://orcid.org/0000-0002-3267-4742
Cand. Phys. & Math. Sci., PhD, MD; Senior Researcher; Lab. of Modeling in Solid Mechanics; e-mail: murashkin@ipmnet.ru, evmurashkin@gmail.com

Yuri N. Radayev https://orcid.org/0000-0002-0866-2151
D.Sc. (Phys. & Math. Sci.), Ph.D., M.Sc., Professor; Leading Researcher; Lab. of Modeling in Solid Mechanics; e-mail: radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com

responsibility for submitting the final manuscript for publication. The final version of the manuscript was approved by all authors.

Funding. The research was funded by the Russian Science Foundation (project no. 23–21–00262), https://rscf.ru/en/project/23-21-00262/.

References

1. Smith A. C. Elastic wave propagation in noncentrosymmetric, isotropic media: dispersion and field equations, *Int. J. Eng. Sci.*, 1967, vol. 5, no. 10, pp. 741–746. DOI: https://doi.org/10.1016/0020-7225(67)90019-5.
2. Willson A. J. The micropolar elastic vibrations of a circular cylinder, *Int. J. Eng. Sci.*, 1972, vol. 10, no. 1, pp. 17–22. DOI: https://doi.org/10.1016/0020-7225(72)90071-7.
3. Achenbach J. D. *Wave Propagation in Elastic Solids*, North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics, vol. 16. Amsterdam, North-Holland Publ., 1973, xiv+425 pp.
4. Maugin G. A. Acceleration waves in simple and linear viscoelastic micropolar materials, *Int. J. Eng. Sci.*, 1974, vol. 12, no. 2, pp. 143–157. DOI: https://doi.org/10.1016/0020-7225(74)90013-5.
5. Nowacki W. *Theory of Asymmetric Elasticity*. Oxford, Pergamon Press, 1986, viii+383 pp.
6. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On strong and weak discontinuities of the coupled thermomechanical field in micropolar thermoelastic type-II continua, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2014, no. 4, pp. 85–97 (In Russian). EDN: TTMIUL. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1331.
7. Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Yu. N. A mathematical theory of plane harmonic coupled thermoelastic waves in type-I micropolar continua, *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, 2014, vol. 14, no. 1, pp. 77–87 (In Russian). EDN: SCSSSZ. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2014-14-1-77-87.
8. Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On weak discontinuities and jump equations on wave surfaces in micropolar thermoelastic continua, *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, 2015, vol. 15, no. 1, pp. 79–89. EDN: TMMCMH. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-1-79-89.
9. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Thermic and athermic plane harmonic waves in acentric isotropic solid, *Vestn. I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical Univ. Ser. Mechanics of a Limit State*, 2023, no. 2, pp. 99–107 (In Russian). EDN: JKFXAY. DOI: https://doi.org/10.37972/chgpu.2023.56.2.010.
10. Polozhy G. N. *Uravneniia matematicheskoi fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Vyssh. Shk., 1964, 560 pp. (In Russian)
11. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Direct, inverse and mirror wave modes of coupled displacements and microrotations monochromatic plane waves in hemitropic micropolar media, *Vestn. I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical Univ. Ser. Mechanics of a Limit State*, 2021, no. 2, pp. 115–127 (In Russian). EDN: MGCJDN. DOI: https://doi.org/10.37972/chgpu.2021.48.2.014.
12. Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua, In: *Applied Mechanics*; eds. H. Görtler. Berlin, Heidelberg, Springer, 1966, pp. 153–158. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-29364-5_16.
13. Radayev Yu. N. The Lagrange multipliers method in covariant formulations of micropolar continuum mechanics theories, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 3, pp. 504–517 (In Russian). EDN: YOYJQD. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1635.
14. Radayev Yu. N., Murashkin E. V. Pseudotensor formulation of the mechanics of hemitropic micropolar media, *Problems of Strength and Plasticity*, 2020, vol. 82, no. 4, pp. 399–412 (In Russian). EDN: TODIFV. DOI: https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412.
15. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Reducing natural forms of hemitropic energy potentials to conventional ones, *Vestn. I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical Univ. Ser. Mechanics of*

a Limit State, 2022, no. 4, pp. 108–115 (In Russian). EDN: DTZTJY. DOI: https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.54.4.009.

16. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On two base natural forms of asymmetric force and couple stress tensors of potential in mechanics of hemitropic solids, *Vestn. I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical Univ. Ser. Mechanics of a Limit State*, 2022, no. 3, pp. 86–100 (In Russian). EDN: YOEHQV. DOI: https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.53.3.010.
17. Murashkin E. V. On the relationship of micropolar constitutive parameters of thermodynamic state potentials, *Vestn. I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical Univ. Ser. Mechanics of a Limit State*, 2022, no. 1, pp. 110–121 (In Russian). EDN: JXXIAX. DOI: https://doi.org/10.37972/chgpu.2023.55.1.012.
18. Murashkin E. V., Radayev Y. N. Heat conduction of micropolar solids sensitive to mirror reflections of three-dimensional space, *Uchen. Zap. Kazan. Univ. Ser. Fiz.-Matem. Nauki*, 2023, vol. 165, no. 4, pp. 389–403 (In Russian). EDN: HTQAHJ. DOI: https://doi.org/10.26907/2541-7746.2023.4.389-403.
19. Murashkin E. V., Radayev Y. N. A negative weight pseudotensor formulation of coupled hemitropic thermoelasticity, *Lobachevskii J. Math.*, 2023, vol. 44, no. 6, pp. 2440–2449. EDN: PINYDI. DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080223060392.
20. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Theory of Poisson's ratio for a thermoelastic micropolar acentric isotropic solid, *Lobachevskii J. Math.*, 2024, vol. 45, no. 5, pp. 2378–2390. EDN: ASGCQB. DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080224602480.
21. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Coupled thermoelasticity of hemitropic media. Pseudotensor formulation, *Mech. Solids*, 2023, vol. 58, no. 3, pp. 802–813. EDN: CISJLW. DOI: https://doi.org/10.3103/s0025654423700127.
22. Murashkin E. V., Radayev Y. N. Heat transfer in anisotropic micropolar solids, *Mech. Solids*, 2023, vol. 58, no. 9, pp. 3111–3119. EDN: WBUGBA. DOI: https://doi.org/10.3103/S0025654423700255.
23. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On the polyvariance of the base equations of coupled micropolar thermoelasticity, *Vestn. I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical Univ. Ser. Mechanics of a Limit State*, 2023, no. 3, pp. 112–128 (In Russian). EDN: RQUKBG. DOI: https://doi.org/10.37972/chgpu.2023.57.3.010.
24. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On the polyvariance of the base equations of coupled micropolar thermoelasticity, *Vestn. I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical Univ. Ser. Mechanics of a Limit State*, 2023, no. 4, pp. 86–120 (In Russian). EDN: RQUKBG. DOI: https://doi.org/10.37972/chgpu.2023.58.4.010.
25. Murashkin E. V., Radayev Y. N. On algebraic triple weights formulation of micropolar thermoelasticity, *Mech. Solids*, 2024, vol. 59, no. 1, pp. 555–580. EDN: GBHEKM. DOI: https://doi.org/10.1134/s0025654424700274.
26. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Thermomechanical states of gyrotropic micropolar solids, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 4, pp. 659–678 (In Russian). EDN: CRRHLO. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu2062.
27. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Algebraic algorithm for the systematic reduction of one-point pseudotensors to absolute tensors, *Vestn. I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical Univ. Ser. Mechanics of a Limit State*, 2022, №1, C. 17–27 (In Russian). EDN: ZJWFGT. DOI: https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.51.1.002.
28. Gurevich G. B. *Foundations of the Theory of Algebraic Invariants*. Groningen, The Netherlands, P. Noordhoff, 1964, viii+429 pp.
29. Schouten J. A. *Tensor Analysis for Physicist*. Oxford, Clarendon Press, 1951, 434 pp.
30. Synge J. L., Schild A. *Tensor Calculus*. New York, Dover Publ., 1978, xi+324 pp.
31. Nye J. F. *Physical Properties of Crystals. Their Representation by Tensors and Matrices*. Oxford, Clarendon Press, 1957, xv+322 pp.
32. Wooster W. A. *Experimental Crystal Physics*. Oxford, Clarendon Press, 1957, viii+115 pp.

33. Voigt W. *Lehrbuch der Kristallphysik (mit Ausschluß der Kristalloptik).* Leipzig, B.G. Teubner, 1928, xxvi+978 pp. (In German)
34. Murashkin E. V., Radaev Y. N. Two-dimensional Nye figures for some micropolar elastic solids, *Mech. Solids*, 2023, vol. 58, no. 6, pp. 2254–2268. EDN: AIPHVE. DOI: https://doi.org/10.3103/s0025654423700243.
35. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Two-dimensional Nye figures for hemitropic micropolar elastic solids, *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, 2024, vol. 24, no. 1, pp. 109–122 (In Russian). EDN: FKFRHA. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-109-122.
36. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a method of constructing Nye figures for asymmetric theories of micropolar elasticity, *Vestn. I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical Univ. Ser. Mechanics of a Limit State*, 2023, no. 3, pp. 100–111 (In Russian). EDN: KSSOKR. DOI: https://doi.org/10.37972/chgpu.2023.57.3.009.
37. Krylova E. Yu., Murashkin E. V., Radayev Y. N. The Nye cells and figures for athermic hemitropic, isotropic and ultraisotropic micropolar elastic solids, *Mech. Solids*, 2024, vol. 59, no. 3, pp. 1311–1320. DOI: https://doi.org/10.1134/S0025654424603719.
38. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Generalization of the algebraic Hamilton–Cayley theory, *Mech. Solids*, 2021, vol. 56, no. 6, pp. 996–1003. EDN: KNBMUV. DOI: https://doi.org/10.3103/S0025654421060145.
39. Sushkevich A. K. *Osnovy vysshei algebry* [Fundamentals of Higher Algebra]. Moscow, ONTI, 1937, 476 pp. (In Russian)
40. Kovalev V. A., Radaev Y. N. *Volnovye zadachi teorii polia i termomekhanika* [Wave Problems of Field Theory and Thermomechanics]. Saratov, Saratov Univ., 2010, 328 pp. (In Russian)
41. Jeffreys H. *Cartesian Tensors.* Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1931, vii+93 pp.
42. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Covariantly constant tensors in Euclidean spaces. Elements of the theory, *Vestn. I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical Univ. Ser. Mechanics of a Limit State*, 2022, no. 2, pp. 106–115 (In Russian). EDN: FQVGRK. DOI: https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.52.2.012.
43. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Covariantly constant tensors in Euclidean spaces. Applications to continuum mechanics, *Vestn. I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical Univ. Ser. Mechanics of a Limit State*, 2022, no. 2, pp. 118–127 (In Russian). EDN: ESTJSA. DOI: https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.52.2.013.
44. Radayev Yu. N. Tensors with constant components in the constitutive equations of hemitropic micropolar solids, *Mech. Solids*, 2023, vol. 58, no. 5, pp. 1517–1527. EDN: SQQPGJ. DOI: https://doi.org/10.3103/S0025654423700206.
45. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a micropolar theory of growing solids, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 3, pp. 424–444. EDN: TYGBER. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1792.
46. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On the theory of linear hemitropic micropolar media, *Vestn. I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical Univ. Ser. Mechanics of a Limit State*, 2020, no. 4, pp. 16–24 (In Russian). EDN: IZKTBQ. DOI: https://doi.org/10.37972/chgpu.2020.89.81.031.