



УДК 519.868

Стохастическая модель прогнозирования динамики валового регионального продукта и производственных ресурсов региона

Л. А. Сараев, А. В. Юкласова

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С. П. Королева,
Россия, 443086, Самара, ул. Московское ш., 34.

Аннотация

Представлена стохастическая модель прогнозирования динамики валового регионального продукта (ВРП), разработанная на основе статистических данных по Самарской области за период 1998–2023 годы. Модель позволяет оценить влияние инвестиций на развитие региональной экономики. Для описания динамики ВРП предложено стохастическое дифференциальное уравнение баланса, связывающее показатели ВРП с объемами регионального производственного ресурса (РПР). В рамках исследования проведена оценка объемов РПР, построены теоретические траектории динамики ВРП и РПР, а также получены кривые математических ожиданий их роста. Результаты численного анализа модели демонстрируют высокую степень соответствия эмпирическим данным.

Ключевые слова: валовой региональный продукт, региональные производственные ресурсы, инвестиционный коэффициент, коэффициент амортизации, производственная функция Кобба–Дугласа, стохастическое дифференциальное уравнение, стохастические траектории.

Получение: 6 сентября 2024 г. / Исправление: 21 января 2025 г. /
Принятие: 21 февраля 2025 г. / Публикация онлайн: 6 мая 2025 г.

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ Краткое сообщение

© Коллектив авторов, 2025

© СамГТУ, 2025 (составление, дизайн, макет)

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International \(https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru)

Образец для цитирования

Сараев Л. А., Юкласова А. В. Стохастическая модель прогнозирования динамики валового регионального продукта и производственных ресурсов региона // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2025. Т. 29, № 2. С. 390–400. EDN: ATCNTU. DOI: [10.14498/vsgtu2128](https://doi.org/10.14498/vsgtu2128).

Сведения об авторах

Леонид Александрович Сараев  <https://orcid.org/0000-0003-3625-5921>

доктор физико-математических наук, профессор; профессор; кафедра математики и бизнес-информатики; e-mail: saraev_leo@mail.ru

Анастасия Валерьевна Юкласова  <https://orcid.org/0009-0007-9684-8864>

кандидат экономических наук, доцент; доцент; кафедра государственного и муниципального управления; e-mail: yuklasova.anasta@mail.ru

Введение. Устойчивый экономический рост регионов составляет основу стабильного развития национальной экономики в целом.

Разработка экономико-математических методов прогнозирования динамики регионального развития представляет собой одну из наиболее актуальных задач современной экономической теории. Решение данной задачи позволяет осуществлять комплексный анализ бизнес-процессов, определять оптимальные параметры производства валового регионального продукта (ВРП) и объемов региональных производственных ресурсов (РПР).

Фундаментальные положения теории экономического роста систем подробно изложены в работах [1, 2 и др.].

На основе этих исследований разработан широкий спектр моделей экономического роста, учитывающих влияние технологических инноваций и информационных технологий [3–13].

Региональная экономическая динамика по своей природе имеет стохастический характер, обусловленный взаимодействием инвестиционных потоков и амортизационных отчислений. В связи с этим основным математическим аппаратом для моделирования экономического развития предприятий выступает теория стохастических дифференциальных уравнений и их систем [14–16].

Целью настоящего исследования является разработка инновационной стохастической модели прогнозирования динамики ВРП и РПР под воздействием инвестиционных факторов.

1. Постановка задачи. Рассмотрим объем валового регионального продукта V , определяемый объемами производственных ресурсов региона. К указанным ресурсам относятся: основной капитал, производственные фонды, трудовые ресурсы, материальные затраты, применяемые технологии и инновации.

Данные ресурсы могут быть агрегированы в интегральный показатель — региональный производственный ресурс, характеризуемый объемом производственного фактора Q .

Объем ВРП региона V задается производственной функцией от фактора производства Q . В рамках исследования ограничимся классической производственной функцией Кобба–Дугласа:

$$V = PQ^a, \quad (1)$$

где P — стоимость продукции на единицу ресурса; a — коэффициент эластичности выпуска по ресурсу Q , причем $0 \leq a \leq 1$.

Объем производственного фактора $Q = Q(t)$ представляет собой непрерывно дифференцируемую и ограниченную функцию на временной полуоси $t \in [0, \infty)$.

Величина РПР удовлетворяет ограничению

$$Q_0 \leq Q(t) \leq Q_\infty,$$

где Q_0 — известное начальное значение производственного фактора; Q_∞ — его предельное значение, подлежащее определению.

Для анализа динамики ВРП региона необходимо сформулировать уравнение баланса для объема производственного фактора $Q = Q(t)$.

Приращение объема РПР $\Delta Q = Q(t + \Delta t) - Q(t)$ за малый временной интервал Δt может быть представлено в виде трех компонент:

$$\Delta Q(t) = \Delta Q^A(t) + \Delta Q^I(t) + \Delta Q^W(t), \quad (2)$$

где $\Delta Q^A(t)$ — уменьшение объема производственного фактора вследствие амортизации; $\Delta Q^I(t)$ — прирост объема производственного фактора за счет инвестиций в промышленный комплекс региона; $\Delta Q^W(t)$ — стохастическая компонента, отражающая случайные колебания РПР.

Компонента амортизации за интервал Δt описывается выражением

$$\Delta Q^A(t) = -AQ(t)\Delta t, \quad (3)$$

где A — коэффициент амортизации, определяющий долю выбывающего объема производственного фактора в единицу времени.

Приращение инвестиционной составляющей за временной интервал Δt определяется соотношением

$$\Delta Q^I(t) = I(t)\Delta t = BV(t)\Delta t = BPQ^a(t)\Delta t, \quad (4)$$

где $I(t)$ — объем инвестиций в момент времени t ; B — коэффициент капиталообразования (доля ВРП, направляемая в инвестиции); $V(t)$ — объем ВРП, вычисляемый согласно производственной функции (1).

Стохастическая компонента $\Delta Q^W(t)$, отражающая естественную волатильность инвестиционных процессов, моделируется стандартным винеровским процессом [15, 16]:

$$\Delta Q^W(t) = \rho(Q(t) - Q_0) \left(1 - \frac{Q(t)}{Q_\infty}\right) \Delta w, \quad (5)$$

где w — стандартный винеровский процесс; $\Delta w = \varepsilon \sqrt{\Delta t}$ — приращение винеровского процесса; ρ — параметр волатильности (СКО случайных колебаний РПР); $\varepsilon \sim N(0, 1)$ — стандартная нормальная случайная величина.

Из структуры уравнения (5) следует важное свойство модели: в окрестностях начального Q_0 и предельного Q_∞ значений производственного фактора система демонстрирует квазидетерминированное поведение.

Подстановка выражений (3), (4) и (5) в уравнение баланса (2) приводит к следующему соотношению:

$$\Delta Q(t) = (-AQ(t) + BPQ^a(t))\Delta t + \rho(Q(t) - Q_0) \left(1 - \frac{Q(t)}{Q_\infty}\right) \Delta w. \quad (6)$$

Выполняя предельный переход при $\Delta t \rightarrow 0$ и $\Delta w \rightarrow 0$ в соотношении (6), получаем стохастическое дифференциальное уравнение в форме Ито [14]:

$$dQ(t) = S(t)dt + Z(t)dw, \quad (7)$$

где

$$S(t) = -AQ(t) + BPQ^a(t), \quad (8)$$

$$Z(t) = \rho(Q(t) - Q_0) \left(1 - \frac{Q(t)}{Q_\infty}\right), \quad (9)$$

причем $S(t)$ представляет собой функцию сноса, а $Z(t)$ — функцию волатильности.

Начальное условие для уравнения (7) задается следующим образом:

$$Q(0) = Q_0. \quad (10)$$

2. Стохастические траектории динамики ВРП. Анализ структуры стохастического дифференциального уравнения баланса (7) позволяет установить, что рост объема производственного фактора $Q(t)$ происходит при выполнении условия $dQ(t) \geq 0$, что соответствует случаю, когда объем внутренних инвестиций превышает амортизационные отчисления.

Рост объема прекращается при достижении предельного значения Q_∞ , когда инвестиции компенсируют амортизационные потери. В окрестности этой предельной точки случайный процесс становится квазидетерминированным, что позволяет определить Q_∞ из уравнения

$$-AQ_\infty + BPQ_\infty^a = 0,$$

решение которого имеет вид

$$Q_\infty = \left(\frac{BP}{A}\right)^{1/(1-a)}. \quad (11)$$

Численное решение стохастического дифференциального уравнения (7) с коэффициентами (8), (9) при начальном условии (10) реализуется на временном интервале $[t_0, t_n]$, дискретизированном точками $(t_0 < t_1 < \dots < t_n)$, с использованием метода Эйлера—Маруямы [14]:

$$\begin{cases} Q_{i+1} = Q_i + S_i \Delta t_i + \varepsilon_i Z_i \sqrt{\Delta t_i}, \\ S_i = -AQ_i + BPQ_i^a, \\ Z_i = \rho(Q_i - Q_0) \left(1 - \frac{Q_i}{Q_\infty}\right), \end{cases} \quad (12)$$

где $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ — шаг дискретизации; $Q_i = Q(t_i)$, $S_i = S(t_i)$, $Z_i = Z(t_i)$ — значения соответствующих функций; ε_i — реализация стандартной нормальной случайной величины на интервале $[t_{i-1}, t_i]$.

Реализация алгоритма (12) позволяет получить набор случайных точек $\{(t_i, Q_i)\}_{i=0}^n$ и соответствующие стохастические траектории динамики производственного фактора.

Для определения математического ожидания процесса $Q(t)$ проведем статистическое усреднение уравнения (7) с учетом выражений (8) и (9):

$$\frac{d\langle Q \rangle}{dt} = -A\langle Q \rangle + BP\langle Q^a \rangle, \quad (13)$$

где $\langle \cdot \rangle$ обозначает оператор математического ожидания.

При вычислении статистического момента $\langle Q^a \rangle$ методом последовательных приближений возникает проблема замыкания бесконечной цепочки уравнений. Для ее решения введем следующее предположение о характере флуктуаций:

$$Q(t) - \langle Q \rangle = \xi \langle Q \rangle \varepsilon(t), \quad (14)$$

где $\varepsilon(t)$ — стандартный случайный процесс с нулевым средним, а безразмерный коэффициент пропорциональности ξ задается выражением

$$\xi = \rho \left(1 - \frac{Q_0}{\langle Q \rangle} \right) \left(1 - \frac{\langle Q \rangle}{Q_\infty} \right). \quad (15)$$

Для вычисления величины $Q^a = \langle Q \rangle^a (1 + \xi \cdot \varepsilon)^a$ воспользуемся соотношениями (14) и (15), применив разложение в биномиальный ряд при условии малых флуктуаций $|\xi \varepsilon| < 1$:

$$Q^a = \langle Q \rangle^a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a(a-1)(a-2) \cdots (a-k+1)}{k!} \xi^k \varepsilon^k.$$

Ограничиваясь квадратичными членами разложения, получаем

$$Q^a \approx \langle Q \rangle^a \left(1 + a\xi\varepsilon + \frac{a(a-1)}{2} \xi^2 \varepsilon^2 \right). \quad (16)$$

Статистическое усреднение выражения (16) с учетом свойств случайной величины ε ($\langle \varepsilon \rangle = 0$, $\langle \varepsilon^2 \rangle = 1$) дает

$$\langle Q^a \rangle = \langle Q \rangle^a \left(1 + \frac{a(a-1)}{2} \xi^2 \right). \quad (17)$$

Подстановка (17) в уравнение (13) приводит к замкнутому дифференциальному уравнению для математического ожидания:

$$\frac{d\langle Q \rangle}{dt} = -A\langle Q \rangle + BP\langle Q \rangle^a \left(1 + \frac{a(a-1)}{2} \xi^2 \right), \quad (18)$$

где коэффициент ξ определяется согласно (15). Начальное условие сохраняется в виде (10).

В детерминированном приближении, когда флуктуациями можно пренебречь ($\xi \rightarrow 0$), уравнение (18) упрощается до вида

$$\frac{d\langle Q \rangle}{dt} = -A\langle Q \rangle + BP\langle Q \rangle^a. \quad (19)$$

Решение задачи Коши для уравнения (19) с начальным условием (10) имеет аналитическое представление:

$$\langle Q \rangle(t) = (Q_\infty^{1-a} + (Q_0^{1-a} - Q_\infty^{1-a})e^{-A(1-a)t})^{1/(1-a)}, \quad (20)$$

где Q_∞ определяется выражением (11).

Соответствующее среднее значение объема ВРП региона вычисляется по формуле

$$\langle V \rangle(t) = P(Q_{\infty}^{1-a} + (Q_0^{1-a} - Q_{\infty}^{1-a})e^{-A(1-a)t})^{a/(1-a)}.$$
 (21)

Применим полученные теоретические результаты (уравнения (12), (13), (18)–(21)) для анализа динамики ВРП и РПР Самарской области.

Исходные статистические данные¹ об изменении объема ВРП за период 1998–2023 гг. представлены в табл. 1, где $t = T - 1998$ — относительный год наблюдения; $T \geq 1998$ — календарный год.

Методом наименьших квадратов на основе данных табл. 1 и теоретической зависимости (21) были оценены параметры производственной функции: $P = 6.4928$, $a = 0.81454$, $Q_0 = 17.724$.

Таблица 1

Динамика валового регионального продукта $V(t)$ Самарской области в период 1998–2023 гг.
[Evolution of the Gross Regional Product $V(t)$ in Samara Region (1998–2023)]

Year	t	V , mln RUB	Year	t	V , mln RUB	Year	t	V , mln RUB
1998	0	67.520	2007	9	584.969	2016	18	1364.822
1999	1	105.581	2008	10	699.296	2017	19	1449.006
2000	2	140.407	2009	11	584.000	2018	20	1625.559
2001	3	180.049	2010	12	695.651	2019	21	1773.989
2002	4	206.320	2011	13	834.149	2020	22	1781.909
2003	5	256.555	2012	14	937.435	2021	23	2157.662
2004	6	327.119	2013	15	1048.546	2022	24	2378.451
2005	7	401.812	2014	16	1149.148	2023	25	2746.426
2006	8	487.714	2015	17	1264.910	2024	26	—

Таблица 2

Динамика регионального производственного ресурса $Q(t)$ Самарской области в период 1998–2023 гг. [Evolution of the Regional Productive Capacity $Q(t)$ in Samara region (1998–2023)]

Year	t	Q , mln RUB	Year	t	Q , mln RUB	Year	t	Q , mln RUB
1998	0	17.724	2007	9	251.058	2016	18	710.389
1999	1	30.685	2008	10	312.575	2017	19	764.555
2000	2	43.543	2009	11	250.547	2018	20	880.462
2001	3	59.089	2010	12	310.577	2019	21	980.167
2002	4	69.844	2011	13	388.128	2020	22	985.542
2003	5	91.267	2012	14	447.936	2021	23	1246.504
2004	6	122.990	2013	15	513.971	2022	24	1404.877
2005	7	158.316	2014	16	575.158	2023	25	1676.243
2006	8	200.828	2015	17	647.086	2024	26	—

Примечание: Данные представлены в фактических ценах соответствующих лет. Периодизация дана в абсолютных (календарные годы) и относительных ($t = 0$ для 1998 года) показателях.

Note: Data are presented in current prices of respective years. The periodization is given in both absolute (calendar years) and relative terms ($t = 0$ for 1998).

¹Статистические данные получены с официального сайта Территориального органа Федеральной службы государственной статистики по Самарской области: «Валовой региональный продукт» [Электронный ресурс]. URL: <https://63.rosstat.gov.ru/grp> (дата обращения: 05.11.2024).

С учетом полученных оценок производственная функция (1) принимает конкретный вид:

$$V(t) = 6.4928 \cdot Q^{0.81454}(t). \quad (22)$$

С помощью формулы (22) вычислены прогнозные значения объемов регионального производственного ресурса Q , представленные в табл. 2.

На рис. 1 показаны траектория роста объема валового регионального продукта $V(t)$, построенная по данным табл. 1, и прогнозная траектория роста объема регионального производственного ресурса $Q(t)$, рассчитанная по данным табл. 2.

На рис. 2 представлено сравнение стохастических траекторий роста объема валового регионального продукта $V(t)$ и объема регионального производственного ресурса $Q(t)$, полученных численной реализацией алгоритма (12) и расчетами по формуле (22), со статистическими данными табл. 1 и 2.

На рис. 3 приведено сравнение математических ожиданий роста объема валового регионального продукта $\langle V \rangle$ и объема регионального производственного ресурса $\langle Q \rangle$, рассчитанных путем численного решения задачи Коши (18), (10) с использованием формулы (22), со статистическими данными табл. 1 и табл. 2.

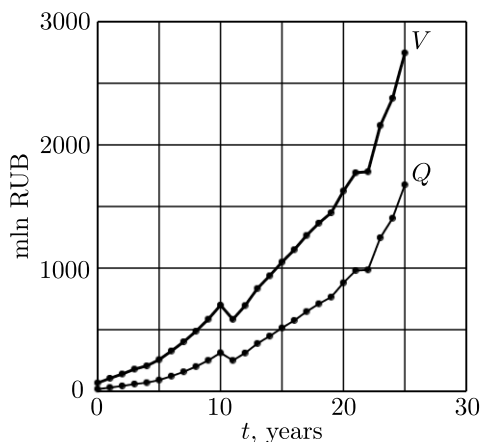


Рис. 1. Эмпирическая траектория роста валового регионального продукта V (по данным табл. 1) и прогнозируемая траектория роста регионального производственного ресурса Q (по данным табл. 2)

[Figure 1. Empirical trajectory of gross regional product V growth (according to Table 1) and predicted trajectory of regional production resource Q growth (according to Table 2)]

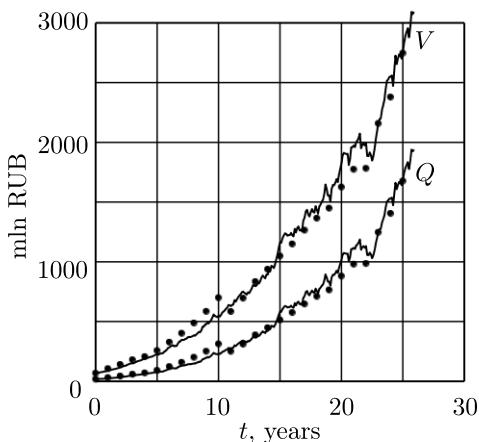
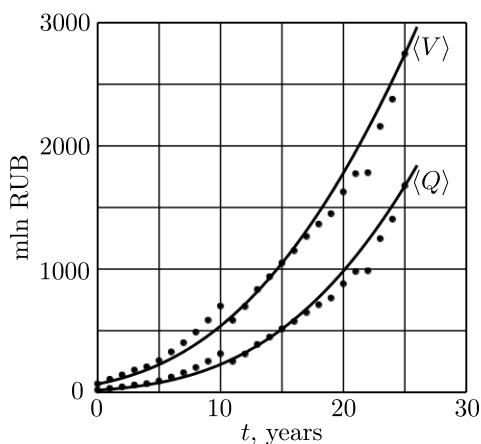


Рис. 2. Стохастические траектории роста валового регионального продукта $V(t)$ и регионального производственного ресурса $Q(t)$, полученные численным моделированием по алгоритму (12) и расчетами по формуле (22); точки — статистические данные из табл. 1 и табл. 2

[Figure 2. Stochastic growth trajectories of gross regional product $V(t)$ and regional production resource $Q(t)$ obtained through: numerical simulation using algorithm (12), and calculations via formula (22); points represent statistical data from Tables 1 and 2]

Рис. 3. Математические ожидания $\langle V \rangle$ и $\langle Q \rangle$, полученные численным решением задачи Коши (18), (10) с использованием (22); точки — статистические данные из табл. 1 и табл. 2

[Figure 3. Mathematical expectations $\langle V \rangle$ and $\langle Q \rangle$ obtained by numerical solution of the Cauchy problem (18), (10) using (22); points represent statistical data from Tables 1 and 2]



В расчетах использованы следующие значения параметров модели:

$$P = 6.4928, \quad a = 0.81454, \quad A = 0.1, \quad B = 0.12, \\ \rho = 0.1, \quad Q_0 = 17.724, \quad Q_\infty = 64187.494.$$

Закключение. В работе предложена стохастическая модель прогнозирования динамики валового регионального продукта, разработанная на основе статистических данных Самарской области за 1998-2023 гг. Модель позволяет оценивать объемы регионального производственного ресурса с учетом стохастических факторов, строить теоретические траектории динамики ВРП и РПР и прогнозировать математические ожидания роста экономических показателей.

Численное моделирование подтвердило адекватность модели — результаты демонстрируют высокую степень соответствия статистическим данным. Полученные результаты могут быть использованы для долгосрочного прогнозирования регионального экономического развития, оценки эффективности инвестиционных программ и анализа устойчивости региональной экономики к стохастическим колебаниям.

Перспективы дальнейших исследований связаны с расширением модели для учета дополнительных экономических факторов и применением к другим регионам.

Конкурирующие интересы. У нас нет конфликта интересов в отношении авторства и публикации этой статьи.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Harrod R. F. *The Trade Cycle*. Oxford: Clarendon Press, 1936. 248 pp.
2. Dykas P., Tokarski T., Wisla R. *The Solow Model of Economic Growth. Application to Contemporary Macroeconomic Issues* / Routledge Studies in Economic Theory, Method and Phi-

- losophy. London: Routledge, 2023. xvi+248 pp. <https://hdl.handle.net/10419/290597>. DOI: <https://doi.org/10.4324/9781003323792>.
3. Denison E. F. The contribution of capital to economic growth // *The American Economic Review*, 1980. vol. 70, no. 2. pp. 220–224. <http://www.jstor.org/stable/1815471>.
4. Lucas R. E. On the mechanics of economic development // *Journal of Monetary Economics*, 1988. vol. 22, no. 1. pp. 3–42. DOI: [https://doi.org/10.1016/0304-3932\(88\)90168-7](https://doi.org/10.1016/0304-3932(88)90168-7).
5. Romer R. M. Endogenous technological change // *Journal of Political Economy*, 1990. vol. 98, no. 5. pp. S71–S102. <http://www.jstor.org/stable/2937632>.
6. Grossman G. M., Helpman E. *Innovation and Growth in the Global Economy*. Cambridge, Massachusetts, London: MIT Press, 1991. xiv+359 pp.
7. Barro R. J., Sala-i-Martin X. *Economic Growth*. Cambridge, Massachusetts, London: MIT Press, 1995. xvii+654 pp.
8. Bruno M., Easterly W. Inflation crises and long-run growth // *Journal of Monetary Economics*. vol. 41, no. 1. pp. 3–26. DOI: [https://doi.org/10.1016/s0304-3932\(97\)00063-9](https://doi.org/10.1016/s0304-3932(97)00063-9).
9. Gong G., Greiner A., Semmler W. The Uzawa–Lucas model without scale effects: Theory and empirical evidence // *Structural Change and Economic Dynamics*, 2004. vol. 15, no. 4. pp. 401–420. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.strueco.2003.10.002>.
10. Королев А. В., Матвеев В. Д. О структуре равновесных нестационарных траекторий в модели эндогенного роста Лукаса // *Автоматика и телемеханика*, 2006. № 4. С. 106–114. EDN: [NCSKJH](#).
11. Кузнецов Ю. А., Мичасова О. В. Сравнительный анализ применения пакетов имитационного моделирования и систем компьютерной математики для анализа моделей теории экономического роста // *Экономический анализ: теория и практика*, 2007. № 5. С. 23–30. EDN: [HWIKHF](#).
12. Кузнецов Ю. А., Мичасова О. В. Обобщенная модель экономического роста с учетом накопления человеческого капитала // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления*, 2012. № 4. С. 46–57. EDN: [PFQNBТ](#).
13. Прасолов А. В. *Математические методы экономической динамики*. СПб.: Лань, 2015. 352 с. EDN: [VLRGLN](#).
14. Itô K., McKean H. P. *Diffusion Processes and Their Sample Paths* / Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. vol. 125. Berlin: Springer-Verlag, 1974. xiv+321 pp.
15. Соловьев В. И. *Экономико-математическое моделирование рынка программного обеспечения*. М.: Вега–Инфо, 2009. 176 с. EDN: [QTSXXZ](#).
16. Сараев А. Л., Сараев Л. А. Математические модели стохастической динамики развития предприятий // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 2. С. 343–364. EDN: [MLTMBA](#). DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1700>.

MSC: 91B64, 91B70, 37N40, 62P20

Stochastic model for forecasting the dynamics of gross regional product and regional production resources

L. A. Saraev, A. V. Yuklasova

Samara National Research University,

34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Abstract

The article presents a stochastic model for forecasting dynamics of gross regional product (GRP), developed using statistical data from Samara Region for the period 1998–2023. The model enables assessment of investment impact on regional economic development. To describe GRP dynamics, we propose a stochastic differential balance equation that relates GRP indicators to regional production resource (RPR) volumes. Within the study, we have: (1) estimated RPR volumes, (2) constructed theoretical trajectories of GRP and RPR dynamics, and (3) derived mathematical expectation curves for their growth. Numerical analysis demonstrates the model's high consistency with empirical data.

Keywords: gross regional product, regional production resources, investment coefficient, depreciation rate, Cobb–Douglas production function, stochastic differential equation, stochastic trajectories.

Received: 5th November, 2024 / Revised: 21st March, 2025 /

Accepted: 15th April, 2025 / First online: 3rd June, 2025

Competing interests. We have no conflicts of interest concerning the authorship and publication of this article.

Author contributions and accountability. All authors participated in developing the article concept and writing the manuscript. The authors take full responsibility for

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes Short Communication

© The Author(s), 2025

© Samara State Technical University, 2025 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Saraev L. A., Yuklasova L. A. Stochastic model for forecasting the dynamics of gross regional product and regional production resources, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2025, vol. 29, no. 2, pp. 390–400. EDN: [ATCNTU](https://www.edn.ru/ATCNTU). DOI: [10.14498/vsgtu2128](https://doi.org/10.14498/vsgtu2128) (In Russian).

Authors' Details:

Leonid A. Saraev  <https://orcid.org/0000-0003-3625-5921>

Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Professor; Dept. of Mathematics and Business Informatics; e-mail: saraev_leo@mail.ru

Anastasiya V. Yuklasova  <https://orcid.org/0009-0007-9684-8864>

Cand. Econ. Sci., Associate Professor; Associate Professor; Dept. of State and Municipal Administration; e-mail: yuklasova.anasta@mail.ru

submitting the final manuscript for publication. The final version of the manuscript was approved by all authors.

Funding. The research was conducted without external funding.

References

1. Harrod R. F. *The Trade Cycle*. Oxford, Clarendon Press, 1936, 248 pp.
2. Dykas P., Tokarski T., Wisla R. *The Solow Model of Economic Growth. Application to Contemporary Macroeconomic Issues*, Routledge Studies in Economic Theory, Method and Philosophy. London, Routledge, 2023, xvi+248 pp. <https://hdl.handle.net/10419/290597>. DOI: <https://doi.org/10.4324/9781003323792>.
3. Denison E. F. The contribution of capital to economic growth, *The American Economic Review*, 1980, vol. 70, no. 2, pp. 220–224. <http://www.jstor.org/stable/1815471>.
4. Lucas R. E. On the mechanics of economic development, *Journal of Monetary Economics*, 1988, vol. 22, no. 1, pp. 3–42. DOI: [https://doi.org/10.1016/0304-3932\(88\)90168-7](https://doi.org/10.1016/0304-3932(88)90168-7).
5. Romer R. M. Endogenous technological change, *Journal of Political Economy*, 1990, vol. 98, no. 5, pp. S71–S102. <http://www.jstor.org/stable/2937632>.
6. Grossman G. M., Helpman E. *Innovation and Growth in the Global Economy*. Cambridge, Massachusetts, London, MIT Press, 1991, xiv+359 pp.
7. Barro R. J., Sala-i-Martin X. *Economic Growth*. Cambridge, Massachusetts, London, MIT Press, 1995, xvii+654 pp.
8. Bruno M., Easterly W. Inflation crises and long-run growth, *Journal of Monetary Economics*, vol. 41, no. 1, pp. 3–26. DOI: [https://doi.org/10.1016/s0304-3932\(97\)00063-9](https://doi.org/10.1016/s0304-3932(97)00063-9).
9. Gong G., Greiner A., Semmler W. The Uzawa–Lucas model without scale effects: Theory and empirical evidence, *Structural Change and Economic Dynamics*, 2004, vol. 15, no. 4, pp. 401–420. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.strueco.2003.10.002>.
10. Korolev A. V., Matveenkov V. D. Structure of equilibrium time-varying trajectories in the Lucas endogenous growth model, *Automation and Remote Control*, 2006, vol. 67, no. 4, pp. 624–633. EDN: LJYCZD. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0005117906040102>.
11. Kuznetsov Yu. A., Michasova O. V. Comparative analysis of simulation modeling packages and computer mathematics systems for economic growth theory models, *Economic Analysis: Theory and Practice*, 2007, no. 5, pp. 23–30 (In Russian). EDN: HWIKHF.
12. Kuznetsov Yu. A., Michasova O. V. The generalized model of economic growth with human capital accumulation, *Vestnik Sankt-Peterburgskogo Universiteta, Prikladnaya Matematika, Informatika, Protsessy Upravleniya*, 2012, no. 4, pp. 46–57 (In Russian). EDN: PFQNB T.
13. Prasolov A. V. *Matematicheskiye metody ekonomicheskoy dinamiki* [Mathematical Methods in Economic Dynamics]. St. Petersburg, Lan', 2015, 352 pp. (In Russian). EDN: VLRGLN.
14. Itô K., McKean H. P. *Diffusion Processes and Their Sample Paths*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 125. Berlin, Springer-Verlag, 1974, xiv+321 pp.
15. Solov'ev V. I. *Ekonomiko-matematicheskoye modelirovaniye rynka programmnogo obespecheniya* [Economic-Mathematical Modeling of the Software Market]. Moscow, Vega–Info, 2009, 176 pp. (In Russian). EDN: QTSXXZ.
16. Saraev A. L., Saraev L. A. Stochastic calculation of curves dynamics of enterprise, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 2, pp. 343–364. EDN: MLT MBA. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1700>.