



УДК 517.968.7

Определение динамических режимов в эредитарной двумодовой модели динамо

Е. А. Казаков, Г. М. Водинчар

Институт космифизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН,
Россия, 684034 Камчатский край, Елизовский район, с. Паратунка, ул. Мирная, 7.

Аннотация

Работа посвящена анализу результатов вычислительных экспериментов с эредитарной динамической системой, моделирующей двухмодовое гидромагнитное динамо с памятью. В статье проведено численное исследование динамических режимов, возникающих при вариации управляющих параметров данной системы. Эредитарная динамическая система представлена в виде системы интегро-дифференциальных уравнений.

Одним из ключевых методов исследования динамических режимов является анализ показателей Ляпунова. Для применения данного метода система интегро-дифференциальных уравнений была сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. В работе приводятся описание соответствующего класса ядер и результат редукции.

В качестве альтернативного подхода к определению динамических режимов использовался тест 0–1. Проведено сравнение результатов, полученных с помощью теста 0–1 и показателей Ляпунова для частного случая, которое показало их качественное соответствие. В дальнейшем исследовании динамических режимов интегро-дифференциальной системы применялся преимущественно тест 0–1.

Следует отметить, что данный метод позволяет идентифицировать лишь регулярные (периодические и асимптотически стационарные) либо хаотические режимы динамики системы. Для более детальной классификации регулярных режимов предложен дополнительный метод, основанный на анализе характеристик автокорреляционной функции временного ряда решения интегро-дифференциальной системы. Эмпирически установлено, что вычисление математического ожидания автокорреляционной функции позволяет различать периодические/квазипериодические и асимптотически стационарные режимы.

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ
Научная статья

© Коллектив авторов, 2025

© СамГТУ, 2025 (составление, дизайн, макет)

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Казаков Е. А., Водинчар Г. М. Определение динамических режимов в эредитарной двумодовой модели динамо // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2025. Т. 29, № 2. С. 319–333. EDN: **LWBCIR**. DOI: [10.14498/vsgtu2130](https://doi.org/10.14498/vsgtu2130).

Сведения об авторах

Евгений Анатольевич Казаков  <https://orcid.org/0000-0001-7235-4148>

младший научный сотрудник; лаб. электромагнитных излучений; e-mail: kazakov@ikir.ru

Глеб Михайлович Водинчар  <https://orcid.org/0000-0002-5516-1931>

кандидат физико-математических наук, доцент; ведущий научный сотрудник; лаб. моделирования физических процессов; e-mail: vodinchar@ikir.ru

Исследованы случаи как мгновенной, так и запаздывающей эредитарной обратной связи. Результаты моделирования демонстрируют, что рассматриваемая модель воспроизводит ряд динамических режимов, характерных для реальных космических динамо-систем.

Ключевые слова: эредитарная динамо-система, тест 0–1, карта динамических режимов, хаотический режим, регулярный режим, автокорреляционный анализ.

Получение: 14 ноября 2024 г. / Исправление: 11 мая 2025 г. /

Принятие: 26 мая 2025 г. / Публикация онлайн: 2 июня 2025 г.

Введение. Существование крупномасштабных магнитных полей космических объектов (планет, звезд и галактик) традиционно объясняется действием механизма гидромагнитного динамо [1, 2]. Данный механизм предполагает генерацию магнитного поля в процессе эволюции системы, содержащей сплошную электропроводящую среду (жидкий металл или плазму). В простейшем случае для космических динамо-систем этот механизм реализуется посредством взаимной генерации тороидальной и полоидальной компонент магнитного поля, обусловленной крупномасштабными движениями проводящей среды и мелкомасштабными турбулентными пульсациями [1, 3]. Необходимым условием является наличие начальной намагниченности среды, создаваемой внешним (затравочным) магнитным полем.

В теории динамо существенную роль играет обратная связь, проявляющаяся во влиянии растущего магнитного поля на процесс его генерации, что приводит к подавлению последнего и установлению конечной величины поля. Физической основой данной обратной связи выступает сила Лоренца, модифицирующая движение проводящей среды. Полная система уравнений динамо включает: 1) уравнение движения среды с учетом силы Лоренца и 2) уравнение магнитной индукции, описывающее генерацию поля. Нелинейный по скорости и магнитному полю характер этих уравнений в сочетании с необходимостью учета начальных и граничных условий делает их решение чрезвычайно сложной вычислительной задачей. Особо следует подчеркнуть, что адекватное описание α -эффекта (генерации крупномасштабного магнитного поля посредством нелинейного взаимодействия мелкомасштабных турбулентных пульсаций) требует учета нелокальности и памяти (эредитарности) системы [4, 5].

Прямое численное моделирование полной системы уравнений динамо сопряжено со значительными вычислительными затратами. Для моделирования на временных масштабах, сопоставимых с продолжительностью существования космических объектов, приходится ограничиваться маломодовыми приближениями. Наиболее радикальное упрощение приводит к двумодовым моделям. Примечательно, что даже в рамках столь существенного пространственного упрощения модели с памятью позволяют воспроизводить динамические режимы, аналогичные наблюдаемым в природных системах, включая такие характеристики, как фрактальность шкалы полярности магнитного поля и степенное распределение времени между инверсиями.

Поэтому разработка и исследование малоразмерных динамических систем с памятью, моделирующих процесс генерации магнитных полей на феноменологическом уровне, представляют собой актуальное направление в развитии

теории космических динамо-систем.

В работах [6–8] предложена двумодовая эредитарная модель динамо, описываемая следующей системой интегро-дифференциальных уравнений в безразмерных переменных:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -\eta x + y \left[\eta - \xi s^2 \int_0^t K(t - \tau) Q(x(\tau), y(\tau)) d\tau \right], \\ \frac{dy}{dt} &= -y + x \left[D - \int_0^t K(t - \tau) Q(x(\tau), y(\tau)) d\tau \right], \\ x(0) &= x_0, \quad y(0) = y_0.\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь $x(t)$ и $y(t)$ соответствуют амплитудам тороидальной и полоидальной компонент магнитного поля, а положительные коэффициенты η , s , ξ и D представляют собой управляющие параметры модели. Временной масштаб системы нормирован на характерное время диссипации полоидальной компоненты поля. Физическая интерпретация параметров следующая:

- η^{-1} — характерное безразмерное время диссипации тороидальной компоненты поля;
- s^{-1} — относительная эффективность генерации тороидальной компоненты;
- ξ — отношение эффективностей генерации тороидальной и полоидальной компонент за счет α -эффекта;
- D — относительное динамо-число, определяющее баланс между генерацией и диссипацией ($D > 1$ соответствует преобладанию генерации над диссипацией, $D < 1$ — обратной ситуации).

Образно выражаясь, механизм динамо «активируется» только при $D > 1$.

Ядро $K(\cdot)$ предполагается неотрицательным и интегрируемым на промежутке $[0, +\infty)$. Конкретный вид функции ядра определяет модель подавления α -эффекта в системе (1).

Начальные условия $x(0) = x_0$ и $y(0) = y_0$ задают начальную замагниченность среды затравочным полем.

При $\xi = 0$ получаем динамо-систему, где тороидальная компонента генерируется из полоидальной исключительно за счет крупномасштабного движения среды, а полоидальная компонента — из тороидальной благодаря α -эффекту. Такой механизм принято называть $\alpha\omega$ -динамо. В случае $\xi \neq 0$ α -эффект участвует в генерации обеих компонент поля, что соответствует механизму $\alpha^2\omega$ -динамо.

Вопрос существования и единственности решения системы (1) при произвольных начальных условиях рассмотрен в работе [8].

Физический смысл интегрального члена заключается в учете памяти в обратной связи динамо-системы, когда подавление генерации магнитного поля определяется функцией $Q(x, y)$ от компонент поля, усредненной по предшествующим состояниям. В реальных физических системах такая обратная связь обусловлена силой Лоренца, которая квадратична по полю. Поэтому естественно рассматривать функцию $Q(x, y)$ как квадратичную форму своих аргументов: $Q(x, y) = A(x^2 + y^2) + 2Cxy$, где A и C — постоянные коэффициенты, не равные нулю одновременно.

Частные случаи имеют четкую физическую интерпретацию:

- при $A = 0$ подавление α -эффекта определяется только спиральностью поля $H = xy$;
- при $C = 0$ — только энергией поля $E = x^2 + y^2$;
- если же оба коэффициента отличны от нуля, то в подавлении участвуют как спиральность, так и энергия поля.

Наиболее полное представление о поведении динамической системы дает карта динамических режимов — диаграмма на плоскости параметров системы, где по осям координат отложены управляющие параметры, а различные области соответствуют разным типам динамических режимов.

Реальные космические динамо-системы демонстрируют значительное разнообразие сложных динамических режимов, включая квазистационарные состояния, квазирегулярные и хаотические колебания, всплески активности, вассилляции (колебания вокруг ненулевого уровня), инверсии поля и другие [1, 3].

В современной литературе описаны различные критерии идентификации хаотических режимов. Наиболее простой метод основан на анализе спектра колебаний с помощью преобразования Фурье. Дискретный спектр характерен для периодических и квазипериодических колебаний, тогда как непрерывный спектр свидетельствует либо о хаотическом, либо о случайном характере динамики. Альтернативой Фурье-анализу служит вейвлет-анализ динамических систем. Еще один подход использует отображения Пуанкаре — сечения фазовой траектории некоторой поверхностью. Для случайного процесса отображение Пуанкаре представляет собой облако точек, тогда как квазипериодические и хаотические решения дают линии. Характерной особенностью хаотических режимов является их экспоненциальная чувствительность к малым изменениям начальных условий.

Наиболее надежным методом детектирования хаоса в системах, описываемых дифференциальными уравнениями, считается анализ скорости расхождения траекторий, который количественно оценивается с помощью показателей Ляпунова.

Однако практическое применение этого метода может быть сопряжено со значительными вычислительными трудностями, а для систем интегродифференциальных уравнений сама возможность его использования требует дополнительного обоснования. В связи с этим для исследования режимов в системе (1) целесообразно применять методы, опирающиеся исключительно на фазовые траектории, полученные в численных экспериментах, а не на уравнения системы. Одним из наиболее известных методов такого типа является тест 0–1 [9].

В настоящей работе представлены результаты применения теста 0–1 к системе (1). Проведенные вычислительные эксперименты демонстрируют эффективность данного метода для различения регулярных и хаотических режимов. Однако следует отметить, что тест 0–1 не позволяет дифференцировать типы регулярных режимов — асимптотически стационарный режим и периодические/квазипериодические колебания.

Для решения этой задачи предлагается эмпирическая методика, основанная на анализе характеристик автокорреляционной функции траектории системы. Дополнительно проводится сравнительный анализ обоих подходов для случая, когда система (1) допускает редукцию к дифференциальной форме.

1. Сведение к дифференциальной системе. Интегральный член в системе (1) отражает ключевую особенность модели — наличие эредитарности (памяти). Однако для определенного класса ядер с экспоненциальной асимптотикой возможно исключение интегрального члена путем расширения фазового пространства системы. Более точно: если ядро удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами, то исходная интегро-дифференциальная система (1) может быть сведена к эквивалентной системе обыкновенных дифференциальных уравнений с дополнительными начальными условиями для введенных фазовых переменных. Данное утверждение формализуется следующей теоремой [10].

ТЕОРЕМА. Пусть ядро $K(t)$ является решением дифференциального уравнения

$$a_0 K^{(n)}(t) + a_1 K^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} K'(t) + a_n K(t) = 0$$

с постоянными коэффициентами a_i . Тогда интегральное соотношение

$$z(t) = \int_0^t K(t - \tau) Q(x(\tau), y(\tau)) d\tau$$

эквивалентно задаче Коши для функции $z(t)$:

$$a_0 \frac{d^n z}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} z}{dt^{n-1}} + \dots + a_n z = \sum_{l=1}^n a_{n-l} \sum_{s=0}^{l-1} K^{(s)}(0) \frac{d^{l-1-s}}{dt^{l-1-s}} Q(x(t), y(t)),$$

$$z(0) = 0,$$

$$\left. \frac{d^l z(t)}{dt^l} \right|_{t=0} = \sum_{s=0}^{l-1} K^{(s)}(0) \frac{d^{l-1-s}}{dt^{l-1-s}} Q(x(t), y(t)) \Big|_{t=0}, \quad l = 1, \dots, n-1.$$

Одним из частных случаев ядер $K(t)$, к которым применима данная теорема, являются экспоненциальные ядра вида $K(t) = e^{-bt}$, где $b > 0$. Параметр b^{-1} представляет собой безразмерный временной масштаб ядра, определяющий эффективную длительность памяти в системе. При дополнительном условии $\xi = 0$ модель соответствует механизму $\alpha\omega$ -динамо.

Соответствующая задача Коши принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\eta x + \eta y, & \frac{dy}{dt} &= -y + x(D - z), & \frac{dz}{dt} &= Q(x, y) - bz, \\ x(0) &= x_0, & y(0) &= y_0, & z(0) &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

В частном случае, когда функция подавления $Q(x, y) = xy$ (что соответствует учету только спиральности поля), система (2) сводится к классической системе Лоренца, динамика которой детально изучена [11]. К данной системе применимы как метод показателей Ляпунова, так и тест 0–1.

Для визуализации динамических режимов были построены карты режимов на основе расчета показателей Ляпунова. При фиксированном значении

параметра $\eta = 10$ проводилось варьирование параметров D (от 1 до 100 с шагом 1) и b (от 1 до 2 с шагом 0.1). На рис. 1 представлены результаты для случая $Q(x, y) = xy$.

Следует отметить, что для многих систем, описываемых дифференциальными уравнениями, вычисление показателей Ляпунова представляет собой вычислительно сложную задачу. Эта сложность обусловлена необходимостью при моделировании n -мерной системы дополнительно рассчитывать n систем в вариациях, что существенно увеличивает временные затраты на вычисления [12, 13, 15].

Дополнительные трудности при расчете показателей Ляпунова могут быть связаны с экспоненциальным ростом фазовых переменных и их вариаций для определенных значений управляющих параметров. Кроме того, данный метод требует знания уравнений системы в вариациях. В связи с этим в работе был использован альтернативный подход к определению динамических режимов — тест 0–1.

Для верификации теста 0–1 была построена карта (рис. 2) динамических режимов системы (2). Качественное сравнение результатов, полученных обоими методами, демонстрирует их хорошее соответствие. В дальнейшем анализе динамических режимов системы (1) использовался тест 0–1 как более универсальный метод, применимый как к системам дифференциальных уравнений, так и к интегро-дифференциальным системам.

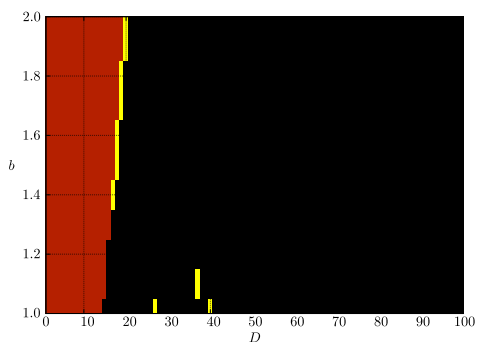


Рис. 1. Карта динамических режимов для системы Лоренца, построенная по показателям Ляпунова: красный цвет — асимптотически стационарные режимы; желтый цвет — периодические режимы; черный цвет — хаотические режимы (онлайн в цвете)

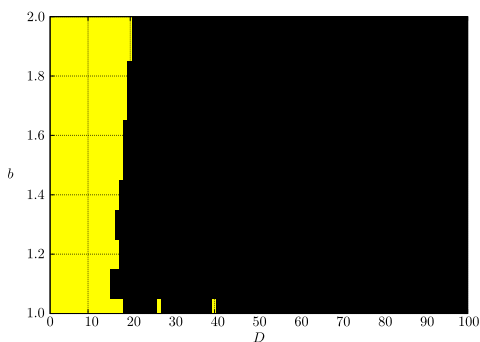


Рис. 2. Карта динамических режимов для системы Лоренца, построенная с использованием теста 0–1: желтый цвет — регулярные режимы (асимптотически стационарные и периодические); черный — хаотические режимы (онлайн в цвете)

[Figure 1. (online in color) Map of dynamic regimes for the Lorenz system obtained using Lyapunov exponents: red color — asymptotically stationary regimes; yellow color — periodic regimes; black color — chaotic regimes]

[Figure 2. (online in color) Map of dynamic regimes for the Lorenz system obtained using 0–1 test: yellow color — regular regimes (asymptotically stationary and periodic); black color — chaotic regimes]

2. Анализ динамических режимов с помощью теста 0–1. В работе рассматриваются два различных типа ядер интеграла подавления: ядра с экспоненциальной асимптотикой $K(t) = t^n e^{-bt}$ и ядра со степенной асимптотикой $K(t) = t^n (1+t)^{-(b+n)}$, где $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, а $b^{-1} > 0$ определяет

временной масштаб ядра.

Физический смысл параметров заключается в следующем:

- при $K(0) \neq 0$ система демонстрирует мгновенный отклик в обратной связи;
- в случае $K(0) = 0$ наблюдается запаздывающий отклик, причем величина задержки возрастает с увеличением параметра n , поскольку максимум ядра смещается в более поздние моменты времени, уменьшая влияние текущих значений компонент поля.

Далее рассматривается случай $\xi = 0$, соответствующий механизму $\alpha\omega$ -динамо, который наиболее характерен для космических динамо-систем. Значение параметра η фиксировано и равно 10, что обусловлено геометрическими особенностями тороидальных и полоидальных компонент — известно, что при одинаковых пространственных масштабах тороидальные моды затухают быстрее полоидальных.

В качестве квадратичной формы подавления выбрана спиральность поля $Q(x, y) = xy$. Этот выбор обусловлен двумя факторами: во-первых, энергия поля (знакоположительная форма) может вызывать чрезмерно сильное подавление; во-вторых, спиральность оказывает существенное влияние на динамику динамо-систем, что подтверждено в работе [5].

Численное моделирование системы (1) проводилось при следующих параметрах: параметр D варьировался от 2 до 220 с шагом 1, а параметр b изменялся от 2 до 5 с шагом 0.1.

На рис. 3 представлена карта динамических режимов для системы с экспоненциальным ядром подавления $K(t) = e^{-bt}$.

Анализ карты позволяет сделать следующие наблюдения. При малых значениях динамо-числа D в системе наблюдаются исключительно регулярные режимы. С увеличением этого параметра происходит переход в хаотическую область, причем граница между регулярными и хаотическими режимами выражена достаточно четко. Однако при дальнейшем росте D наблюдается чередование хаотических и регулярных областей.

Такая структура карты режимов свидетельствует о том, что малые флуктуации параметров D и b способны изменить характер динамики лишь вблизи границ областей. С физической точки зрения флуктуации параметра D соответствуют вариациям скорости крупномасштабных движений и интенсивности турбулентных пульсаций, которые вполне возможны в реальных системах. Таким образом, можно заключить, что система демонстрирует высокую устойчивость типов динамики по отношению к малым возмущениям параметров.

Рассмотрим теперь случай степенного ядра $K(t) = (1 + t)^{-b}$. Результаты численного моделирования представлены на рис. 4. Сравнительный анализ показывает отсутствие качественных различий между поведением системы с экспоненциальным (рис. 3) и степенным (рис. 4) ядрами.

Перейдем к анализу случая ядер с запаздывающим обратным влиянием. В качестве первого примера рассмотрим экспоненциальное ядро вида $K(t) = te^{-bt}$. Результаты численного моделирования для этого случая представлены на рис. 5. Наблюдается принципиально иная картина динамики по сравнению с ядрами без задержки: обширная область параметров демонстрирует сложное переплетение регулярных и хаотических зон. Такая структура

означает, что даже незначительные флуктуации управляющих параметров способны вызывать резкую смену типа динамики системы. С физической точки зрения это соответствует спонтанным перестройкам режима генерации магнитного поля без внешних воздействий. Подобные явления действительно наблюдаются в реальных динамо-системах.

Аналогичное исследование для степенного ядра с запаздыванием $K(t) = t(1+t)^{-(b+1)}$ приведено на рис. 6. Полученная карта режимов качественно аналогична предыдущему случаю.

Обобщая полученные результаты, можно сделать важный вывод: клю-

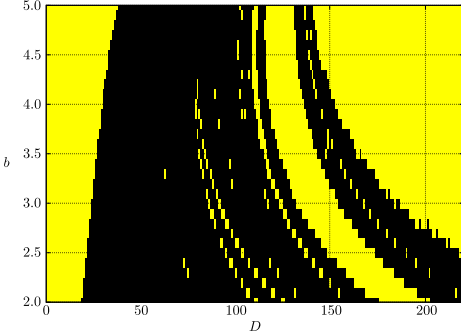


Рис. 3. Карта динамических режимов системы (1) с экспоненциальным ядром $K(t) = e^{-bt}$; цветовая кодировка карты как на рис. 2 (онлайн в цвете)

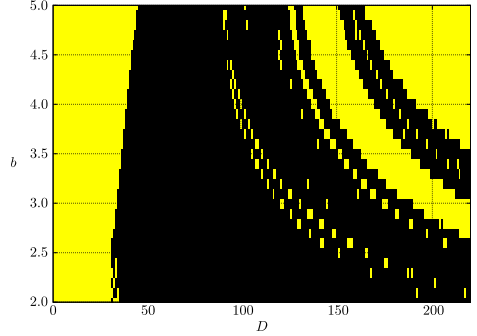


Рис. 4. Карта динамических режимов системы (1) со степенным ядром $K(t) = (1+t)^{-b}$; цветовая кодировка карты как на рис. 2 (онлайн в цвете)

[Figure 3. (online in color) Map of dynamic regimes for system (1) with exponential kernel $K(t) = e^{-bt}$; the color coding follows Fig. 2]

[Figure 4. (online in color) Map of dynamic regimes for system (1) with power-law kernel $K(t) = (1+t)^{-b}$; the color coding follows Fig. 2]

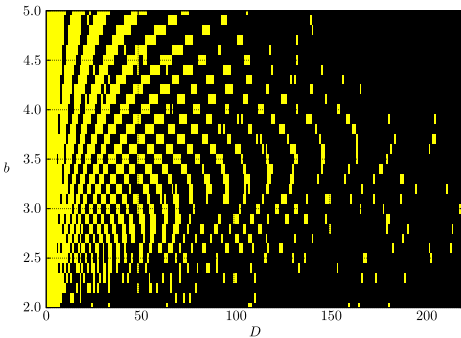


Рис. 5. Карта динамических режимов системы (1) с экспоненциальным ядром $K(t) = te^{-bt}$ и запаздывающим откликом; цветовая кодировка карты как на рис. 2 (онлайн в цвете)

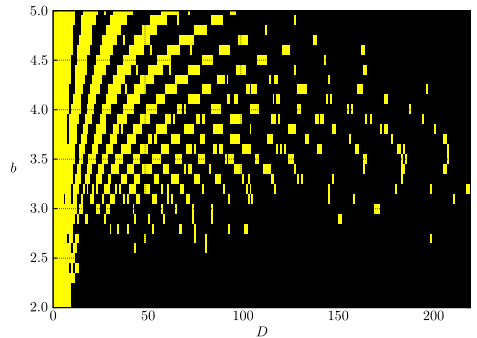


Рис. 6. Карта динамических режимов системы (1) со степенным ядром $K(t) = t(1+t)^{-(b+1)}$ и запаздывающим откликом; цветовая кодировка карты как на рис. 2 (онлайн в цвете)

[Figure 5. (online in color) Map of dynamic regimes for system (1) with delayed-response exponential kernel $K(t) = te^{-bt}$; the color coding follows Fig. 2]

[Figure 6. (online in color) Map of dynamic regimes for system (1) with delayed-response power-law kernel $K(t) = t(1+t)^{-(b+1)}$; the color coding follows Fig. 2]

чевым фактором, определяющим динамику системы, является наличие или отсутствие запаздывания в обратной связи, тогда как тип асимптотики ядра (экспоненциальная или степенная) играет второстепенную роль.

Тест 0–1 позволяет различать только два типа динамических режимов: хаотический и регулярный, при этом к регулярным относятся как асимптотически стационарные, так и периодические решения. Для более детальной классификации регулярных режимов необходимо применение дополнительных методов анализа.

Рассмотрим подход, основанный на анализе автокорреляционных функций. Пусть получены временные ряды фазовых переменных $x(t)$ и $y(t)$ системы (1) с шагом интегрирования h . В соответствии с методами цифровой обработки сигналов [16] выполним нормировку времени, приняв h за единичный интервал, так что дискретное время t принимает целые значения: $t = 0, 1, \dots, N$.

Для временного ряда $x(t)$ вычисляется его энергия:

$$E = \sum_{t=0}^N x^2(t).$$

Нормированная автокорреляционная функция определяется так:

$$R(\tau) = \frac{1}{E} \sum_{t=0}^N x(t)x(t+\tau), \quad \tau = 0, 1, \dots, N-1.$$

Теперь найдем статистические характеристики полученного ряда $R(\tau)$, а именно его математическое ожидание M и дисперсию V . В дальнейшем анализе рассматриваются только случаи, когда тест 0–1 показал результат регулярной динамики.

Характерные графики автокорреляционной функции представлены на рис. 7: для асимптотически стационарного режима (а) и для периодического режима (б) вид автокорреляционных функций существенно различается.

Анализ многочисленных вычислительных экспериментов показал, что математическое ожидание M автокорреляционной функции служит надежным критерием для различения типов регулярной динамики. Для асимптотически стационарных режимов характерны значения $M \geq 0.4$, тогда как периодические режимы соответствуют меньшим значениям математического ожидания.

Применение этого критерия позволило построить уточненные карты динамических режимов (рис. 8), где асимптотически стационарные режимы обозначены красным цветом, периодические — желтым, а хаотические — черным.

Сравнение карт динамических режимов для различных ядерных функций позволяет сделать следующие выводы. Асимптотически стационарные режимы преобладают при малых значениях динамо-числа D , что соответствует слабой генерации поля. С увеличением D система переходит либо в периодический, либо в хаотический режим. Особенностью систем с запаздывающей обратной связью является преобладание колебательной динамики — регулярной или хаотической.

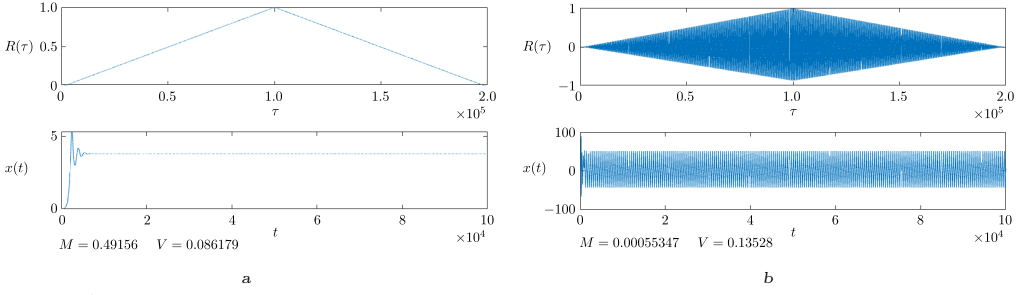


Рис. 7. Автокорреляционные функции и временные ряды для различных режимов: а — асимптотически стационарный режим ($D = 5$, $b = 2.7$); б — периодический режим ($D = 220$, $b = 2.7$)

[Figure 7. Autocorrelation functions and time series for various dynamical regimes: (a) asymptotically stationary regime ($D = 5$, $b = 2.7$); (b) periodic regime ($D = 220$, $b = 2.7$)]

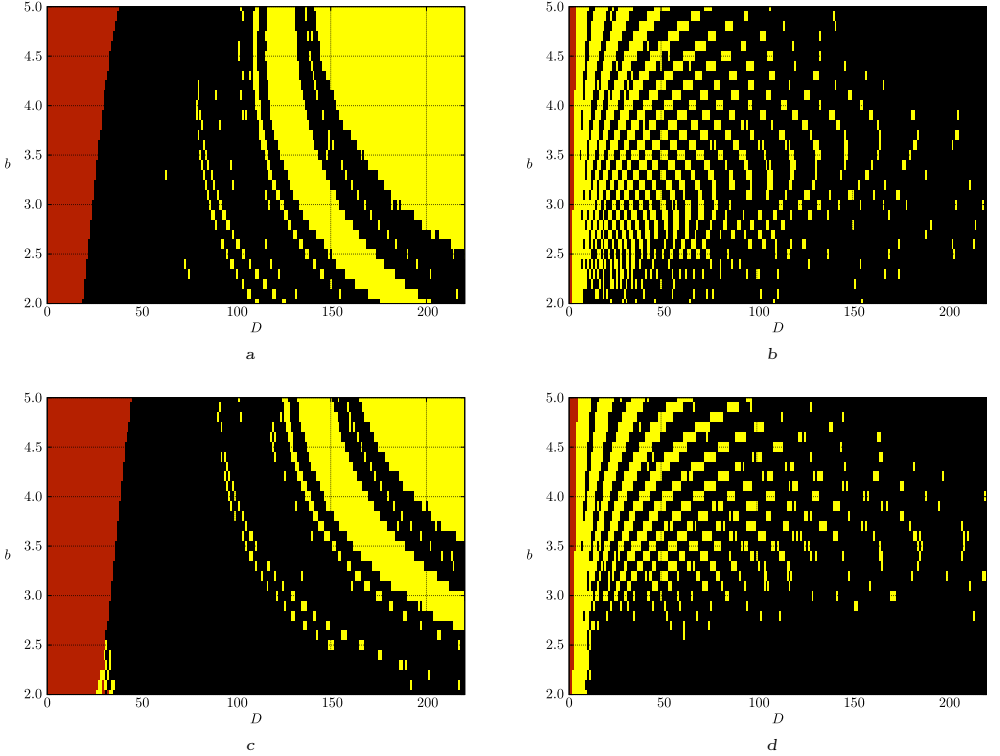


Рис. 8. Карты динамических режимов системы (1) для различных ядер: а — $K(t) = e^{-bt}$ (экспоненциальное без запаздывания); б — $K(t) = te^{-bt}$ (экспоненциальное с запаздыванием); в — $K(t) = (1+t)^{-b}$ (степенное без запаздывания); г — $K(t) = t(1+t)^{-(b+1)}$ (степенное с запаздыванием). Карты построены с использованием теста 0–1 и анализа автокорреляционных функций; цветовая кодировка карты как на рис. 1 (онлайн в цвете)

[Figure 8. (online in color) Dynamical regime maps of system (1) for different kernels: (a) $K(t) = e^{-bt}$ (exponential without delay); (b) $K(t) = te^{-bt}$ (exponential with delay); (c) $K(t) = (1+t)^{-b}$ (power-law without delay); (d) $K(t) = t(1+t)^{-(b+1)}$ (power-law with delay). The maps were constructed using the 0–1 test and autocorrelation function analysis; color coding follows Fig. 1

Заключение. Идентификация типов динамических режимов играет ключевую роль при исследовании математических моделей динамических систем, поскольку разные режимы соответствуют принципиально различным сценариям эволюции моделируемых физических процессов. Для систем обыкновенных дифференциальных уравнений хорошо зарекомендовал себя метод показателей Ляпунова. Однако в случае эредитарных систем, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями или уравнениями с дробными производными (Герасимова—Капуто или Римана—Лиувилля [17]), применение этого метода становится проблематичным. Хотя в литературе встречаются работы, где показатели Ляпунова применяются к уравнениям дробного порядка [18], строгое теоретическое обоснование такой процедуры пока отсутствует.

В данном контексте особую важность приобретают методы анализа временных рядов, полученных в результате численного моделирования или натурных экспериментов. Одним из таких методов является тест 0–1, который был успешно применен в нашей работе для исследования двумодовой эредитарной системы, моделирующей космическое динамо с памятью в механизме подавления α -эффекта.

Проведенные исследования показали, что тест 0–1 эффективно разделяет хаотические и регулярные режимы, но не позволяет отличить асимптотически стационарные режимы от периодических и квазипериодических. Для решения этой задачи была разработана дополнительная методика, основанная на анализе автокорреляционных функций. Хотя предложенный подход пока не имеет строгого теоретического обоснования, его эффективность была подтверждена в ходе численных экспериментов. Полученные результаты открывают перспективы для дальнейших теоретических исследований и применения методики к более сложным моделям динамо-систем.

Конкурирующие интересы. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы внесли равный вклад в разработку концепции исследования, проведение расчетов и подготовку рукописи. Окончательная версия статьи была одобрена всеми соавторами.

Финансирование. Исследование выполнено при поддержке Государственного задания ИКИР ДВО РАН (регистрационный номер НИОКТР 124012300245-2).

Благодарность. Авторы выражают благодарность рецензентам за внимательное рассмотрение работы и конструктивные замечания, способствовавшие улучшению статьи.

Библиографический список

1. Зельдович Я. Б., Рузмайкин А. А., Соколов Д. Д. *Магнитные поля в астрофизике*. М., Ижевск: НИЦ «РХД», 2006. 436 с.
2. Krause F., Rädler K.-H. *Mean-Field Magnetohydrodynamics and Dynamo Theory*. New York: Pergamon Press, 1980. 271 p. DOI: <https://doi.org/10.1016/C2013-0-03269-0>.
3. Merrill R. T., McElhinny M. W., McFadden P. L. *The Magnetic Field of the Earth: Paleomagnetism, the Core, and the Deep Mantle* / International Geophysics. vol. 63. London: Academic Press, 1996. xiv+531 pp.
4. Brandenburg A. Memory effects in turbulent transport // *Astrophys. J.*, 2009. vol. 706, no. 1. pp. 712–726. DOI: <https://doi.org/10.1088/0004-637x/706/1/712>.

5. Hori K., Yoshida S. Non-local memory effects of the electromotive force by fluid motion with helicity and two-dimensional periodicity // *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 2008. vol. 102, no. 6. pp. 601–632. DOI: <https://doi.org/10.1080/03091920802260466>.
6. Vodinchar G. Hereditary oscillator associated with the model of a large-scale $\alpha\omega$ -dynamo // *Mathematics*, 2020. vol. 8, no. 11, 2065. DOI: <https://doi.org/10.3390/math8112065>.
7. Казаков Е. А. Эредитарная маломодовая модель динамо // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.*, 2021. Т. 35, № 2. С. 40–47. EDN: RDPQER. DOI: <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2021-35-2-40-47>.
8. Казаков Е. А. Двухмодовая модель гидромагнитного динамо с памятью // *Вычисл. технол.*, 2022. Т. 27, № 6. С. 19–32. DOI: <https://doi.org/10.25743/ICT.2022.27.6.003>.
9. Gottwald G. A., Melbourne I. The 0–1 test for chaos: A review / *Chaos Detection and Predictability* / Lecture Notes in Physics, 915. Berlin, Heidelberg: Springer. pp. 221–247. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-48410-4_7.
10. Водинчар Г. М., Казаков Е. А. Исключение интегрального члена в уравнениях одной эредитарной системы, связанной с задачей гидромагнитного динамо // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.*, 2023. Т. 42, № 1. С. 180–190. EDN: BRDBZK. DOI: <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-42-1-180-190>.
11. Vodinchar G., Kazakov E. The Lorenz system and its generalizations as dynamo models with memory // *E3S Web Conf.*, 2018. vol. 62, 02011. EDN: HUZOAB. DOI: <https://doi.org/10.1051/e3sconf/20186202011>.
12. Барбашин Е. А. *Функции Ляпунова* / Сер. Физико-математическое наследие: Математика (теория дифференциальных уравнений). М.: URSS, 2012. 246 с. EDN: QKAKBH.
13. Bathe K.-J., Wilson E. L. *Numerical Methods in Finite Element Analysis* / Prentice-Hall Civil Engineering and Engineering Mechanics Series. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1976. xv+528 pp.
14. Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J. M. Lyapunov Characteristic Exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems; a method for computing all of them. Part I: Theory // *Meccanica*, 1980. vol. 15, no. 1. pp. 9–20. DOI: <https://doi.org/10.1007/bf02128236>.
15. Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J. M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems: A method for computing all of them. Part II: Numerical application // *Meccanica*, 1980. vol. 15, no. 1. pp. 21–30. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02128237>.
16. Сергиенко А. Б. *Цифровая обработка сигналов*. СПб.: БХВ-Петербург, 2011. 768 с.
17. Учайкин В. В. *Метод дробных производных*. Ульяновск: Артишок, 2008. 510 с. EDN: QJVANP.
18. Паровик Р. И. Хаотические режимы фрактального нелинейного осциллятора // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2018. Т. 22, № 2. С. 364–379. EDN: UXHTLO. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1611>.

MSC: 47G20, 37M25

Determination of dynamic modes in a two-mode hereditary dynamo system

E. A. Kazakov, G. M. Vodinchar

Institute of Cosmophysical Researches and Radio Wave Propagation,
Far East Division, Russian Academy of Sciences,
7, Mirnaya str. Paratunka, Kamchatkiy kray, 684034, Russian Federation.

Abstract

This study presents a computational analysis of a hereditary dynamical system modeling a two-mode hydromagnetic dynamo with memory. We conduct a numerical investigation of dynamic regimes emerging under variation of the system's control parameters. The hereditary dynamical system is described by a set of integro-differential equations.

Lyapunov exponent analysis serves as a principal method for examining dynamic regimes. To implement this approach, the integro-differential system was reduced to a system of ordinary differential equations. The paper provides a description of the corresponding class of kernels and the reduction result.

As an alternative approach, we employ the 0-1 test for chaos detection. A comparative analysis between the 0-1 test and Lyapunov exponents for a particular case demonstrates their qualitative agreement. Subsequent investigations are primarily utilized the 0-1 test for analyzing the integro-differential system's dynamic regimes.

Notably, this method only discriminates between regular (periodic and asymptotically stationary) and chaotic regimes. For finer classification of regular regimes, we propose an auxiliary method based on analyzing the autocorrelation function characteristics of the solution's time series. Empirical results show that computing the autocorrelation function's expected value effectively distinguishes periodic/quasi-periodic regimes from asymptotically stationary ones.

Both instantaneous and delayed hereditary feedback cases are examined. Simulation results reveal that the model reproduces various dynamic regimes characteristic of actual cosmic dynamo systems.

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes Research Article

© The Author(s), 2025

© Samara State Technical University, 2025 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Kazakov E. A., Vodinchar G. M. Determination of dynamic modes in a two-mode hereditary dynamo system, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2025, vol. 29, no. 2, pp. 319–333. EDN: **LWBCIR**. DOI: [10.14498/vsgtu2130](https://doi.org/10.14498/vsgtu2130) (In Russian).

Authors' Details:

Evgeny A. Kazakov  <https://orcid.org/0000-0001-7235-4148>Junior Researcher; Lab. of Electromagnetic Propagation; e-mail: kazakov@ikir.ru*Gleb M. Vodinchar*  <https://orcid.org/0000-0002-5516-1931>Cand. Phys. & Math. Sci., Associate Professor; Leading Researcher; Lab. Simulation of Physical Processes; e-mail: vodinchar@ikir.ru

Keywords: hereditary dynamo system, 0–1 test, dynamic regime map, chaotic regime, regular regime, autocorrelation analysis.

Received: 14th November, 2024 / Revised: 11th May, 2025 /

Accepted: 26th May, 2025 / First online: 2nd June, 2025

Competing interests. The authors declare no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. All authors contributed equally to: research conceptualization, computational analysis, and manuscript preparation. The final version of the manuscript was approved by all co-authors.

Funding. This research was supported by the State Assignment of IKIR FEB RAS (registration number NIOKTR 124012300245-2).

Acknowledgments. The authors thank the reviewers for their thorough evaluation and constructive comments that significantly improved the article.

References

1. Zel'dovich Ya. B., Ruzmaikin A. A., Sokolov D. D. *Magnitnyye polya v astrofizike* [Magnetic Fields in Astrophysics]. Moscow, Izhevsk, Regular and Chaotic Dynamics, 2006, 436 pp. (In Russian)
2. Krause F., Rädler K.-H. *Mean-Field Magnetohydrodynamics and Dynamo Theory*. New York, Pergamon Press, 1980, 271 p. DOI: <https://doi.org/10.1016/C2013-0-03269-0>.
3. Merrill R. T., McElhinny M. W., McFadden P. L. *The Magnetic Field of the Earth: Paleomagnetism, the Core, and the Deep Mantle*, International Geophysics, vol. 63. London, Academic Press, 1996, xiv+531 pp.
4. Brandenburg A. Memory effects in turbulent transport, *Astrophys. J.*, 2009, vol. 706, no. 1, pp. 712–726. DOI: <https://doi.org/10.1088/0004-637x/706/1/712>.
5. Hori K., Yoshida S. Non-local memory effects of the electromotive force by fluid motion with helicity and two-dimensional periodicity, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 2008, vol. 102, no. 6, pp. 601–632. DOI: <https://doi.org/10.1080/03091920802260466>.
6. Vodinchar G. Hereditary oscillator associated with the model of a large-scale $\alpha\omega$ -dynamo, *Mathematics*, 2020, vol. 8, no. 11, 2065. DOI: <https://doi.org/10.3390/math8112065>.
7. Kazakov E. A. Hereditary low-mode dynamo model, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki*, 2021, vol. 35, no. 2, pp. 40–47 (In Russian). EDN: RDPQER. DOI: <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2021-35-2-40-47>.
8. Kazakov E. A. Two-mode model of a hydromagnetic dynamo with memory, *Comput. Technol.*, 2022, vol. 27, no. 6, pp. 19–32 (In Russian). DOI: <https://doi.org/10.25743/ICT.2022.27.6.003>.
9. Gottwald G. A., Melbourne I. The 0–1 test for chaos: A review, In: *Chaos Detection and Predictability*, Lecture Notes in Physics, 915. Berlin, Heidelberg, Springer, pp. 221–247. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-48410-4_7.
10. Vodinchar G. M., Kazakov E. A. Elimination of the integral term in the equations of one hereditary system related to the hydromagnetic dynamo, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki*, 2023, vol. 42, no. 1, pp. 180–190. EDN: BRDBZK. DOI: <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-42-1-180-190>.
11. Vodinchar G., Kazakov E. The Lorenz system and its generalizations as dynamo models with memory, *E3S Web Conf.*, 2018, vol. 62, 02011. EDN: HUZ0AB. DOI: <https://doi.org/10.1051/e3sconf/20186202011>.
12. Barbashin E. A. *Funktsii Lyapunova* [Lyapunov Functions], Physico-Mathematical Heritage: Mathematics (Theory of Differential Equations). Moscow, URSS, 2012, 246 pp. EDN: QKAKBH.
13. Bathe K.-J., Wilson E. L. *Numerical Methods in Finite Element Analysis*, Prentice-Hall Civil Engineering and Engineering Mechanics Series. Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1976, xv+528 pp.

14. Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J. M. Lyapunov Characteristic Exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems; a method for computing all of them. Part 1: Theory, *Meccanica*, 1980, vol. 15, no. 1, pp. 9–20. DOI: <https://doi.org/10.1007/bf02128236>.
15. Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J. M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems: A method for computing all of them. Part II: Numerical application, *Meccanica*, 1980, vol. 15, no. 1, pp. 21–30. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02128237>.
16. Sergienko A. B. *Tsifrovaya obrabotka signalov* [Digital Signal Processing]. St. Petersburg, BHV-Petersburg, 2011, 768 pp. (In Russian)
17. Uchaykin V. V. *Metod drobnykh proizvodnykh* [The Method of Fractional Derivatives]. Ulyanovsk, Artishok, 2008, 510 pp. (In Russian). EDN: [QJVANP](#).
18. Parovik R. I. Chaotic regimes of a fractal nonlinear oscillator, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 2, pp. 364–379 (In Russian). EDN: [UXHTLO](#). DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1611>.