



УДК 539.376:519.651

Численный метод структурной и параметрической идентификации математической модели неполной обратимости деформации ползучести

В. П. Радченко, В. Е. Зотеев, Е. А. Афанасьева

Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

Разработан новый численный метод параметрической и структурной идентификации физически нелинейной теории обратимости деформации ползучести, справедливой в пределах первой и второй стадий. В качестве базовой экспериментальной информации используется серия кривых стационарной ползучести. Задача сведена к нелинейному регрессионному анализу определения оценок случайных параметров на основе временных рядов последовательности результатов наблюдений деформации ползучести при различных постоянных напряжениях с использованием разностных уравнений. Полученные соотношения между коэффициентами разностного уравнения и параметрами нелинейной регрессии позволяют свести задачу к оценке коэффициентов линейно-параметрической дискретной модели. Разработаны соответствующие итерационные алгоритмы уточнения оценок параметров с любой заданной точностью. Выполнена параметрическая и структурная идентификация теории неполной обратимости деформации ползучести для стали ЭИ736 (500 °С) и сплавов ЭИ437А (700 °С), ВЖ98 (900 °С), ЭП693 (700 °С). Приводятся численные значения оценок параметров моделей для этих сплавов. Выполнена проверка адекватности построенных математических моделей, наблюдается соответствие расчетных и экспериментальных данных. Экспериментальные данные для всех рассмотренных материалов принадлежат соответствующим расчетным доверительным ин-

Механика деформируемого твердого тела

Научная статья

© Коллектив авторов, 2024

© СамГТУ, 2024 (составление, дизайн, макет)

  Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International \(https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru)

Образец для цитирования

Радченко В. П., Зотеев В. Е., Афанасьева Е. А. Численный метод структурной и параметрической идентификации математической модели неполной обратимости деформации ползучести // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2024. Т. 28, № 1. С. 73–95. EDN: KRTZPA. DOI: 10.14498/vsgtu2071.

Сведения об авторах

Владимир Павлович Радченко  <https://orcid.org/0000-0003-4168-9660>

доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой; каф. прикладной математики и информатики; e-mail: radchenko.vp@samgtu.ru

Владимир Евгеньевич Зотеев  <https://orcid.org/0000-0001-7114-4894>

доктор технических наук, доцент; профессор; каф. прикладной математики и информатики; e-mail: zoteev.ve@samgtu.ru

Елена Андреевна Афанасьева  <https://orcid.org/0000-0001-7815-2723>

аспирант; каф. прикладной математики и информатики; e-mail: afanasieva.ea@samgtu.ru

тервалам для деформации ползучести, что свидетельствует о достоверности полученных оценок параметров моделей.

Ключевые слова: ползучесть, нелинейная регрессионная модель, идентификация, разностные уравнения, среднеквадратичные оценки параметров.

Получение: 15 декабря 2023 г. / Исправление: 13 февраля 2024 г. /
Принятие: 27 февраля 2024 г. / Публикация онлайн: 28 мая 2024 г.

Введение. Во многих работах, например [1–4], отмечалось существенное влияние случайных микронеоднородных возмущений механических характеристик материала на поля напряжений и деформаций и, как следствие этого, — построение соответствующих стохастических реологических моделей для расчетов на прочность. Особую актуальность эта проблема приобретает при построении моделей ползучести, где разброс реологической деформации составляет до 50–70 %, и такие результаты приходится рассматривать как приемлемые [1, 4–6]. Как правило, построение стохастических уравнений ползучести базируется на обобщении соответствующих детерминированных соотношений, в которых часть параметров и функций полагаются случайными, а остальные — детерминированными [5–9]. С использованием стохастических уравнений установившейся ползучести решен ряд краевых задач для элементов конструкций из микронеоднородных материалов [10–15]. Анализ экспериментальных данных по ползучести материалов, представленных в работах [1, 16–22], показывает, что поведение реономных материалов отличается большим разнообразием. Описание всех особенностей их деформирования не укладывается в рамки наиболее употребительных определяющих уравнений на основе теорий упрочнения, течения, старения, кинетических уравнений Ю. Н. Работнова и других [23]. Основной недостаток подавляющего большинства теорий ползучести заключается в невозможности описать частичную обратимость деформации ползучести после полной разгрузки. Разновидности теории наследственности не приспособлены для описания отмеченного эффекта, поскольку теоретическая величина возврата оказывается слишком большой по сравнению с экспериментально наблюдаемой [19, 20]. К тому же область применимости большинства теорий ограничена случаем подобия стационарных кривых ползучести в целом. Вариант теории ползучести в пределах первой и второй стадий, учитывающей частичную обратимость реологической деформации, предложен Ю. П. Самариным [22] и обобщен в более поздней работе [20] для учета всех трех стадий ползучести.

Однако все представленные в работах [1, 16–23] уравнения состояния являются детерминированными, процедуры идентификации параметров моделей, как правило, являются эвристическими и многоступенчатыми с использованием некоторого набора характерных точек на кривых стационарной ползучести. Отсутствие алгоритмов статистической обработки экспериментальных данных и статистического анализа результатов вычислений не позволяют строго оценить адекватность построенных моделей ползучести и достоверность оценок их параметров. В связи с этим целью данной работы является разработка метода идентификации параметров реологической модели неполной обратимости деформации ползучести [22], который принципиально устраняет вышеизложенные недостатки известных методов.

1. Численный метод параметрической идентификации аппроксимации кривых ползучести при постоянных напряжениях. В соответствии с теорией неполной обратимости деформации ползучести при переменных напряжениях $\sigma = \sigma(t) \geq 0$ при наличии первой и второй стадий имеем следующую математическую модель [22]:

$$\begin{aligned}
 p(t) &= u(t) + v(t) + w(t), \\
 \left\{ \begin{aligned}
 u(t) &= \sum_{i=1}^s u_i(t), \\
 \dot{u}_i(t) &= \alpha_i \left[\beta b_i \varphi_i \left(\frac{\sigma(t)}{\sigma_*} \right) - u_i(t) \right], \\
 v(t) &= \sum_{i=1}^s v_i(t), \\
 \dot{v}_i(t) &= \begin{cases} \alpha_i \left[(1 - \beta) b_i \varphi_i \left(\frac{\sigma(t)}{\sigma_*} \right) - v_i \left(\frac{\sigma(t)}{\sigma_*} \right) \right], \\ (1 - \beta) b_i \varphi_i \left(\frac{\sigma(t)}{\sigma_*} \right) > v_i(t), \\ 0, (1 - \beta) b_i \varphi_i \left(\frac{\sigma(t)}{\sigma_*} \right) \leq v_i(t); \end{cases} \\
 \dot{w}(t) &= f \left(\frac{\sigma(t)}{\sigma_*} \right),
 \end{aligned} \right. \quad (1)
 \end{aligned}$$

где $p(t)$ — деформации ползучести; $u(t)$, $v(t)$, $w(t)$ — вязкоупругая, вязкопластическая и вязкая компонента $p(t)$ соответственно; $u_i(t)$, $v_i(t)$ — компоненты вязкоупругой и вязкопластической компонент соответственно; σ_* , α_i , b_i , $\beta \in [0, 1]$ — параметры модели; $\varphi_i(\sigma/\sigma_*)$ и $f(\sigma/\sigma_*)$ — функции от безразмерных напряжений.

Из (1) следует, что $u(t)+v(t)$ описывает деформацию, накопленную на первой стадии ползучести при постоянном напряжении, при этом при $\beta = 1$ эта деформация полностью обратима после разгрузки, а при $\beta = 0$ — полностью необратима.

Исходной информацией для определения параметров и функций соотношений (1) являются экспериментально полученные кривые стационарной ползучести при действии постоянного напряжения с последующей разгрузкой:

$$\sigma(t) = \begin{cases} \sigma^j, & 0 < t \leq T, \\ 0, & t > T, \quad j = \overline{1, m}. \end{cases}$$

m — количество кривых ползучести, $\sigma^j = \text{const}$. Величина σ_* в (1) полагается равной одному из напряжений σ^j , т.е. $\sigma_* = \sigma^j$, $1 \leq j \leq m$.

Модель (1) применима при следующих ограничениях: материал является нестареющим; напряжение $\sigma(t)$ не изменяет знака и не достигает предела текучести, третья стадия отсутствует, температура постоянна.

При постоянном напряжении $\sigma = \sigma^j = \text{const}$ ($0 \leq t \leq T$) интегрирование (1) дает аналитическое выражение для кривой ползучести вида

$$p(t) = \sum_{i=1}^s a_i [1 - \exp(-\alpha_i t)] + ct, \quad (2)$$

где $a_i = b_i \varphi_i(\sigma^j / \sigma_*)$, $c = f(\sigma^j / \sigma_*)$.

Ставится задача достоверной оценки параметров аппроксимации (2) по результатам эксперимента $p(t_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$, где N — объем выборки результатов наблюдений, полученных в ходе промышленного или научно-технического эксперимента. Аппроксимация (2) содержит $2s + 1$ параметров (как правило, количество экспоненциальных составляющих $s \leq 3$), достоверная оценка которых по результатам наблюдений является основной проблемой параметрической идентификации. При этом одновременно решается задача структурной идентификации, под которой понимается оценка числа экспоненциальных составляющих s в модели (2).

Одним из известных методов решения этой задачи является метод, в основе которого лежит последовательное выделение экспоненциальных составляющих при аппроксимации кривых ползучести [24]. Однако этот метод имеет ряд существенных недостатков: требование выпуклости и монотонности функции, описывающей экспериментальную кривую ползучести, что не всегда выполняется в практике эксперимента и предварительно необходимо выполнять методы непараметрического выравнивания опытных данных; применение интерполяции к предварительно сглаженным экспериментальным данным, что существенно искажает оценки параметров экспоненциальных составляющих при наличии случайной помехи в результатах наблюдений. Однако основным недостатком этого метода является детерминированный подход к решению задачи идентификации.

Принципиально устранить указанный недостаток можно на основе численных методов нелинейного регрессионного анализа [26, 27]. При таком подходе задача параметрической идентификации решается на основе нелинейной регрессионной зависимости, построенной с учетом функциональной зависимости (2):

$$y_k = \sum_{i=1}^s a_i (1 - \exp(-\alpha_i t_k)) + ct_k + \varepsilon_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N - 1, \quad (3)$$

где $y_k = p(t_k)$ — результаты эксперимента объемом N , ε_k — случайное возмущение в результатах наблюдений, $0 \leq k \leq N - 1$. При этом среднеквадратичные оценки параметров модели (3) находятся из условия минимизации

величины отклонения построенной модели $\hat{y}_k = \sum_{i=1}^s \hat{a}_i (1 - \exp(-\hat{\alpha}_i t_k)) + \hat{c}t_k$ от результатов наблюдения y_k , $0 \leq k \leq N - 1$:

$$\|y - \hat{y}\|^2 = \|e\|^2 \rightarrow \min. \quad (4)$$

Нелинейный характер регрессионной модели (3) обуславливает одну из основных проблем при оценивании параметров модели — проблему выбора начального приближения вектора оценок, обеспечивающего сходимость итерационной процедуры уточнения среднеквадратичных оценок к параметрам, удовлетворяющим критерию (4). Кроме того, большое число идентифицируемых переменных, а также неравномерность вклада различных экспоненциальных составляющих в наблюдаемый выходной сигнал может привести

к проблеме вычислительной устойчивости оценок, без решения которой невозможно не только обеспечить достоверность результатов, но даже реализовать необходимые алгоритмы вычислений.

В работах [28, 29] задача параметрической идентификации аппроксимации кривой ползучести с экспоненциальным ядром решается на основе разностных уравнений. При таком подходе строится модель временного ряда, описывающая последовательность результатов наблюдений деформации ползучести. Известные соотношения между коэффициентами разностного уравнения и параметрами нелинейной регрессии позволяют свести задачу к оценке коэффициентов линейно-параметрической дискретной модели [30]. Это дает возможность не только решить проблему выбора начального приближения вектора оценок, но и непосредственно находить оценки параметров модели кривой ползучести, а также проводить статистический анализ результатов вычислений.

По сравнению с известным методом [22] построенная на основе разностных уравнений модель более адекватна результатам наблюдений, среднеквадратичные оценки параметров более достоверны и для них могут быть найдены доверительные интервалы, однако, несмотря на это, проблема устойчивости вычисления оценок остается по-прежнему актуальной. Кроме того, метод [28, 29] не позволяет решить задачу структурной идентификации — определить число экспоненциальных составляющих в модели на основе статистических методов обработки результатов наблюдений.

В данной работе рассматривается новый численный метод оценки параметров математической модели кривой ползучести, в котором учтены основные достоинства обоих известных методов:

- последовательное выделение из модели (3) каждой экспоненциальной составляющей $a_i \exp(-\alpha_i t_k)$, $i = 1, 2, 3$, как в известном методе [22];
- параметрическая идентификация на основе разностных уравнений каждой отдельной экспоненциальной составляющей, в том числе статистический анализ результатов расчета.

Такой подход не только позволяет существенно повысить устойчивость вычислений, а, следовательно, и эффективность оценок параметров a_i и α_i , но и дает возможность определить количество составляющих, в совокупности обеспечивающих заданную адекватность построенной модели $\hat{y}(t)$ результатам эксперимента (например, не менее $R^2 = 97\%$, где R^2 — коэффициент детерминации).

Следует отметить, что поскольку в алгоритме метода используются разностные уравнения, описывающие экспоненциальные составляющие, перед его применением следует провести предварительную обработку кривой ползучести, которая заключается в формировании равномерной выборки результатов эксперимента y_k , $0 \leq k \leq N-1$, с шагом τ , равным наименьшему промежутку времени измерений деформации ползучести. Объем выборки N , сформированной в результате предварительной обработки, вычисляется по формуле $N = \lceil t_{\max}/\tau \rceil$, где t_{\max} — заданное время наблюдений.

Предлагаемый численный метод включает следующие основные этапы.

Этап 1. На первом этапе строится аппроксимация второй стадии ползучести:

$$\hat{y}_{1k} = A + ct_k. \quad (5)$$

В равенстве (5) параметр A равен сумме коэффициентов в экспоненциальных составляющих: $A = \sum_{i=1}^s a_i$. Параметрическая идентификация линейной модели (5) проводится на множестве точек t_k , $n_1 \leq k \leq N-1$, в которых экспоненциальной составляющей можно пренебречь:

$$y_k = A - \sum_{i=1}^s a_i \exp(-\alpha_i t_k) + ct_k + \varepsilon_k \approx A + ct_k + \varepsilon_k, \quad k = n_1, n_1+1, \dots, N-1. \quad (6)$$

Момент времени t_k ($k \geq n_1$), начиная с которого экспоненты считаются полностью затухающими и не влияют на вторую стадию, определяется из условия

$$\frac{\Delta y'_k}{\max |y'_k|} \approx \frac{y_k - 2y_{k-1} + y_{k-2}}{y_1} < 0.001, \quad k = 2, 3, \dots, N-1.$$

Среднеквадратичные оценки параметров линейной регрессии (6) находят-ся из условия

$$\|y - \hat{y}_1\|^2 = \sum_{k=n_1}^{N-1} (y_k - \hat{y}_{1k})^2 = \sum_{k=n_1}^{N-1} (y_k - \hat{A} - \hat{c}t_k)^2 \rightarrow \min$$

на основе решения нормальной системы уравнений

$$\begin{cases} \hat{A} \cdot (N - n_1) + \hat{c} \cdot \sum_{k=n_1}^{N-1} t_k = \sum_{k=n_1}^{N-1} y_k; \\ \hat{A} \cdot \sum_{k=n_1}^{N-1} t_k + \hat{c} \cdot \sum_{k=n_1}^{N-1} t_k^2 = \sum_{k=n_1}^{N-1} t_k y_k \end{cases}$$

по формулам

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \frac{\sum_{k=n_1}^{N-1} y_k \cdot \sum_{k=n_1}^{N-1} t_k^2 - \sum_{k=n_1}^{N-1} t_k y_k \cdot \sum_{k=n_1}^{N-1} t_k}{(N - n_1) \sum_{k=n_1}^{N-1} t_k^2 - \left(\sum_{k=n_1}^{N-1} t_k \right)^2}, \\ \hat{c} &= \frac{(N - n_1) \sum_{k=n_1}^{N-1} t_k y_k - \sum_{k=n_1}^{N-1} y_k \cdot \sum_{k=n_1}^{N-1} t_k}{\sum_{k=n_1}^{N-1} t_k^2 - \left(\sum_{k=n_1}^{N-1} t_k \right)^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Результатом расчетов, выполненных на первом этапе алгоритма рассматриваемого численного метода, является построенная аппроксимация для второй стадии ползучести:

$$\hat{y}_{1k} = \hat{A} + \hat{c}t_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (8)$$

Этап 2. На втором этапе находятся среднеквадратичные оценки параметров первой экспоненциальной составляющей:

$$f_k = -a_1 \exp[-\alpha_1 \tau(k-1)], \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (9)$$

Вначале формируется выборка результатов расчета $y_k^{(1)} = y_k - \hat{y}_{1k}$, $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$. Среднеквадратичные оценки параметров a_1 и α_1 вычисляются на основе нелинейной регрессии

$$y_k^{(1)} = -a_1 \exp(-\alpha_1 \tau k) + \varepsilon_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1,$$

$$\text{из условия } \|\hat{\varepsilon}\|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} [y_k^{(1)} + \hat{a}_1 \exp(-\hat{\alpha}_1 \tau k)]^2 \rightarrow \min.$$

В формате данного метода эта задача решается с использованием разностного уравнения, построенного на основе дискретной функции (9):

$$\begin{cases} f_1 = \lambda_2; \\ f_k = \lambda_1 f_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, N, \end{cases} \quad (10)$$

где $\lambda_1 = \exp(-\alpha_1 \tau)$, $\lambda_2 = -a_1$.

Введем обозначения: $z_k = y_k^{(1)}$, $0 \leq k \leq N-1$. Тогда с учетом равенства $f_{k+1} = z_k - \varepsilon_k$, $0 \leq k \leq N-1$, из системы (10) получаем

$$\begin{cases} z_0 = \lambda_2 + \eta_0; \\ z_k = \lambda_1 z_{k-1} + \eta_k, \quad k = 1, 2, \dots, N-1; \\ \eta_0 = \varepsilon_0; \\ \eta_k = \varepsilon_k - \lambda_1 \varepsilon_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, N-1 \end{cases} \quad (11)$$

или в матричной форме:

$$z = F\lambda + \eta,$$

где $z = (z_0, z_1, \dots, z_{N-1})^\top$, $\eta = (\varepsilon_0, \varepsilon_1 - \lambda_1 \varepsilon_0, \varepsilon_2 - \lambda_1 \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{N-1} - \lambda_1 \varepsilon_{N-2})^\top$,

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)^\top$, $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z_0 & z_1 & \dots & z_{N-2} \end{bmatrix}^\top$, $^\top$ — символ транспонирования.

Начальные оценки параметров нелинейной регрессии (11) находятся из условия $\|\hat{\eta}\|^2 = \|z - F\lambda\|^2 \rightarrow \min$ по формуле $\hat{\lambda}^{(0)} = (F^\top F)^{-1} F^\top z$, откуда получаем оценки

$$\hat{\lambda}_1^{(0)} = \frac{\sum_{k=1}^{N-1} z_k z_{k-1}}{\sum_{k=1}^{N-1} z_{k-1}^2}, \quad \hat{\lambda}_2^{(0)} = z_0. \quad (12)$$

Для уточнения среднеквадратичных оценок параметров математической модели (11) с учетом выполнения условия $\|\hat{\varepsilon}\|^2 \rightarrow \min$ рассмотрим нелинейную регрессию относительно коэффициентов разностного уравнения

$$z_{k-1} = f_k(\lambda_1, \lambda_2) + \varepsilon_k, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (13)$$

где нелинейная дискретная функция $f_k(\lambda_1, \lambda_2)$ описывается рекуррентной формулой (10).

Итерационная процедура уточнения среднеквадратичных оценок нелинейной регрессии (13) описывается формулой [26, 27, 30]

$$\hat{\lambda}^{(i+1)} = \hat{\lambda}^{(i)} + [(W(\hat{\lambda}^{(i)}))^{\top} W(\hat{\lambda}^{(i)})]^{-1} (W(\hat{\lambda}^{(i)}))^{\top} [y^{(1)} - f(\hat{\lambda}^{(i)})], \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (14)$$

где $W(\lambda_1, \lambda_2)$ — матрица Якоби размера $[N \times 2]$, элементы которой имеют вид

$$w_{1k}(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\partial f_k(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_1} = \begin{cases} 0, & k = 1; \\ f_{k-1}(\lambda_1, \lambda_2) + \lambda_1 w_{1,k-1}(\lambda_1, \lambda_2), & 2 \leq k \leq N; \end{cases}$$

$$w_{2k}(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\partial f_k(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_2} = \begin{cases} 0, & k = 1; \\ \lambda_1 w_{2,k-1}(\lambda_1, \lambda_2), & 2 \leq k \leq N. \end{cases}$$

Начальное приближение в рекуррентной формуле (14) находится по формулам (12). Процесс уточнения среднеквадратичных оценок $\hat{\lambda}^{(i)}$ заканчивается при выполнении условия

$$\|\hat{\lambda}^{(i+1)} - \hat{\lambda}^{(i)}\| < 0.001 \|\hat{\lambda}^{(i)}\|. \quad (15)$$

С учетом полученных среднеквадратичных оценок коэффициентов разностного уравнения можно найти оценки параметров первой экспоненциальной составляющей:

$$\hat{a}_1 = -\hat{\lambda}_2^{(i)}, \quad \hat{\alpha}_1 = -\frac{1}{\tau} \ln \hat{\lambda}_1^{(i)}. \quad (16)$$

и записать ее зависимость в виде

$$\hat{y}_k^{(1)} = -\hat{a}_1 \exp(-\hat{\alpha}_1 t_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (17)$$

На основе полученных выше результатов можно перейти к решению задачи уточнения среднеквадратичных оценок параметров нелинейной регрессии (3) при использовании одной экспоненциальной составляющей.

На этом шаге с учетом найденных ранее оценок коэффициентов разностного уравнения $\hat{\lambda}_1^{(i)}$ и $\hat{\lambda}_2^{(i)}$ (формула (14)), а также оценки \hat{c} (формула (7)) вычисляется вектор $\hat{\mu}^{(0)} = (\hat{a}_1^{(0)}, \hat{\alpha}_1^{(0)}, \hat{c}^{(0)})^{\top}$ начальных оценок параметров функциональной зависимости

$$f_k(\mu) = a_1 [1 - \exp(-\alpha_1 t_k)] + c t_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1,$$

по формулам

$$\hat{a}_1^{(0)} = -\hat{\lambda}_2^{(i)}, \quad \hat{\alpha}_1^{(0)} = -\frac{1}{\tau} \ln \hat{\lambda}_1^{(i)}, \quad \hat{c}^{(0)} = \hat{c}.$$

Далее находятся элементы матрицы Якоби $W(\mu)$ размера $[N \times 3]$:

$$w_{k1}(\mu) = \frac{\partial f_k(\mu)}{\partial a_1} = 1 - \exp(-\alpha_1 t_k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1;$$

$$w_{k2}(\mu) = \frac{\partial f_k(\mu)}{\partial \alpha_1} = a_1 t_k \exp(-\alpha_1 t_k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1;$$

$$w_{k3}(\mu) = \frac{\partial f_k(\mu)}{\partial c} = t_k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Итерационная процедура уточнения среднеквадратичных оценок нелинейной регрессии (3) при использовании одной экспоненциальной составляющей описывается формулой

$$\hat{\mu}^{(i+1)} = \hat{\mu}^{(i)} + [(W(\hat{\mu}^{(i)}))^T W(\hat{\mu}^{(i)})]^{-1} (W(\hat{\mu}^{(i)}))^T [y - f(\hat{\mu}^{(i)})],$$

$$i = 0, 1, 2, \dots \quad (18)$$

Процесс уточнения среднеквадратичных оценок $\hat{\mu}^{(i)}$ заканчивается при выполнении условия

$$\|\hat{\mu}^{(i+1)} - \hat{\mu}^{(i)}\| < 0.001 \|\hat{\mu}^{(i)}\|. \quad (19)$$

Результатом расчетов, выполненных на этом шаге алгоритма рассматриваемого численного метода, является построенная аппроксимация кривой ползучести с одной экспоненциальной составляющей:

$$\hat{y}_k = \hat{a}_1 [1 - \exp(-\hat{\alpha}_1 t_k)] + \hat{c} t_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad (20)$$

в которой оценки параметров соответствуют элементам вектора $\hat{\mu}^{(i+1)}$:

$$\hat{a}_1 = \hat{\mu}_1^{(i+1)}, \quad \hat{\alpha}_1 = \hat{\mu}_2^{(i+1)}, \quad \hat{c} = \hat{\mu}_3^{(i+1)}.$$

Для вычисления дисперсий величин a_1 , α_1 , c находится матрица

$$V[\mu] = (W^T W)^{-1} s_{\text{ост}}^2,$$

$$\text{где } s_{\text{ост}}^2 = \frac{1}{N-3} \sum_{i=0}^{N-1} (y_k - \hat{y}_k)^2.$$

Диагональные элементы $V_{11}(\mu) = D(a_1)$, $V_{22}(\mu) = D(\alpha_1)$ и $V_{33}(\mu) = D(c)$ задают дисперсию параметров a_1 , α_1 и c .

На заключительном шаге второго этапа решается задача проверки адекватности построенной модели результатам наблюдений и, как следствие, целесообразности использования в модели других экспоненциальных составляющих. Для этого могут быть выбраны различные критерии адекватности модели.

Например, можно использовать относительную величину среднеквадратической нормы отклонения аппроксимации (20) от данных эксперимента:

$$h, \% = \left(\frac{\sum_{k=0}^{N-1} (y_k - \hat{y}_k)^2}{\sum_{k=0}^{N-1} y_k^2} \right)^{1/2} \cdot 100 \%. \quad (21)$$

В качестве другого критерия адекватности модели можно использовать «коэффициент детерминации» R^2 , %, который определяется через выборочный коэффициент множественной корреляции (коэффициент корреляции между случайными векторами y и \hat{y}):

$$R = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} (y_k - \bar{y})(\hat{y}_k - \bar{\hat{y}})}{\left(\sum_{k=0}^{N-1} (y_k - \bar{y})^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=0}^{N-1} (\hat{y}_k - \bar{\hat{y}})^2\right)^{1/2}}, \quad R^2, \% = R^2 \cdot 100 \%. \quad (22)$$

Условием адекватности построенной модели результатам эксперимента можно считать выполнение одного из неравенств

$$h, \% \leq 3 \%, \quad R^2, \% \geq 97 \%. \quad (23)$$

Этап 3. Если условия (23) не выполняются, то следует перейти к третьему этапу численного метода — выделению в соотношении для кривой ползучести (3) второй экспоненциальной составляющей: $a_2 [1 - \exp(-\alpha_2 t_k)]$.

При решении этой задачи используются результаты, полученные на первых двух этапах: построенные аппроксимации второй стадии ползучести (8) и первой экспоненциальной составляющей (17). На первом шаге этого этапа формируется выборка результатов расчета $y_k^{(2)} = y_k - \hat{y}_{1k} - \hat{y}_k^{(1)}$, $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$. Для этой выборки рассматривается аппроксимация второй экспоненциальной составляющей вида

$$f_k = -a_2 \exp[-\alpha_2 \tau (k-1)], \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Среднеквадратичные оценки параметров a_2 и α_2 вычисляются с применением нелинейной регрессии

$$y_k^{(2)} = -a_2 \exp(-\alpha_2 \tau k) + \varepsilon_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1,$$

из условия $\|\hat{\varepsilon}\|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} [y_k^{(2)} + \hat{a}_2 \exp(-\hat{\alpha}_2 \tau k)]^2 \rightarrow \min$.

Эта задача решается на основе алгоритма, описанного выше на втором этапе численного метода, с использованием формул (10)–(15) с учетом обозначений $z_k = y_k^{(2)}$, $0 \leq k \leq N-1$, $\lambda_1 = \exp(-\alpha_2 \tau)$ и $\lambda_2 = -a_2$.

Благодаря полученным среднеквадратичным оценкам коэффициентов разностного уравнения можно найти оценки параметров второй экспоненциальной составляющей:

$$\hat{a}_2 = -\hat{\lambda}_2^{(i)}, \quad \hat{\alpha}_2 = -\frac{1}{\tau} \ln \hat{\lambda}_1^{(i)} \quad (24)$$

и записать ее выражение в виде

$$\hat{y}_k^{(2)} = -\hat{a}_2 \exp(-\hat{\alpha}_2 \tau k) + \varepsilon_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

На основе полученных выше результатов можно перейти к решению задачи уточнения среднеквадратичных оценок параметров нелинейной регрессии (3) при использовании двух экспоненциальных составляющих.

На этом шаге с учетом найденных на предыдущих шагах оценок параметров экспоненциальных составляющих (формулы (16) и (24)), а также оценки \hat{c} (формула (7)) вычисляется вектор $\hat{\mu}^{(0)} = (\hat{a}_1^{(0)}, \hat{\alpha}_1^{(0)}, \hat{a}_2^{(0)}, \hat{\alpha}_2^{(0)}, \hat{c}^{(0)})^\top$ начальных оценок параметров функциональной зависимости

$$f_k(\mu) = a_1 [1 - \exp(-\alpha_1 t_k)] + a_2 [1 - \exp(-\alpha_2 t_k)] + ct_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N - 1,$$

по формулам

$$\hat{a}_1^{(0)} = \hat{a}_1, \quad \hat{\alpha}_1^{(0)} = \hat{\alpha}_1, \quad \hat{a}_2^{(0)} = \hat{a}_2, \quad \hat{\alpha}_2^{(0)} = \hat{\alpha}_2, \quad \hat{c}^{(0)} = \hat{c}.$$

Далее находятся элементы матрицы Якобы $W(\mu)$ размера $[N \times 5]$:

$$w_{k1}(\mu) = \frac{\partial f_k(\mu)}{\partial a_1} = 1 - \exp(-\alpha_1 t_k), \quad k = 0, 1, \dots, N - 1; \quad (25)$$

$$w_{k2}(\mu) = \frac{\partial f_k(\mu)}{\partial \alpha_1} = a_1 t_k \exp(-\alpha_1 t_k), \quad k = 0, 1, \dots, N - 1; \quad (26)$$

$$w_{k3}(\mu) = \frac{\partial f_k(\mu)}{\partial a_2} = 1 - \exp(-\alpha_2 t_k), \quad k = 0, 1, \dots, N - 1; \quad (27)$$

$$w_{k4}(\mu) = \frac{\partial f_k(\mu)}{\partial \alpha_2} = a_2 t_k \exp(-\alpha_2 t_k), \quad k = 0, 1, \dots, N - 1; \quad (28)$$

$$w_{k5}(\mu) = \frac{\partial f_k(\mu)}{\partial c} = t_k, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (29)$$

Итерационная процедура уточнения среднеквадратичных оценок нелинейной регрессии (3) при использовании двух экспоненциальных составляющих описывается формулой (18). Процесс уточнения среднеквадратичных оценок $\hat{\mu}^{(i)}$ заканчивается при выполнении условия (19). Результатом расчетов, выполненных на этом шаге алгоритма рассматриваемого численного метода, является построенная аппроксимация кривой ползучести с двумя экспоненциальными составляющими:

$$\hat{y}_k = \hat{a}_1 [1 - \exp(-\hat{\alpha}_1 t_k)] + \hat{a}_2 [1 - \exp(-\hat{\alpha}_2 t_k)] + \hat{c} t_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N - 1,$$

в которой оценки параметров соответствуют элементам вектора $\hat{\mu}^{(i+1)}$:

$$\hat{a}_1 = \hat{\mu}_1^{(i+1)}, \quad \hat{\alpha}_1 = \hat{\mu}_2^{(i+1)}, \quad \hat{a}_2 = \hat{\mu}_3^{(i+1)}, \quad \hat{\alpha}_2 = \hat{\mu}_4^{(i+1)}, \quad \hat{c} = \hat{\mu}_5^{(i+1)}.$$

Для вычисления дисперсий величин a_1 , α_1 , a_2 , α_2 и c находится матрица $V[\mu] = (W^\top W)^{-1} s_{\text{ост}}^2$, диагональные элементы которой $V_{11}(\mu) = D(a_1)$, $V_{22}(\mu) = D(\alpha_1)$, $V_{33}(\mu) = D(a_2)$, $V_{44}(\mu) = D(\alpha_2)$, $V_{55}(\mu) = D(c)$ и задают дисперсию величин a_1 , α_1 , a_2 , α_2 и c .

На заключительном шаге третьего этапа решается задача проверки адекватности построенной модели результатам наблюдений и, как следствие, целесообразности использования в модели третьей экспоненциальной составляющей. Для этого следует применить критерии адекватности модели, представленные соотношениями (21) или (22).

Этап 4. Если условия (23) не выполняются, то следует перейти к четвертому этапу численного метода — выделению в соотношении для кривой ползучести (3) третьей экспоненциальной составляющей: $a_3[1 - \exp(-\alpha_3 t_k)]$.

Алгоритм вычисления среднеквадратичных оценок параметров третьей экспоненциальной составляющей аналогичен процедурам, описанным выше на втором и третьем этапах численного метода. В основе этого алгоритма лежит выборка результатов расчета:

$$y_k^{(3)} = y_k - \hat{y}_{1k} - y_k^{(1)} - y_k^{(2)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N - 1.$$

При уточнении среднеквадратичных оценок параметров нелинейной регрессии (3) с тремя экспоненциальными составляющими на основе итерационной процедуры (18) матрица Якоби $W(\mu)$ имеет размер $[N \times 7]$ и содержит уже семь столбцов w_{kj} , $1 \leq j \leq 7$, первые четыре из которых описываются формулами (25), (26), (27), (28), последний седьмой — формулой (29), а пятый и шестой — формулами

$$w_{k5}(\mu) = \frac{\partial f_k(\mu)}{\partial a_3} = 1 - \exp(-\alpha_3 t_k), \quad k = 0, 1, \dots, N - 1;$$

$$w_{k6}(\mu) = \frac{\partial f_k(\mu)}{\partial \alpha_3} = a_3 t_k \exp(-\alpha_3 t_k), \quad k = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Далее алгоритм аналогичен случаю построения первых двух экспонент.

Таким образом, разработанный метод параметрической идентификации кривых ползучести в пределах первых двух стадий при постоянных напряжениях позволяет за счет последовательного выделения экспоненциальных составляющих и статистических методов нелинейной регрессии существенно повысить вычислительную устойчивость и достоверность оценок параметров соответствующей аппроксимации, а также ее адекватность экспериментальным данным.

2. Построение математической модели теории неполной обратимости деформации ползучести. Как отмечено выше, исходной информацией для идентификации параметров и функций в (1) является серия кривых стационарной ползучести при постоянных напряжениях $\sigma(t) = \sigma^j$, $1 \leq j \leq m$, при $t \in [0, T]$ с последующей разгрузкой: $\sigma(t) = 0$, $t > T$.

Этап 1. На первом этапе для каждой кривой ползучести при $\sigma(t) = \sigma^j$, $t \in [0, T]$, описываемой соотношением (2), по изложенной в п. 1 методике определяются оценки величин \hat{a}_i^j , $\hat{\alpha}_i^j$, \hat{c}_i^j и их дисперсии, $1 \leq i \leq s$, $1 \leq j \leq m$. Поскольку стохастически нелинейные определяющие соотношения трудно использовать при решении соответствующих краевых задач, величины α_i в (1) будем считать детерминированными и полагать их значения равными усредненными значениям α_i^j при всех уровнях напряжений:

$$\alpha_i = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \alpha_i^j.$$

Аналогично, по этой же причине и величину β будем также считать детерминированной (процедура ее вычисления приводится ниже). Тогда уравнения (1) будут стохастически линейными.

Этап 2. На втором этапе находятся аппроксимационные зависимости для величин $\hat{a}_i^j, \hat{c}^j, 1 \leq j \leq m$, вида

$$\hat{a}_i^* = \hat{b}_i \left(\frac{\sigma}{\sigma_*} \right)^{n_i}, \quad \hat{c}^* = \hat{\gamma} \left(\frac{\sigma}{\sigma_*} \right)^n \quad (30)$$

по методу наименьших квадратов, т.е. в (1) полагаем, что

$$\varphi_i \left(\frac{\sigma}{\sigma_*} \right) = \left(\frac{\sigma}{\sigma_*} \right)^{n_i}, \quad f \left(\frac{\sigma}{\sigma_*} \right) = \hat{\gamma} \left(\frac{\sigma}{\sigma_*} \right)^n,$$

где n_i и n — детерминированные параметры.

Этап 3. На третьем этапе в качестве базовой принимается кривая ползучести при $\sigma(t) = \sigma^j = \sigma_*$, $1 \leq j \leq m$. Тогда соотношение типа (2) для этой кривой ползучести имеет вид

$$p(t) = \sum_{i=1}^s \hat{b}_i [1 - \exp(-\alpha_i t)] + \hat{\gamma} t, \quad (31)$$

где \hat{b}_i и $\hat{\gamma}$ определяются из аппроксимации (30), а величина \hat{a}_i находится усреднением величин $\alpha_i^j, 1 \leq j \leq m$, по всем реализациям. Поскольку величины \hat{b}_i и $\hat{\gamma}$ в (31) не совпадают с аналогичными значениями a_i и c в (2), оценки дисперсий величин b_i и γ определим, используя дисперсии a_i и c , полученные ранее для кривой ползучести при $\sigma = \sigma_*$ на первом этапе исследований, полагая

$$D[b_i] = \left(\frac{\hat{b}_i}{\hat{a}_i} \right)^2 D[a_i], \quad D[\gamma] = \left(\frac{\hat{\gamma}}{\hat{c}} \right)^2 D[c]. \quad (32)$$

Полученным оценкам параметров b_i и γ придается универсальный характер, т.е. они используются при любых значениях напряжений $\sigma = \sigma(t)$ в определяющих соотношениях (1).

Поскольку оценки математических ожиданий случайных величин b_i и γ и их дисперсий известны, можно построить доверительные интервалы для деформации ползучести $p(t)$ при любых законах $\sigma = \sigma(t)$ на основании (1), в частности для серии кривых ползучести при $\sigma(t) = \sigma^j, 1 \leq j \leq m$, используя стохастически линейную зависимость вида

$$p(t) = \sum_{i=1}^s b_i \left(\frac{\sigma}{\sigma_*} \right)^{n_i} [1 - \exp(-\alpha_i t)] + \gamma \left(\frac{\sigma}{\sigma_*} \right)^n t,$$

из которой нетрудно определить дисперсию величины $p(t)$ в любой момент времени.

Этап 4. На четвертом этапе определяется величина β в соотношениях (1), которая задает величину обратимой компоненты деформации ползучести, накопленной на первой стадии ползучести после полной разгрузки образца. В дальнейшем для сохранения стохастической линейности (1) вводим гипотезу, что величина β также является детерминированной. Если на кривых ползучести при $\sigma = \sigma^j$ наблюдается ярко выраженная вторая стадия

ползучести, т.е. величина $w^j(t) + v^j(t)$ достигла асимптотического значения

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [w^j(t) + v^j(t)] = \sum_{i=1}^s b_i \left(\frac{\sigma^j}{\sigma_*} \right)^{n_i},$$

то величина β^j для этой кривой ползучести находится по формуле

$$\beta^j = \frac{p^j(T) - p^j(T + t^*)}{\sum_{i=1}^s b_i (\sigma^j / \sigma_*)^{n_i}},$$

где t^* — время окончания наблюдения за деформацией ползучести после разгрузки ($\sigma^j(t) = 0$, $t \in [T, t^*]$).

В случае если вторая стадия отсутствует, т.е. в наличии только первая стадия, величина β^j определяется в соответствии с зависимостью

$$\beta^j = \frac{p^j(T) - p^j(T + t_1)}{p^j(t_1)},$$

где $t_1 \in (0, T)$.

Далее в качестве величины β принимается осредненное значение

$$\beta = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \beta^j.$$

Последним четвертым этапом завершается построение стохастически линейных уравнений теории неполной обратимости деформации ползучести вида (1), при этом в качестве исходной информации используется серия осредненных кривых стационарной ползучести при постоянных напряжениях с последующей разгрузкой.

3. Результаты расчетов и их анализ. Применение разработанной методики построения теории неполной обратимости деформации ползучести (1) реализовано на основе большого массива экспериментальных данных из работ [19, 31]. В качестве примера приведем результаты расчетов для сплавов ВЖ98 при температуре 900 °С, ЭИ437А при температуре 700 °С, стали ЭИ736 при 500 °С из [31] (здесь отсутствуют данные о деформации ползучести при полной разгрузке образцов, поэтому полагалось, что $\beta = 0$) и сплава ЭП693 при температуре 700 °С [19], где имеются кривые обратной ползучести ($\beta \neq 0$).

Применение разработанной методики определения оценок параметров аппроксимации (2) показало, что для всех материалов достаточно одного экспоненциального слагаемого ($s = 1$). В табл. 1 приведены оценки основных параметров (2) для каждой кривой ползучести при фиксированном напряжении. Далее в соответствии с методикой строились степенные аппроксимации (30) и определялись \hat{b}_i , n_1 , $\hat{\gamma}$, n , а для определения дисперсий $D[b_1]$ и $D[\gamma]$ пользовались формулой (32), где \hat{a}_1 и \hat{c} соответствуют базовой кривой ползучести при $\sigma = \sigma_*$. В табл. 2 приведены окончательные оценки всех параметров определяющих уравнений состояния (1) для всех исследуемых материалов.

Таблица 1

Расчетные оценки параметров аппроксимаций кривых ползучести для сплавов ВЖ98, ЭИ437А, ЭП693 и стали ЭИ698 при фиксированных напряжениях [Estimated parameters for the approximation of creep curves for alloys VZh98, EI437A, EP693, and steel EI698 at fixed stresses]

σ , МПа	α_1, h^{-1}	$\hat{a}_1 \cdot 10^4$	$\hat{c} \cdot 10^6$	$D[a_1] \cdot 10^9$	$D[c] \cdot 10^{13}$	σ_* , МПа
EI736 steel, 500°C						
170	0.2	4.67	1.9	0.324	0.74	200
200	0.5	7.74	4.36	0.72	1.9	
250	0.38	9.81	6.87	1.14	2.72	
EI437A alloy, 700°C						
240	0.16	2.38	3.1	0.25	0.55	300
300	0.37	3.44	6.71	0.124	0.39	
350	0.28	5.71	11.36	0.162	0.44	
VZh98 alloy, 900°C						
10	0.27	4.48	10.2	0.818	1.97	15
15	0.24	11.07	19.5	4.23	9.76	
20	0.25	13.5	30	4.35	10.3	
25	0.3	17.8	49.5	8.9	21.4	
EP693 alloy, 700°C						
245.3	0.25	2.82	8.3	0.163	0.37	294.3
294.3	0.28	3.26	16.1	1.5	3.19	
343.4	0.56	4.15	38.9	1.83	12.2	

Таблица 2

Расчетные оценки параметров стохастической модели (1) [Estimated parameters of the stochastic model (1)]

Material	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{b}_1 \cdot 10^4$	$\hat{\gamma} \cdot 10^6$	$D[b_1] \cdot 10^9$	$D[\gamma] \cdot 10^{13}$	n_1	n	β
VZh98 alloy, 900°C	0.27	9.0	20.0	2.80	10.0	1.46	1.71	0
EI736 steel, 500°C	0.36	7.0	4.0	0.59	1.60	1.86	3.2	0
EI437A alloy, 700°C	0.27	3.8	7.0	0.15	0.43	2.24	3.45	0
EP693 alloy, 700°C	0.36	3.4	18	1.63	4.0	1.14	4.6	0.64

Анализ данных табл. 2 свидетельствует, что величины α_i^j , $D[b_i^j]$, $D[\gamma^j]$ ($1 \leq j \leq m$) монотонно не зависят от величины напряжения, что может служить некоторым обоснованием принятой гипотезы об их фиксированной величине в соотношениях (1).

На рис. 1, а в качестве иллюстрации приведены результаты аппроксимации после первичной статистической обработки кривых ползучести сплава ЭИ437А при температуре 700°C для трех уровней напряжений на основании функциональной зависимости, задаваемой соотношением (2). Исходя из некоррелированности случайных величин a_i и c , дисперсия для деформации $p(t)$ для каждой кривой в любой момент времени с данными из табл. 1 рассчитывалась по формуле

$$D[p(t)] = \sum_{i=1}^s D[a_i](1 - \exp(-\alpha_i t))^2 + D[c]t^2,$$

а затем с использованием классической методики [27] строились 99% доверительные интервалы для математического ожидания деформации $p(t)$. Зна-

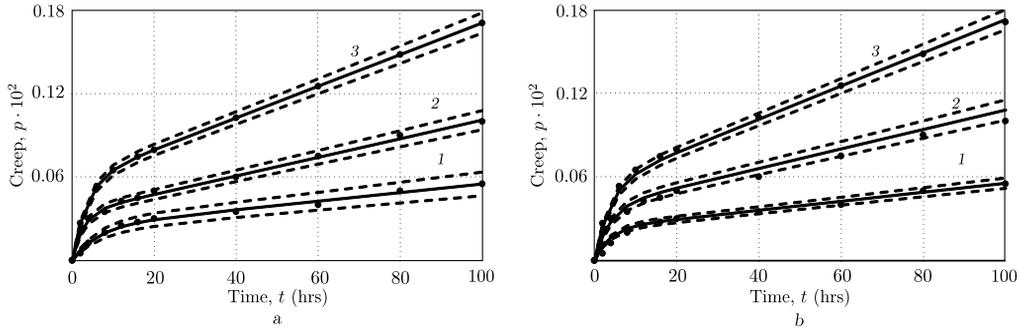


Рис. 1. Результаты первичной аппроксимации кривых ползучести ЭИ437А при температуре 700 °С с данными из табл. 1 (а) и по модели (1) с данными из табл. 2 (б): 1 — $\sigma = 240$ МПа, 2 — $\sigma = 300$ МПа, 3 — $\sigma = 350$ МПа; сплошная линия — математическое ожидание; штриховые линии — границы доверительных интервалов; маркеры (точки) — экспериментальные данные для ползучести

[Figure. 1. Results of the primary approximation of creep curves for EI437A at a temperature of 700 °C with data from table 1 (a), and according to the model (1) with data from table 2 (b): 1 — $\sigma = 240$ MPa, 2 — $\sigma = 300$ MPa, 3 — $\sigma = 350$ MPa; solid line — mathematical expectation; dashed lines — confidence interval boundaries; markers (dots) — experimental data for creep]

чения математических ожиданий величин \hat{a}_i , \hat{c} и $\hat{\alpha}_i$ и дисперсий $D[a_i]$, $D[c]$ приведены в табл. 1. На рис. 1, b и рис. 2 приведены расчетные значения для деформации ползучести по реологической модели (1) с параметрами, приведенными в табл. 2, для четырех материалов: ЭИ437А (700 °С), ЭИ736 (500 °С), ВЖ98 (900 °С) и ЭП693 (700 °С). На всех рисунках сплошная линия — математическое ожидание, штриховые линии — границы 99 % доверительного интервала, маркеры (точки) — экспериментальные значения деформации ползучести. Для построения доверительных интервалов по модели (1) расчет дисперсии для деформации ползучести осуществлялся по формуле (см. формулу (32))

$$D[p(t)] = \sum_{i=1}^s D[b_i] \left[\left(\frac{\sigma}{\sigma_*} \right)^{n_i} (1 - \exp(-\alpha_i t)) \right]^2 + D[\gamma] \left[\left(\frac{\sigma}{\sigma_*} \right)^n t \right]^2.$$

Для всех приведенных вариантов расчета экспериментальные данные не выходят за пределы соответствующих доверительных интервалов для деформации ползучести, что свидетельствует о достоверности оценок параметров модели (1) и ее адекватности.

Прокомментируем полученные результаты с точки зрения построения детерминированных теорий ползучести на основании осредненных экспериментальных стационарных кривых ползучести. Как отмечено выше, идентификация параметров в этих теориях осуществляется эвристически по некоторому набору характерных точек на кривых ползучести без какого-либо строгого научного обоснования их выбора, при этом вопросы достоверности полученных детерминированных оценок параметров, устойчивости алгоритмов определения оценок к выбору и количеству характерных точек, помехозащищенности предлагаемых эвристических численных процедур идентификации со строгих позиций вычислительной математики вообще не рассматриваются. В данной же статье показано, что при использовании полной экспериментальной статистической информации о кривых стационарной ползучести па-

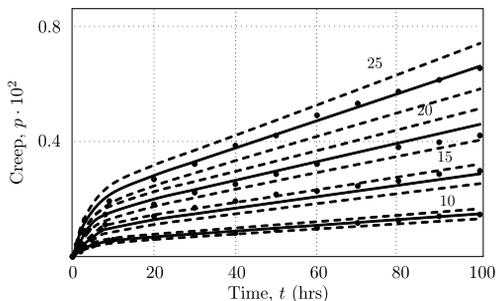
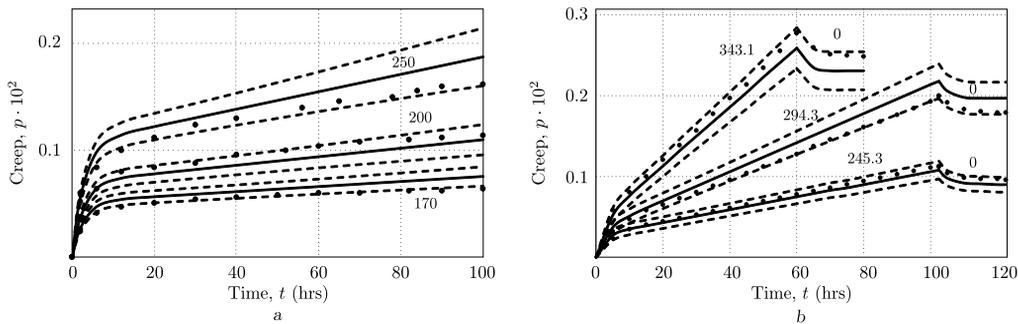


Рис. 2. Расчетные данные деформации ползучести по модели (1) для стали ЭИ736 (500 °С) (а), сплава ВЖ98 (900 °С) (б), сплава ЭП693 (700 °С) (с): сплошная линия — математическое ожидание; штриховые линии — границы доверительных интервалов; маркеры (точки) — экспериментальные данные; цифры — напряжения в МПа

[Figure. 2. Calculated data of creep deformation according to the model (1) for EI736 steel (500 °C) (a), VZh98 alloy (900 °C) (b), and EP693 alloy (700 °C) (c): solid line — mathematical expectation; dashed lines — confidence interval boundaries; markers (dots) — experimental data; numbers — stress in MPa]

параметры модели являются не детерминированными, а случайными, и поэтому соответствующие реологические модели являются стохастическими, даже если ориентироваться на осредненные экспериментальные зависимости для деформации ползучести при постоянных напряжениях. Такого рода модели позволяют получать более достоверную информацию, например, о деформации ползучести в фиксированные моменты времени или о времени достижения заданного значения деформации.

Закключение.

1. Разработан новый численный метод параметрической и структурной идентификации нелинейной теории неполной обратимости деформации ползучести, позволяющий свести задачу к нелинейному регрессионному анализу определения оценок случайных параметров реологической модели на основе временных рядов последовательности результатов наблюдений деформации ползучести при различных постоянных напряжениях.
2. Показано, что при использовании даже осредненных экспериментальных кривых ползучести построенная реологическая модель на их основе является стохастической вследствие процедуры параметрической идентификации нелинейной регрессионной модели.
3. Выполнена параметрическая и структурная идентификация теории неполной обратимости деформации ползучести для ряда сталей и сплавов, получены численные значения оценок параметров для этих материалов.
4. Выполнена проверка адекватности построенной математической теории неполной обратимости деформации ползучести эксперименталь-

ным данным для стали ЭИ736 (500°C) и сплавов: ЭИ437А (700°C), ВЖ98 (900°C) и ЭП693 (700°C). Наблюдается соответствие расчетных и опытных данных. Экспериментальные данные принадлежат соответствующим доверительным интервалам для деформации ползучести, что свидетельствует о достоверности полученных оценок параметров модели.

5. Разработано не имеющее аналогов программное обеспечение для предложенного численного метода идентификации параметров реологической модели.

Конкурирующие интересы. Конфликта интересов в отношении авторства и публикации этой статьи нет.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы в равной степени принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания Самарского государственного технического университета (тема № FSSE-2023-0003).

Библиографический список

1. Работнов Ю. Н. *Ползучесть элементов конструкций*. М.: Наука, 1966. 752 с.
2. Болотин В. В. *Прогнозирование ресурсов машин и конструкций*. М.: Машиностроение, 1984. 312 с.
3. Ломакин В. А. *Статистические задачи механики твердых деформируемых тел*. М.: Наука, 1970. 139 с.
4. Радченко В. П., Дудкин С. А., Тимофеев М.И. Экспериментальное исследование и анализ полей неупругих микро- и макродеформаций сплава АД-1 // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2002. № 16. С. 111–117. EDN: **EBNEIR**. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu107>.
5. Самарин Ю. П. О применении стохастических уравнений в теории ползучести материалов // *Изв. АН СССР. МТТ*, 1974. № 1. С. 88–94.
6. Самарин Ю. П. Стохастические механические характеристики и надежность конструкций с реологическими свойствами / *Ползучесть и длительная прочность конструкций*. Куйбышев: КПТИ, 1986. С. 8–17.
7. Радченко В. П., Саушкин М. Н., Голудин Е. П. Стохастическая модель неизотермической ползучести и длительной прочности материалов // *ПМТФ*, 2012. Т. 53, № 2. С. 167–174. EDN: **NJQRJC**.
8. Радченко В. П., Симонов А. В., Дудкин С.А. Стохастический вариант одномерной теории ползучести и длительной прочности // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2001. № 12. С. 73–84. EDN: **EBNDRJ**. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu64>.
9. Радченко В. П., Голудин Е.П. Феноменологическая стохастическая модель изотермической ползучести поливинилхлоридного пластика // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2008. № 1. С. 45–52. EDN: **JTBCLH**. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu571>.
10. Должковой А. А., Попов Н. Н., Радченко В. П. Решение стохастической краевой задачи установившейся ползучести для толстостенной трубы методом малого параметра // *ПМТФ*, 2006. Т. 47, № 1. С. 160–171. EDN: **NYCLUT**.
11. Попов Н. Н., Радченко В. П. Аналитическое решение стохастической краевой задачи установившейся ползучести для толстостенной трубы // *ПММ*, 2012. Т. 76, № 6. С. 1023–1031. EDN: **PJCSUP**.

12. Попов Н. Н., Самарин Ю. П. Исследование полей напряжений вблизи границы стохастически неоднородной полуплоскости при ползучести // *ПМТФ*, 1988. Т. 29, № 1. С. 159–164. EDN: **TTRZEF**.
13. Попов Н. Н., Самарин Ю. П. Пространственная задача стационарной ползучести стохастически неоднородной среды // *ПМТФ*, 1985. Т. 26, № 2. С. 150–155. EDN: **TTRZCH**.
14. Попов Н. Н. Нелинейная стохастическая задача ползучести толстостенной сферической оболочки // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2000. № 9. С. 186–189. EDN: **IPKHCH**. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu48>.
15. Попов Н. Н. Ползучесть стохастически неоднородной пластины с круговым отверстием // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2008. № 2. С. 126–132. EDN: **JZASMP**. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu630>.
16. Локощенко А. М. *Ползучесть и длительная прочность металлов*. М.: Физматлит, 2016. 489 с.
17. Никитенко А. Ф. *Ползучесть и длительная прочность металлических материалов*. Новосибирск: Новосиб. гос. архит.-строит. ун-т, 1997. 278 с.
18. Волков И. А., Коротких Ю. Г. *Уравнения состояния вязкоупругопластических сред с повреждениями*. М.: Физматлит, 2008. 424 с. EDN: **RYRTNT**.
19. Радченко В. П., Еремин Ю. А. *Реологическое деформирование и разрушение материалов и элементов конструкций*. М.: Машиностроение-1, 2004. 265 с. EDN: **QNATSX**.
20. Волков И. А., Игумнов Л. А., Сметанин И. В. [и др.] *Ползучесть и длительная прочность материалов и конструкций*. Нижний Новгород: Нижегород. ун-т, 2021. 155 с.
21. Волков И. А., Игумнов Л. А., Шишулин Д. Н. *Оценка ресурсных характеристик материалов и конструкций при усталости и ползучести*. Нижний Новгород: Нижегород. ун-т, 2020. 106 с.
22. Самарин Ю. П. *Уравнения состояния материалов со сложными реологическими свойствами*. Куйбышев: КуГУ, 1979. 84 с.
23. *Расчетные и расчетно-экспериментальные методы определения несущей способности и долговечности элементов машин и конструкций. Расчетно-экспериментальный метод определения параметров ползучести и длительной прочности при одноосном нагружении в условиях нестационарного нагружения: Методические рекомендации (1-я редакция)*. М.: Госстандарт, 1982.
24. Самарин Ю. П. Построение экспоненциальных аппроксимаций для кривых ползучести методом последовательного выделения экспоненциальных слагаемых // *Пробл. прочности*, 1974. № 9. С. 24–27.
25. Мухина Л. Г. Вычисление характеристик ползучести по опытным данным с применением метода непараметрического выравнивания / *Теоретико-экспериментальный метод исследования ползучести в конструкциях*. Куйбышев: КуАИ, 1984. С. 86–94.
26. Draper N. R., Smith H. *Applied Regression Analysis*. New York: John Wiley and Sons, 1998. xix+716 pp. DOI: <https://doi.org/10.1002/9781118625590>.
27. Демиденко Е. З. *Линейная и нелинейная регрессии*. Куйбышев: Финансы и статистика, 1981. 302 с.
28. Зотеев В. Е. Параметрическая идентификация кривых ползучести на основе стохастических разностных уравнений // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2008. № 1. С. 90–95. EDN: **JTBCNZ**. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu578>.
29. Зотеев В. Е., Макаров Р. Ю. Численный метод определения параметров первой стадии деформации ползучести // *Современные технологии. Системный анализ. Моделирование*, 2017. № 4. С. 40–48. EDN: **YLXFDY**. DOI: [https://doi.org/10.26731/1813-9108.2017.4\(56\).40-48](https://doi.org/10.26731/1813-9108.2017.4(56).40-48).
30. Зотеев В. Е. Численный метод нелинейного оценивания на основе разностных уравнений // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2018. Т. 22, № 4. С. 669–701. EDN: **YSDYZN**. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1643>.
31. Бульгин И. П., Власова П. Т., Горбодей А. Т. [и др.] *Атлас диаграмм растяжения при высоких температурах, кривых ползучести и длительной прочности сталей и сплавов для двигателей*. М.: Оборонгиз, 1957. 174 с.

MSC: 74S60, 74D10

Numerical method for structural and parametric identification of a mathematical model of incomplete inverse deformation of creep strain

*V. P. Radchenko, V. E. Zoteev, E. A. Afanaseva*Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

A new numerical method for parametric and structural identification of the physically nonlinear theory of reversibility of creep strain, valid within the first and second stages, has been developed. A series of stationary creep curves is used as basic experimental information. The problem is reduced to nonlinear regression analysis of determining estimates of random parameters based on time series of a sequence of observations of creep deformation at various constant stresses using difference equations. The obtained relationships between the coefficients of the difference equation and the parameters of nonlinear regression allow us to reduce the problem of estimating the coefficients of a linear-parametric discrete model. Corresponding iterative algorithms for refining parameter estimates with any given accuracy have been developed. Parametric and structural identification of the theory of incomplete reversibility of creep deformation has been carried out for steel EI736 (500 °C) and alloys EI437A (700 °C), VZh98 (900 °C), EP693 (700 °C). Numerical values of model parameter estimates for these alloys are given. The adequacy of the constructed mathematical models was checked, and the relation between the calculated and experimental data was observed. Experimental data for all materials considered belong to the corresponding

Mechanics of Solids

Research Article

© Authors, 2024

© Samara State Technical University, 2024 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Radchenko V. P., Zoteev V. E., Afanaseva E. A. Numerical method for structural and parametric identification of a mathematical model of incomplete inverse deformation of creep strain, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 1, pp. 73–95. EDN: KRTZPA. DOI: [10.14498/vsgtu2071](https://doi.org/10.14498/vsgtu2071) (In Russian).

Authors' Details:

Vladimir P. Radchenko  <https://orcid.org/0000-0003-4168-9660>Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Head of Dept.; Dept. of Applied Mathematics & Computer Science; e-mail: radchenko.vp@samgtu.ru*Vladimir E. Zoteev*  <https://orcid.org/0000-0001-7114-4894>Dr. Tech. Sci.; Professor; Dept. of Applied Mathematics & Computer Science; e-mail: zoteev.ve@samgtu.ru*Elena A. Afanaseva*  <https://orcid.org/0000-0001-7815-2723>Postgraduate Student; Dept. of Applied Mathematics & Computer Science; e-mail: afanasieva.ea@samgtu.ru

calculated confidence intervals for creep deformation, which indicates the reliability of the obtained estimates of the model parameters.

Keywords: creep, nonlinear regression model, identification, difference equations, root-mean-square parameter estimates.

Received: 15th December, 2023 / Revised: 13th February, 2024 /

Accepted: 27th February, 2024 / First online: 28th May, 2024

Competing interests. There is no conflict of interest regarding the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. All authors equally participated in the development of the article's concept and in writing the manuscript. The authors take full responsibility for submitting the final manuscript for publication. The final version of the manuscript has been approved by all authors.

Funding. The work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (theme no. FSSE-2023-0003) as part of the state task of the Samara State Technical University.

References

1. Rabotnov Yu. N. *Creep Problems in Structural Members*, North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics, T.7. Amsterdam, London, North-Holland Publ., 1969, xiv+822 c.
2. Bolotin V. V. *Prognozirovanie resursov mashin i konstruksii* [Forecasting Resource Machines and Structures]. Moscow, Mashinostroenie, 1984, 312 pp. (In Russian)
3. Lomakin V. A. *Statisticheskie zadachi mekhaniki tverdykh deformiruemykh tel* [Statistical Problems of the Mechanics of Deformable Solids]. Moscow, Nauka, 1970, 139 pp. (In Russian)
4. Radchenko V. P., Dudkin S. A., Timofeev M. I. Experimental study and analysis of the inelastic micro- and macro-inhomogeneity fields of AD-1 alloy, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2002, no. 16, pp. 111–117 (In Russian). EDN: EBNEIR. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu107>.
5. Samarin Yu. P. Use of stochastic equations in the theory of creep of materials, *Izv. AN SSSR. MTT*, 1974, no. 1, pp. 88–94 (In Russian).
6. Samarin Yu. P. Stochastic mechanical properties and reliability of structures with rheological properties, In: *Polzuchest' i dlitel'naiia prochnost' konstruksii* [Creep and Long-Term Strength of Structures]. Kuybyshev, Kuybyshev Polytech. Inst., 1986, pp. 8–17 (In Russian).
7. Radchenko V. P., Saushkin M. N., Goludin E. P. Stochastic model of nonisothermal creep and long-term strength of materials, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2012, vol. 53, no. 2, pp. 292–298. EDN: PDNKAX. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0021894412020186>.
8. Radchenko V. P., Simonov A. V., Dudkin S. A. Stochastic version of the one-dimensional theory of creep and long-term strength, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2001, no. 12, pp. 73–84 (In Russian). EDN: EBNDRJ. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu64>.
9. Radchenko V. P., Goludin E. P. Phenomenological stochastic isothermal creep model for an polivinylchloride elastron, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2008, no. 1, pp. 45–52 (In Russian). EDN: JTBCLH. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu571>.
10. Dolzhkovi A. A., Popov N. N., Radchenko V. P. Solution of the stochastic boundary-value problem of steady-state creep for a thick-walled tube using the small-parameter method, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2006, vol. 47, no. 1, pp. 134–142. EDN: LJWXBX. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10808-006-0017-0>.

11. Popov N. N., Radchenko V. P. Analytical solution of the stochastic steady-state creep boundary value problem for a thick-walled tube, *J. Appl. Math. Mech.*, 2012, vol. 76, no. 6, pp. 738–744. EDN: WQYAXJ. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2013.02.011>.
12. Popov N. N., Samarin Yu. P. Stress fields close to the boundary of a stochastically inhomogeneous half-plane during creep, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1988, vol. 29, no. 1, pp. 149–154. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00909710>.
13. Popov N. N., Samarin Yu. P. Spatial problem of stationary creep of a stochastically inhomogeneous medium, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1985, vol. 26, no. 2, pp. 296–301. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00908983>.
14. Popov N. N. Nonlinear stochastic creep problem of a thick-walled spherical shell, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2000, no. 9, pp. 186–189 (In Russian). EDN: IPKHCH. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu48>.
15. Popov N. N. Creep of a stochastic heterogeneous plate with a small circular hole, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2008, no. 2, pp. 126–132 (In Russian). EDN: JZASMP. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu630>.
16. Lokoshchenko A. M. *Creep and Long-Term Strength of Metals*. Boca, Raton, CRC Press, 2016, xviii+545 pp.
17. Nikitenko A. F. *Polzuchest' i dlitel'naiia prochnost' metallicheskih materialov* [Creep and Long-Term Strength of Metallic Materials]. Novosibirsk, Novosibirsk State Univ. of Archit. and Civil Engin., 1997, 278 pp. (In Russian)
18. Volkov I. A., Korotkikh Yu. G. *Uravneniia sostoianniia viazkouprugoplasticheskikh sred s povrezhdeniiami* [Equations of State for Viscoelastic-Plastic Media with Damage]. Moscow, Fizmatlit, 2008, 424 pp. (In Russian). EDN: RYRTNT.
19. Radchenko V. P., Eremin Yu. A. *Reologicheskoe deformirovanie i razrushenie materialov i elementov konstruksii* [Rheological Deformation and Fracture of Materials and Structural Elements]. Moscow, Mashinostroenie-1, 2004, 265 pp. (In Russian). EDN: QNAT SX.
20. Volkov I. A., Igumnov L. A., Smetanin I. V., et al. *Polzuchest' i dlitel'naiia prochnost' materialov i konstruksii* [Creep and Long-Term Strength of Materials and Structures]. Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod Univ., 2021, 155 pp. (In Russian)
21. Volkov I. A., Igumnov L. A., Shishulin D. N. *Otsenka resursnykh kharakteristik materialov i konstruksii pri ustalosti i polzuchesti* [Assessment of Resource Characteristics of Materials and Structures during Fatigue and Creep]. Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod Univ., 2020, 106 pp. (In Russian)
22. Samarin Yu. P. *Uravneniia sostoianniia materialov so slozhnymi reologicheskimi svoistvami* [Equations of State of Materials with Complex Rheological Properties]. Kuybyshev, Kuybyshev State Univ., 1979, 84 pp. (In Russian)
23. *Theoretical and Theoretical-Empirical Methods of Determining the Load-Carrying Capacity and Life of Machine Elements and Structures. Theoretical-Experimental Method of Determining Creep and Rupture-Strength Parameters for Nonsteady Uniaxial Loading* (1st ed.). Moscow, Gosstandart, 1982 (In Russian).
24. Samarin Yu. P. Derivation of exponential approximations for creep curves by the method of successive isolation of exponential terms, *Strength Mater.*, 1974, vol. 6, no. 9, pp. 1062–1066. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01528264>.
25. Mukhina L. G. Calculation of creep characteristics from experimental data using the non-parametric alignment method, In: *Teoretiko-eksperimental'nyi metod issledovaniia v konstruksiiakh* [Theoretical and Experimental Method of Research in Construction]. Kuybyshev, KuAI, 1984, pp. 86–94 (In Russian).
26. Draper N. R., Smith H. *Applied Regression Analysis*. New York, John Wiley and Sons, 1998, xix+716 pp. DOI: <https://doi.org/10.1002/9781118625590>.
27. Demidenko E. Z. *Lineinaia i nelineinaia regressii* [Linear and Nonlinear Regressions]. Moscow, Finansy i statistika, 1981, 302 pp.

28. Zoteev V. E. Parametrical identification of creep's curve on the basis of stochastic difference equations, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2008, no. 1, pp. 90–95 (In Russian). EDN: JTBCNZ. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu578>.
29. Zoteev V. E., Makarov R. Yu. A numerical method for determining the parameters of the first stage of creep deformation, *Sovremennye tekhnologii. Sistemnyi analiz. Modelirovanie* [Modern Technologies. System Analysis. Modeling], 2017, no. 4, pp. 40–48 (In Russian). EDN: YLXFDY. DOI: [https://doi.org/10.26731/1813-9108.2017.4\(56\).40-48](https://doi.org/10.26731/1813-9108.2017.4(56).40-48).
30. Zoteev V. E. A numerical method of nonlinear estimation based on difference equations, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 4, pp. 669–701 (In Russian). EDN: YSDYZN. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1643>.
31. Bulygin I. P., Vlasova P. T., Gorbodey A. T. et al. *Atlas diagramm rastiazheniia pri vysokikh temperaturakh, krivyykh polzuchesti i dlitel'noi prochnosti stalei i splavov dlia dvigatelei* [Atlas of Tensile Diagrams at High Temperatures, Curves of Creep and Long-Term Strength of Steels for Engines]. Moscow, Oborongiz, 1957, 174 pp. (In Russian)