Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2025. Т. 29, № 3. С. 566–578
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2133
EDN: VCVBSZ

УДК 517.977.56

# О нахождении градиента в задаче управления колебаниями механических систем без трения

***А. С. Зинченко*[1], *А. А. Нехаев*[2], *А. М. Романенков*[1,2]**

[1] Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)
Россия, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, 4.
[2] Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление»
Российской академии наук,
Россия, 119333, Москва, ул. Вавилова, 44/2.

**Аннотация**

Исследуется задача вычисления градиента для алгоритма оптимального управления распределенной системой, математическая модель которой описывается начально-краевой задачей для линейного гиперболического уравнения в частных производных высокого порядка. Рассматривается колебательный процесс без диссипации энергии. Предлагаемая модель охватывает широкий класс прикладных задач, включая колебания струны, балки, стержня и других одномерных упругих механических систем, а также систем, допускающих редукцию к указанным случаям. С использованием метода интегральных оценок доказана теорема единственности решения и получено явное выражение для градиента минимизируемого квадратичного функционала.

**Ключевые слова:** оптимальное управление, гиперболические уравнения, колебательные системы, градиентный метод, начально-краевые задачи.

Получение: 13 ноября 2024 г. / Исправление: 23 мая 2025 г. /
Принятие: 2 июня 2025 г. / Публикация онлайн: 3 июля 2025 г.

---

**Дифференциальные уравнения и математическая физика**
**Краткое сообщение**



**Образец для цитирования**
Зинченко А. С., Нехаев А. А., Романенков А. М. О нахождении градиента в задаче управления колебаниями механических систем без трения // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2025. Т. 29, № 3. С. 566–578. EDN: VCVBSZ. DOI: 10.14498/vsgtu2133.

**Сведения об авторах**

*Александр Сергеевич Зинченко* https://orcid.org/0000-0001-7971-4572
кандидат экономических наук; доцент; каф. 916 математики[1]; e-mail: zinchenkoas@mai.ru

*Александр Андреевич Нехаев* https://orcid.org/0009-0004-2062-7967
инженер-исследователь; отд. математического моделирования гетерогенных систем[2];
e-mail: ganzol177@gmail.com

*Александр Михайлович Романенков* https://orcid.org/0000-0002-0700-8465
кандидат технических наук, доцент; доцент; каф. 916 математики[1]; старший научный сотрудник; отд. математического моделирования гетерогенных систем[2];
e-mail: romanaleks@gmail.com

**Введение.** Рассматриваются колебания одномерной механической системы, при этом допускается произвольная природа колебаний. Уравнение, описывающее колебательный процесс, может содержать производные высокого порядка по пространственной переменной (четвертого, шестого и выше). Проблема управления такими колебаниями активно исследуется в научной литературе.

В работе [1] разработан аналитический подход к построению оптимального граничного управления для одномерных неоднородных колебательных процессов со смещением на обоих концах, основанный на методе моментов. Исследование [2] посвящено системам с распределенными параметрами, описываемым гиперболическими уравнениями с переменными коэффициентами, где решается задача определения мгновенно-оптимального точечного управления с использованием интегрального закона сохранения энергии. В [3] рассматривается задача гашения колебаний системы, описываемой волновым уравнением и обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка, причем функции состояния связаны через граничные условия линейным образом, что позволяет получить точный вид управляющей функции.

В [4] исследованы задачи гашения колебаний струны и балки (управление для гиперболических уравнений второго и четвертого порядков), где установлено точное время гашения колебаний и применен градиентный метод для численного решения. Работа [5] посвящена численному гашению колебаний балки с использованием нескольких неподвижных точечных актюаторов, при этом управление ищется в классе кусочно-постоянных функций.

Задачи с уравнениями высокого порядка представляют значительный научный интерес. В [7] исследуется динамическое поведение и солитонные решения уравнения Кортевега–де Фриза и уравнения иерархии Жолента–Миодека, имеющие приложения в распознавании образов, динамике жидкости, нейронных сетях, механических системах, экологии, теории управления, бифуркационном анализе и теории хаоса. Авторами получены точные решения в виде бегущей волны, содержащие рациональные, гиперболические и тригонометрические функции. В [8] рассмотрена задача оптимального управления для линейной системы гиперболических уравнений первого порядка, где правая часть определяется из управляемых билинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Предложенный подход основан на неклассических формулах приращения функционала стоимости.

Исследование [9] представляет метод автоматической временной сегментации видео, сочетающий многомасштабный анализ изображений, нелинейные уравнения в частных производных и сверточные нейронные сети. Для нелинейной гиперболической модели второго порядка доказаны корректность, существование и единственность слабого решения, для нахождения которого применен алгоритм на основе метода конечных разностей. В [10] установлена теорема существования и единственности для нелокальных нелинейных дифференциальных уравнений балки шестого порядка с четырьмя параметрами при определенных условиях роста функции $f$ и ограничении на изгибную жесткость. Работа [11] посвящена изучению класса уравнений с двумя различными порядками типа Римана–Лиувилля разностных операторов набла, где доказано существование положительного решения с использованием теоремы о неподвижной точке.

В [12] рассмотрена задача граничного управления для гиперболического уравнения, характеристики которого имеют угловые коэффициенты одного знака, при этом управляющие функции построены в явном виде. В [13] исследована задача граничного управления для системы гиперболических уравнений, где с помощью метода Римана построены управляющие функции, переводящие систему из заданного начального состояния в финальное. Наконец, в [14] решается задача оптимального управления линейной системой гиперболических уравнений первого порядка с квадратичным целевым функционалом, осуществлена редукция к задаче оптимального управления системой обыкновенных дифференциальных уравнений на основе неклассических формул приращения целевого функционала второго порядка.

**1. Постановка задачи.** Пусть $u = u(x,t)$, где $x \in [0,l]$, $l > 0$, $t \in [0,T]$, $T > 0$, и пусть $N \in \mathbb{N}$. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sum_{k=0}^{N} (-1)^k a_k^2 \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} = f(x,t), \tag{1}$$

где коэффициенты $a_k \in \mathbb{R}$ и $a_N \neq 0$. На границах области задаются либо условия шарнирного закрепления:

$$\left.\frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}}\right|_{x=l} = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{2}$$

либо условия нежесткого закрепления:

$$\left.\frac{\partial^{2k+1} u}{\partial x^{2k+1}}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial^{2k+1} u}{\partial x^{2k+1}}\right|_{x=l} = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{3}$$

Для функции $u(x,t)$ заданы начальные условия

$$u\big|_{t=0} = u_0(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = u_1(x), \tag{4}$$

согласованные с граничными условиями (2) или (3).

Отметим, что модели колебаний с силой трения, пропорциональной скорости, могут быть сведены к задаче (1)–(4). Действительно, пусть $\mu \in \mathbb{R}_+$. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{k=0}^{N} (-1)^k a_k^2 \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} = f(x,t),$$

где слагаемое $\mu \frac{\partial u}{\partial t}$ описывает силу трения. Замена переменной $u = e^{-\mu t/2} w$ позволяет исключить член с первой производной по времени, что приводит к уравнению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \sum_{k=1}^{N} (-1)^k a_k^2 \frac{\partial^{2k} w}{\partial x^{2k}} + \left(\frac{\mu^2}{4} + a_0^2\right) w = F(x,t),$$

где $F(x,t) = f(x,t)e^{\mu t/2}$. Полученное уравнение имеет вид (1), при этом граничные условия (2) или (3) для функции $w$ сохраняются, а начальные условия принимают вид

$$w\Big|_{t=0} = u_0(x), \quad \frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0} = u_1(x) + \frac{\mu}{2}u_0(x).$$

**2. Анализ однородного уравнения.** Рассмотрим случай однородного уравнения (1), т.е. $f(x,t) \equiv 0$. Пусть $Q_\tau := [0,l] \times [0,\tau]$. Применим технику интегральных оценок, следуя [6]. Умножим уравнение (1) с нулевой правой частью на $\frac{\partial u}{\partial t}$ и, используя соотношения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^k u}{\partial x^k}\frac{\partial^{k+1} u}{\partial x^k \partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right)^2,$$

выделим полные производные по времени. Интегрируя полученное выражение по области $Q_\tau$ при $\tau > 0$, получим

$$0 = \int_{Q_\tau}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{k=0}^{N}(-1)^k a_k^2 \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}}\frac{\partial u}{\partial t}\right)dxdt =$$
$$= \frac{1}{2}\int_{Q_\tau}\frac{\partial}{\partial t}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \sum_{k=0}^{N} a_k^2\left(\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right)^2\right)dxdt = E(\tau) - E(0),$$

где введена функция $E(\tau)$, представляющая полную энергию колебательной системы и определяемая выражением

$$E(\tau) = \frac{1}{2}\int_0^l \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \sum_{k=0}^{N} a_k^2\left(\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right)^2\right]_{t=\tau} dx. \tag{5}$$

Утверждение. *Для механической системы, описываемой уравнением (1) с краевыми условиями (2) или (3), выполняется закон сохранения энергии:*

$$E(\tau) = E(0) \quad \forall \tau > 0.$$

Из закона сохранения энергии непосредственно вытекает следующая теорема единственности решения начально-краевой задачи.

Теорема. *Пусть для однородного уравнения (1) ($f(x,t) \equiv 0$) с краевыми условиями (2) или (3) начальные функции $u_0(x)$ и $u_1(x)$ тождественно равны нулю. Тогда задача имеет единственное решение $u(x,t) \equiv 0$.*

*Доказательство.* Из закона сохранения энергии следует, что $E(\tau) = E(0) \equiv 0$ для всех $\tau > 0$. Согласно формуле (5), получаем

$$0 \leqslant E(\tau) = 0,$$

что возможно только при $u(x,t) \equiv 0$.

Рассмотрим теперь общий случай с произвольными начальными условиями $u_0(x)$ и $u_1(x)$. Предположим, что существуют два различных решения $w(x,t)$ и $v(x,t)$ начально-краевой задачи с одинаковыми краевыми и начальными условиями. Тогда функция $u(x,t) = w(x,t) - v(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1) с $f(x,t) \equiv 0$, однородным краевым условиям (2) или (3), нулевым начальным условиям.

Согласно доказанному выше, $u(x,t) \equiv 0$, следовательно, $w(x,t) \equiv v(x,t)$, что доказывает единственность решения. □

Рассмотрим дифференциальный оператор $L$, действующий на функции, дважды дифференцируемые по времени и $2N$ раз дифференцируемые по пространственной переменной, по следующему правилу:

$$L := \frac{\partial^2}{\partial t^2} + L_x = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \sum_{k=0}^{N} (-1)^k a_k^2 \frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}},$$

где $L_x = \sum\limits_{k=0}^{N} (-1)^k a_k^2 \dfrac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}}$ — дифференциальный оператор по пространственной переменной. В терминах введенного оператора уравнение (1) принимает компактный вид:

$$Lu = f.$$

Лемма. *Оператор $L_x$, действующий на функции $w$, $v$, удовлетворяющие краевым условиям* (2) *или* (3), *является симметричным и положительно определенным*:

$$(L_x w, v) = (w, L_x v), \quad (L_x w, w) > 0 \quad \textit{при} \quad w \neq 0.$$

*Доказательство.* Рассмотрим стандартное скалярное произведение в $L_2[0,l]$. Применяя $N$ раз интегрирование по частям и учитывая граничные условия (2) или (3), получаем

$$(L_x w, v) = \int_0^l \left( \sum_{k=0}^{N} (-1)^k a_k^2 \frac{\partial^{2k} w}{\partial x^{2k}} \right) v dx = \int_0^l \sum_{k=0}^{N} a_k^2 \frac{\partial^k w}{\partial x^k} \frac{\partial^k v}{\partial x^k} dx = (w, L_x v).$$

Для доказательства положительной определенности положим $v = w \neq 0$:

$$(L_x w, w) = \int_0^l \sum_{k=0}^{N} a_k^2 \left( \frac{\partial^k w}{\partial x^k} \right)^2 dx > 0,$$

поскольку $a_N \neq 0$ и не все производные $\frac{\partial^k w}{\partial x^k}$ могут быть тождественно нулевыми. □

Исследуем действие оператора $L_x$ на экспоненциальную функцию:

$$L_x e^{\lambda x} = \left( \sum_{k=0}^{N} (-1)^k a_k^2 \lambda^{2k} \right) e^{\lambda x} =: \mu(\lambda) e^{\lambda x},$$

где $\mu(\lambda)$ — многочлен от параметра $\lambda$. Заметим, что для чисто мнимых $\lambda = i\varphi$, $\varphi \in \mathbb{R}$, этот многочлен принимает положительные значения:

$$\mu(i\varphi) = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k a_k^2 (i\varphi)^{2k} = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k (i^2)^k a_k^2 \varphi^{2k} = \sum_{k=0}^{N} (a_k \varphi^k)^2 > 0.$$

**3. Градиент в задаче управления.** Рассмотрим функцию $f(x,t)$ в качестве управляющего воздействия. Решение $u(x,t) = u(x,t,f)$ начально-краевой задачи (1)–(4) при этом зависит от выбора управления. Сформулируем задачу оптимального управления: найти такое управление $f(x,t)$, которое минимизирует функционал

$$J(f) = \int_0^l \Big( \big(u(x,T,f) - y_0(x)\big)^2 + \big(u_t(x,T,f) - y_1(x)\big)^2 + \\ + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^T f^2(x,t)dt \Big) dx, \quad (6)$$

где $y_0(x)$, $y_1(x)$ — заданные целевые функции, определяющие желаемую конечную форму и скорость системы соответственно. Последнее слагаемое в функционале, содержащее норму управления, обеспечивает регуляризацию задачи [15]. Хотя функционалы вида (6) широко используются в теории управления, задача управления для гиперболического уравнения высокого порядка представляет собой новую постановку.

Для численного решения задачи применим градиентный метод. Следуя [3], построим итерационный процесс:

$$f_{k+1} = f_k - \alpha_k J'(f_k), \quad k = 0, 1, \ldots,$$

где $f_0$ — начальное приближение, $\alpha_k > 0$ — шаг градиентного метода. Шаг $\alpha_k$ выбирается из условия монотонного убывания функционала:

$$J\big(f_k - \alpha_k J'(f_k)\big) < J(f_k).$$

Итерационный процесс прекращается при выполнении критерия остановки:

$$\|J'(f_k)\|_{L_2} < \varepsilon.$$

Для вычисления градиента рассмотрим возмущенное управление $f(x,t) + h(x,t)$, где $h(x,t)$ — малая добавка. Обозначим через $W(x,t) = u_h(x,t) - u(x,t)$ соответствующее приращение решения, которое удовлетворяет задаче (1)–(4) с правой частью $h(x,t)$ и однородными граничными условиями (2) или (3). Согласно определению производной Фреше, приращение функционала имеет вид

$$\Delta J = J(f+h) - J(f) = (J'(f), h) + o(\|h\|^2_{L^2(Q_T)}),$$

где все функции зависят от переменных $x$ и $t$.

Используя методику, изложенную в работах [16,17], выпишем приращение функционала:

$$\Delta J = J(f+h) - J(f) = \int_0^l \Big( \big(2u(x,T,f) - 2y_0(x)\big) W(x,T) + \\ + \big(2u_t(x,T,f) - 2y_1(x)\big) W_t(x,T) + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^T 2f(x,t)h(x,t)dt \Big) dx + R(h), \quad (7)$$

где остаточный член $R(h)$ задается выражением

$$R(h) = \int_0^l \big(W^2(x,T) + W_t^2(x,T)\big)dx + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^l \int_0^T h^2(x,t)dtdx.$$

Введем сопряженную функцию $\psi(x,t)$, удовлетворяющую конечным условиям:

$$\psi(x,T) = 2\big(u_t(x,T,f) - y_1(x)\big), \quad \psi_t(x,T) = -2\big(u(x,T,f) - y_0(x)\big).$$

Тогда приращение функционала (7) можно переписать в виде

$$\Delta J = \int_0^l \int_0^T \Big( -\psi_{tt}(x,t)W(x,t) + \psi(x,t)W_{tt}(x,t) + \\ + \frac{2}{\varepsilon^2} f(x,t)h(x,t) \Big) dtdx + R(h). \quad (8)$$

Из уравнения для $W$ выразим $W_{tt}$:

$$W_{tt} = h(x,t) - \sum_{k=0}^{N} (-1)^k a_k^2 \frac{\partial^{2k} W}{\partial x^{2k}}$$

и подставим в (8):

$$\Delta J = \int_0^l \int_0^T \Big( -\psi_{tt}(x,t)W(x,t) + \psi(x,t)\Big( h(x,t) - \sum_{k=0}^{N} (-1)^k a_k^2 \frac{\partial^{2k} W}{\partial x^{2k}} \Big) + \\ + \frac{2}{\varepsilon^2} f(x,t)h(x,t) \Big) dtdx + R(h).$$

Потребуем, чтобы $\psi(x,t)$ удовлетворяла однородному уравнению:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \sum_{k=0}^{N} A_k \frac{\partial^{2k} \psi}{\partial x^{2k}} = 0,$$

где коэффициенты $A_k$ подлежат определению из ограничений на $\Delta J$. Тогда

$$\Delta J = \int_0^l \int_0^T \Big( \Big( \psi(x,t) + \frac{2}{\varepsilon^2} f(x,t) \Big) h(x,t) + \Big( \sum_{k=0}^{N} A_k \frac{\partial^{2k} \psi}{\partial x^{2k}} \Big) W(x,t) - \\ - \psi(x,t) \sum_{k=0}^{N} (-1)^k a_k^2 \frac{\partial^{2k} W}{\partial x^{2k}} \Big) dtdx + R(h).$$

Преобразуем интеграл:

$$\int_0^l \int_0^T \sum_{k=0}^{N} \Big( A_k \frac{\partial^{2k}\psi}{\partial x^{2k}} W(x,t) - \psi(x,t)(-1)^k a_k^2 \frac{\partial^{2k} W}{\partial x^{2k}} \Big) dtdx =$$
$$= \sum_{k=0}^{N} \int_0^l \int_0^T (A_k - (-1)^k a_k^2) \frac{\partial^k \psi}{\partial x^k} \frac{\partial^k W}{\partial x^k} dtdx.$$

Положим $A_k = (-1)^k a_k^2$, тогда получим

$$\Delta J = \int_0^l \int_0^T \Big( \psi(x,t) + \frac{2}{\varepsilon^2} f(x,t) \Big) h(x,t) dtdx + R(h),$$

или в операторной форме $\Delta J(h) = (DJ, h) + R(h)$, где $DJ = \psi(x,t) + \frac{2}{\varepsilon^2} f(x,t)$. Далее необходимо показать, что остаточный член $R(h)$ имеет более высокий порядок малости по сравнению с линейной частью.

Отметим, что в данном случае вычисление градиента существенно проще, чем в общем случае [17]. В отличие от общего подхода, здесь не потребовалось вводить мажорирующий функционал — удалось непосредственно вычислить градиент исходного квадратичного функционала. Предложенная методика выделения линейной части приращения функционала применима для начально-краевых задач порядка выше четвертого.

Теорема (Оценка остаточного члена). *Для остаточного члена $R(h)$ справедлива оценка*

$$R(h) = O(\|h\|^2_{L^2(Q_T)}).$$

*Доказательство.* Рассмотрим энергетическое тождество

$$\Big( LW, \frac{\partial W}{\partial t} \Big) = \Big( \frac{\partial W}{\partial t}, h \Big).$$

Согласно лемме об энергии, имеем

$$\Big( \frac{\partial W}{\partial t}, h \Big) = E(\tau) \geqslant \frac{1}{2} \int_0^l \Big( \frac{\partial W}{\partial t} \Big)^2 \Big|_{t=\tau} dx.$$

Применяя неравенство Коши—Буняковского, получаем

$$\Big( \frac{\partial W}{\partial t}, h \Big) = \int_0^l \int_0^\tau \frac{\partial W}{\partial t} ddtdx \leqslant \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^\tau \Big( \frac{\partial W}{\partial t} \Big)^2 dtdx + \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^\tau h^2 dtdx.$$

Комбинируя эти оценки, приходим к неравенству

$$\int_0^l \Big( \frac{\partial W}{\partial t} \Big)^2 \Big|_{t=\tau} dx \leqslant \int_0^l \int_0^\tau \Big( \frac{\partial W}{\partial t} \Big)^2 dtdx + \int_0^l \int_0^\tau h^2 dtdx. \qquad (9)$$

Введем следующие обозначения:

$$b = \int_0^l \int_0^\tau h^2 dtdx, \quad \varphi(\tau) = \int_0^l \Big( \frac{\partial W}{\partial t} \Big)^2 \Big|_{t=\tau} dx.$$

Тогда неравенство (9) принимает вид

$$\varphi(\tau) \leqslant \int_0^\tau \varphi(t)dt + b.$$

Применяя лемму Гронуолла, получаем оценку

$$\int_0^l \Big(\frac{\partial W}{\partial t}\Big)^2 dx \leqslant e^\tau \int_0^l \int_0^\tau h^2 dtdx.$$

Учитывая нулевые начальные условия, имеем

$$W(x,T) = \int_0^T \frac{\partial W}{\partial t} dt,$$

откуда с помощью неравенства Гельдера получаем

$$\int_0^l W^2(x,T)dx \leqslant T \int_0^l \int_0^T \Big(\frac{\partial W}{\partial t}\Big)^2 dtdx \leqslant Te^T \int_0^l \int_0^T h^2 dtdx.$$

Окончательная оценка для $R(h)$ имеет вид

$$R(h) = \int_0^l \big(W^2(x,T) + W_t^2(x,T)\big)dx + \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^l \int_0^T h^2(x,t)dtdx \leqslant$$
$$\leqslant \Big((Tl+1)e^T + \frac{1}{\varepsilon^2}\Big)\int_0^l \int_0^T h^2(x,t)dtdx = O(\|h\|^2_{L_2(Q_T)}).$$

$\square$

**Заключение.** В работе исследована задача оптимального управления колебательными процессами, описываемыми начально-краевой задачей для линейного гиперболического уравнения высокого порядка в частных производных. Основные результаты работы включают:

1) явное выражение для градиента минимизируемого квадратичного функционала, полученное с использованием метода интегральных тождеств и техники сопряженных задач;
2) доказательство теоремы единственности решения смешанной задачи на основе закона сохранения энергии и энергетических оценок;
3) обоснование корректности градиентного метода для рассматриваемого класса задач управления, включая оценку остаточного члена.

Полученные результаты расширяют классические подходы к задачам управления распределенными системами и могут быть применены к широкому классу механических систем, включая модели струн, балок и стержней.

**Конкурирующие интересы.** У нас нет конфликта интересов в отношении авторства и публикации этой статьи.

**Авторский вклад и ответственность.** Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

**Финансирование.** Исследование выполнялось без финансирования.

## Библиографический список


1. Барсегян В. Р. Оптимальное граничное управление распределенной неоднородной колебательной системой с заданными состояниями в промежуточные моменты времени // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2023. Т. 63, № 1. С. 74–84. EDN: LEOHJD. DOI: https://doi.org/10.31857/S0044466922120031.
2. Кубышкин В. А. Подвижное управление колебаниями в системах с распределенными параметрами // *Автомат. и телемех.*, 2011. № 10. С. 117–128. EDN: OHJMTX.
3. Егоров А. И., Знаменская Л. Н. Управления колебаниями связанных объектов с распределенными и сосредоточенными параметрами // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2005. Т. 45, № 10. С. 1766–1784. EDN: HSCIQD.
4. Атамуратов А. Ж., Михайлов И. Е., Муравей Л. А. Проблема моментов в задачах управления упругими динамическими системами // *Мехатрон., автомат., управл.*, 2016. Т. 17, № 9. С. 587–598. EDN: WMCIUZ. DOI: https://doi.org/10.17587/mau.17.587-598.
5. Атамуратов А. Ж., Михайлов И. Е., Таран Н. А. Гашение вынужденных поперечных колебаний упругой балки с помощью нескольких стационарных актьюаторов // *Вестник ПНИПУ. Механика*, 2018. № 2. С. 5–15. EDN: XUGGAH. DOI: https://doi.org/10.15593/perm.mech/2018.2.01.
6. Эванс Л. К. *Уравнения с частными производными.* Новосибирск: Тамара Рожковская, 2003. 562 с.
7. Alraddadi I., Chowdhury M. A., Abbas M. S., et al. Dynamical behaviors and abundant new soliton solutions of two nonlinear PDEs via an efficient expansion method in industrial engineering // *Mathematics*, 2024. vol. 12, no. 13, 2053. EDN: AWHEGO. DOI: https://doi.org/10.3390/math12132053.
8. Arguchintsev A., Poplevko V. An optimal control problem by a hybrid system of hyperbolic and ordinary differential equations // *Games*, 2021. vol. 12, no. 1, 23. EDN: IXNDSP. DOI: https://doi.org/10.3390/g12010023.
9. Barbu T. CNN-based temporal video segmentation using a nonlinear hyperbolic PDE-based multi-scale analysis // *Mathematics*, 2023. vol. 11, no. 1, 245. EDN: KEHSPX. DOI: https://doi.org/10.3390/math11010245.
10. Khanfer A., Bougoffa L., Alhelali N. On the sixth-order beam equation of small deflection with variable parameters // *Mathematics*, 2025. vol. 13, no. 5, 727. EDN: AVNCCA. DOI: https://doi.org/10.3390/math13050727.
11. Dimitrov N. D., Jonnalagadda J. M. Existence of positive solutions for a class of nabla fractional boundary value problems // *Fractal Fract.*, 2025. vol. 9, no. 2, 131. EDN: SCNVOO. DOI: https://doi.org/10.3390/fractalfract9020131.
12. Козлова Е. А. Задача управления для гиперболического уравнения в случае характеристик с угловыми коэффициентами одного знака // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2012. № 1. С. 243–247. EDN: PAEJSX. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1046.
13. Козлова Е. А. Задача граничного управления для системы уравнений гиперболического типа // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика*, 2013. Т. 13, № 1. С. 51–56. EDN: SMXXRV. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2013-13-1-2-51-56.
14. Аргучинцев А. В., Кедрин В. С., Кедрина М. С. Вариационное условие оптимальности в задаче управления гиперболическими уравнениями с динамическими граничными условиями // *Вестн. Бурят. гос. ун-та. Матем., информ.*, 2021. № 1. С. 13–23. EDN: PMLLOO. DOI: https://doi.org/10.18101/2304-5728-2021-1-13-23.
15. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. *Вычислительная теплопередача.* М.: Либроком, 2009. 782 с. EDN: QJVMAV.
16. Васильев Ф. П. *Методы оптимизации*: Кн. 2. М.: МЦНМО, 2011. 434 с.
17. Романенков А. М. Градиент в задаче управления процессами, описываемыми линейными псевдогиперболическими уравнениями // *Диффер. уравн.*, 2024. Т. 60, № 2. С. 224–236. EDN: QKNNLQ. DOI: https://doi.org/10.31857/S0374064124020068.

**Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki**
**[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2025, vol. 29, no. 3, pp. 566–578**
**ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print)** https://doi.org/10.14498/vsgtu2133

**MSC: 49K20, 35Lxx**

# On determination of gradient in optimal control problems for frictionless mechanical oscillatory systems

***A. S. Zinchenko*[1], *A. A. Nekhaev*[2], *A. M. Romanenkov*[1,2]**

[1] Moscow Aviation Institute (National Research University),
4, Volokolamskoe Shosse, Moscow, 125993, Russian Federation.
[2] Federal Research Center "Computer Science and Control"
of Russian Academy of Sciences,
44/2, Vavilova str., Moscow, 119333, Russian Federation.

## Abstract

This paper investigates the problem of gradient computation for an optimal control algorithm applied to a distributed system. The mathematical model of the system is described by an initial-boundary value problem for a linear high-order hyperbolic partial differential equation. The study considers an oscillatory process without energy dissipation. The proposed model covers a wide class of applied problems, including vibrations of strings, beams, rods, and other one-dimensional elastic mechanical systems, as well as systems reducible to these cases. By using the method of integral estimates, we prove a uniqueness theorem for the solution and derive an explicit expression for the gradient of the minimized quadratic functional.

**Keywords:** optimal control, hyperbolic equations, oscillatory systems, gradient method, initial-boundary value problems.

Received: 13th November, 2024 / Revised: 23rd May, 2025 /
Accepted: 2nd June, 2025 / First online: 3rd July, 2025

**Differential Equations and Mathematical Physics**
**Short Communication**



**Please cite this article in press as:**
Zinchenko A. S., Nekhaev A. A., Romanenkov A. M. On determination of gradient in optimal control problems for frictionless mechanical oscillatory systems, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2025, vol. 29, no. 3, pp. 566–578. EDN: VCVBSZ. DOI: 10.14498/vsgtu2133 (In Russian).

**Authors' Details:**

*Alexander S. Zinchenko* https://orcid.org/0000-0001-7971-4572
Cand. Econom. Sci.; Associate Professor; Dept. of Mathematics[1]; e-mail: zinchenkoas@mai.ru

*Aleksander A. Nekhaev* https://orcid.org/0009-0004-2062-7967
Research Engineer; Dept. of Mathematical Modeling of Heterogeneous Systems[2];
e-mail: ganzol177@gmail.com

*Alexander M. Romanenkov* https://orcid.org/0000-0002-0700-8465
Cand. Techn. Sci., Associate Professor; Associate Professor; Dept. of Mathematics[1]; Senior Researcher; Dept. of Mathematical Modeling of Heterogeneous Systems[2];
e-mail: romanaleks@gmail.com

**Competing interests.** The authors declare that they have no competing interests regarding the authorship and publication of this paper.

**Authors' contributions and responsibilities.** All authors participated in the conceptualization of the study and manuscript preparation. The authors take full responsibility for submitting the final manuscript. The final version of the manuscript has been approved by all authors.

**Funding.** This research received no specific grant from any funding agency in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

## References

1. Barseghyan V. R. Optimal boundary control of a distributed heterogeneous vibrating system with given states at intermediate times, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2022, vol. 62, no. 12, pp. 2023–2032. EDN: RNFIXV. DOI: https://doi.org/10.1134/S096554252212003X.
2. Kubyshkin V. A. Mobile control of vibrations in systems with distributed parameters, *Autom. Remote Control*, 2011, vol. 72, no. 10, pp. 2112–2122. EDN: PEDUVV. DOI: https://doi.org/10.1134/S0005117911100109.
3. Egorov A. I., Znamenskaya L. N. Control of vibrations of coupled objects with distributed and lumped parameters, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2005, vol. 45, no. 10, pp. 1701–1718. EDN: LJHACF.
4. Atamuratov A. G., Mikhailov I. E., Muravey L. A. The moment problem in control problems of elastic dynamic systems, *Mekhatron., Avtomat., Upravl.*, 2016, vol. 17, no. 9, pp. 587–598 (In Russian). EDN: WMCIUZ. DOI: https://doi.org/10.17587/mau.17.587-598.
5. Atamuratov A. Zh., Mikhailov I. E., Taran N. A. Numerical damping of oscillations of beams by using multiple point actuators, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2018, no. 2, pp. 5–15 (In Russian). EDN: XUGGAH. DOI: https://doi.org/10.15593/perm.mech/2018.2.01.
6. Evans L. K. *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi* [Partial Differential Equations]. Novosibirsk, Tamara Rozhkovskaya, 2003, 562 pp. (In Russian)
7. Alraddadi I., Chowdhury M. A., Abbas M. S., et al. Dynamical behaviors and abundant new soliton solutions of two nonlinear PDEs via an efficient expansion method in industrial engineering, *Mathematics*, 2024, vol. 12, no. 13, 2053. EDN: AWHEGO. DOI: https://doi.org/10.3390/math12132053.
8. Arguchintsev A., Poplevko V. An optimal control problem by a hybrid system of hyperbolic and ordinary differential equations, *Games*, 2021, vol. 12, no. 1, 23. EDN: IXNDSP. DOI: https://doi.org/10.3390/g12010023.
9. Barbu T. CNN-based temporal video segmentation using a nonlinear hyperbolic PDE-based multi-scale analysis, *Mathematics*, 2023, vol. 11, no. 1, 245. EDN: KEHSPX. DOI: https://doi.org/10.3390/math11010245.
10. Khanfer A., Bougoffa L., Alhelali N. On the sixth-order beam equation of small deflection with variable parameters, *Mathematics*, 2025, vol. 13, no. 5, 727. EDN: AVNCCA. DOI: https://doi.org/10.3390/math13050727.
11. Dimitrov N. D., Jonnalagadda J. M. Existence of positive solutions for a class of nabla fractional boundary value problems, *Fractal Fract.*, 2025, vol. 9, no. 2, 131. EDN: SCNVOO. DOI: https://doi.org/10.3390/fractalfract9020131.
12. Kozlova E. A. Control problem for the hyperbolic equation with the characteristics having the angular coefficients of the same sign, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2012, no. 1, pp. 243–247 (In Russian). EDN: PAEJSX. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1046.
13. Kozlova E. A. Boundary Control Problem for the Hyperbolic System, *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, 2013, vol. 13, no. 1, pp. 51–56 (In Russian). EDN: SMXXRV. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2013-13-1-2-51-56.
14. Arguchintsev A. V., Kedrin V. S., Kedrina M. S. Variational optimality condition in the control problem of hyperbolic equations with dynamic boundary conditions, *Bull. Buryat*

*State Univ. Math., Inform.*, 2021, no. 1, pp. 13–23 (In Russian). EDN: PMLLOO. DOI: https://doi.org/10.18101/2304-5728-2021-1-13-23.

15. Samarskiy A. A., Vabishchevich P. N. *Vychislitel'naya teploperedacha* [Computational Heat Transfer]. Moscow, Librokom, 2014, 784 pp. (In Russian). EDN: QJVMAV.
16. Vasil'ev F. P. *Metody optimizatsii* [Optimization Methods], Part 2. Moscow, Moscow Center for Continuous Mathematical Education, 2011, 434 pp. (In Russian)
17. Romanenkov A. M. Gradient in the problem of controlling processes described by linear pseudohyperbolic equations, *Differ. Equ.*, 2024, vol. 60, no. 2, pp. 215–226. EDN: FGNUPM. DOI: https://doi.org/10.1134/S001226612402006X.