Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2024. Т. 28, № 4. С. 651–664
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2114
EDN: CFEGES

УДК 517.977.1

Задача оптимального динамического измерения с мультипликативным воздействием в пространствах дифференцируемых «шумов»

М. А. Сагадеева

Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет),
Россия, 454080, Челябинск, пр. Ленина, 76.

Аннотация

В статье исследуется модель оптимального динамического измерения с мультипликативным воздействием, рассматриваемая как задача оптимального управления для нестационарной системы леонтьевского типа. Установлено существование решения данной задачи в стохастической постановке. Основная цель заключается в нахождении восстанавливаемого сигнала (управляющего воздействия), максимально приближающего состояние системы к наблюдаемым показателям, при наличии дополнительного входного процесса, моделирующего помеху. Решения системы требуется искать в пространствах случайных процессов. Для этого предварительно анализируется задача оптимального управления в пространствах дифференцируемых «шумов». Линейность модели преобразователя, описываемой нестационарной системой леонтьевского типа, позволяет декомпозировать исходную систему на детерминированную и стохастическую подсистемы. На основе результатов о разрешимости задач оптимального управления для каждой из подсистем получено решение исходной задачи.

В первой части статьи приведены условия разрешимости стохастической нестационарной системы леонтьевского типа. Во второй части исследуется задача оптимального управления в стохастическом случае, а также выводятся оценки для минимизируемых функционалов с использованием результатов, полученных ранее для детерминированного аналога. В заключении представлен алгоритм исследования задачи оптимального динамического измерения с мультипликативным воздействием в пространствах «шумов».

Дифференциальные уравнения и математическая физика
Научная статья

Образец для цитирования
Сагадеева М. А. Задача оптимального динамического измерения с мультипликативным воздействием в пространствах дифференцируемых «шумов» // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2024. Т. 28, № 4. С. 651–664. EDN: CFEGES. DOI: 10.14498/vsgtu2114.

Сведения об авторе
Минзиля Алмасовна Сагадеева https://orcid.org/0000-0001-9376-4242
кандидат физико-математических наук, доцент; доцент; каф. математического и компьютерного моделирования; e-mail: sagadeevama@susu.ru

Ключевые слова: задача оптимального управления, нестационарная система леонтьевского типа, относительно регулярные матрицы, задача Шоуолтера–Сидорова, производная Нельсона–Гликлиха.

Получение: 6 сентября 2024 г. / Исправление: 17 ноября 2024 г. / Принятие: 28 ноября 2024 г. / Публикация онлайн: 27 декабря 2024 г.

Введение. Задача оптимального динамического измерения [1] формулируется как поиск внешнего воздействия, обеспечивающего минимальное отклонение наблюдаемых значений от данных, генерируемых моделью преобразователя. Данная задача относится ко второй обратной задаче теории динамических измерений в соответствии с классификацией [2, 3]. Преимуществом формулировки задачи в терминах оптимального управления решениями системы леонтьевского типа [4] является возможность получения решения без перехода в частотную область.

Рассмотрим стохастическую нестационарную систему леонтьевского типа в пространстве $\mathbb{R}^n$ [5]:

$$L \overset{\circ}{\xi}(t) = a(t)M\xi(t) + Bu(t) + \delta(t), \tag{1}$$

где L, M, B — квадратные матрицы порядка n, причем $\det L = 0$. Скалярная функция $a : [0, \tau] \to \mathbb{R}_+$ характеризует временную зависимость параметров взаимовлияния состояний исследуемой системы, а матрица M является (L, p)-регулярной (т.е. существует $\mu \in \mathbb{C}$ такая, что $\det(\mu L - M) \neq 0$, при этом ∞ выступает полюсом порядка $p = \overline{0, n-1}$ для резольвенты $(\mu L - M)^{-1}$). Вектор-функция $u : [0, \tau] \to \mathbb{R}^n$ моделирует управляющее воздействие, а случайный процесс $\delta : (0, \tau) \to \mathbb{R}^n$ отражает влияние помех. Решение системы (1), учитывающее стохастическую природу $\delta(t)$, представляет собой случайный процесс $\xi(t)$, описывающий эволюцию состояний системы под внешним воздействием $u(t)$ и влиянием помех $\delta(t)$. Производная $\overset{\circ}{\xi}$ в уравнении понимается в смысле Нельсона–Гликлиха [6, 7], совпадая с классической производной на скалярных функциях.

Системы леонтьевского типа (1) представляют собой конечномерный аналог уравнений соболевского типа [8, 9], изучаемых в более общих функциональных пространствах. Условие вырожденности $\det L = 0$ системы (1) при численных решениях классической задачи Коши требует согласования начальных данных [10]. Использование начального условия Шоуолтера—Сидорова [11], более естественного для вырожденных систем, [11]

$$\left[(\nu L - M)^{-1} L\right]^{p+1} (\xi(0) - \xi_0) = 0 \quad \text{при} \quad \nu \in \mathbb{C} : \det(\nu L - M) \neq 0 \tag{2}$$

позволяет упростить алгоритмы численного решения таких задач. Кроме того, в современных исследованиях уравнений соболевского типа начальное условие Шоуолтера–Сидорова рассматривается как наиболее естественное для прикладных задач [12].

Для постановки задачи оптимального управления решениями задачи Шоуолтера—Сидорова (2) для системы леонтьевского типа (1) введем функционал штрафа

$$J(u)=\sum_{q=0}^{1}\int_0^{\tau}\left\|C\overset{\circ}{\xi}{}^{(q)}(u,t)-z_0^{(q)}(t)\right\|_{\mathfrak{Z}}^2dt,$$

где $\tau\in\mathbb{R}_+$, пространства управлений $\mathfrak{U}$ и наблюдений $\mathfrak{Z}$ — гильбертовы пространства, а C — квадратная матрица порядка n. Здесь $z_0(t)$ описывает целевую динамику состояний, к которой система приводится с помощью управления $u(t)$. Требуется найти оптимальное управление $\hat{u}\in\mathfrak{U}_{ad}$, удовлетворяющее условию

$$J(\hat{u})=\min_{u\in\mathfrak{U}_{ad}}J(u),$$

где $\xi(\hat{u})$ почти всюду на $(0,\tau)$ удовлетворяет системе (1) и начальному условию (2). Множество $\mathfrak{U}_{ad}$ представляет собой выпуклое и компактное подмножество допустимых управлений в пространстве $\mathfrak{U}$. Задача оптимального управления решениями стационарных систем леонтьевского типа исследовалась, например, в работах [10, 13, 14]. Разрешимость задачи оптимального управления для стационарного стохастического уравнения соболевского типа изучена в [15].

Отметим, что благодаря линейности системы (1) ее можно представить в виде системы, состоящей из детерминированной части

$$L\dot{x}(t)=a(t)Mx(t)+Bu(t)$$

и стохастической части

$$L\overset{\circ}{\eta}(t)=a(t)M\eta(t)+\delta(t),$$

где $x(t)=\mathbf{E}\xi(t)$ обозначает математическое ожидание процесса $\xi(t)$, а $\eta(t)=$ $=\xi(t)-x(t)$ — центрированный случайный процесс. Таким образом, нам необходимо исследовать стохастическую систему леонтьевского типа и описать решение задачи оптимального управления для этой системы.

Основной целью данной статьи является построение решения задачи оптимального динамического измерения при наличии мультипликативного воздействия в пространстве случайных процессов. Для этого предложены решения задачи оптимального управления решениями задачи (2) для нестационарных систем леонтьевского типа (1) с использованием методов вырожденных потоков разрешающих матриц [16].

1. Разрешимость нестационарных стохастических систем леонтьевского типа в пространстве дифференцируемых «шумов». Обозначим множество матриц размера $n\times m$ символом $\mathbb{M}_{n\times m}$. Пусть L, $M\in$ $\mathbb{M}_{n\times n}$ — квадратные матрицы порядка n. Следуя [8, 17], будем называть множества

$$\rho^L(M)=\{\mu\in\mathbb{C}:\det(\mu L-M)\neq 0\}$$

и

$$\sigma^L(M)=\mathbb{C}\setminus\rho^L(M)$$

соответственно *L-резольвентным множеством* и *L-спектром* матрицы M. Нетрудно показать [8, 17], что либо $\rho^L(M)=\emptyset$, либо L-спектр матрицы M

состоит из конечного множества точек. Кроме того, заметим, что множества $\rho^L(M)$ и $\sigma^L(M)$ инвариантны относительно выбора базиса. Здесь и далее будем предполагать, что $\rho^L(M) \neq \emptyset$.

Для комплексной переменной $\mu \in \mathbb{C}$ определим матрично-значные функции

$$(\mu L - M)^{-1}, \quad R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1} L, \quad L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1},$$

с областью определения $\rho^L(M)$. Эти функции будем называть соответственно L-*резольвентой*, *правой* и *левой* L-*резольвентами* матрицы M. Согласно результатам [8,17], L-резольвента, правая и левая L-резольвенты матрицы M голоморфны в $\rho^L(M)$.

Определение 1. Матрица M называется L-*регулярной*, если $\rho^L(M) \neq \emptyset$; L-регулярная матрица M называется (L,p)-*регулярной*, если p равно порядку полюса в ∞ для функции $(\mu L - M)^{-1}$.

Замечание. Если бесконечность является устранимой особой точкой L-резольвенты матрицы M, то $p = 0$. Также заметим, что для квадратных матриц параметр p не может превосходить размерности пространства n.

Ортогональные проекторы [8,17], расщепляющие пространство $\mathbb{R}^n$, имеют вид

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma R^L_\mu(M) d\mu, \quad Q = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma L^L_\mu(M) d\mu,$$

где контур $\gamma \subset \mathbb{C}$ такой, что $\gamma = \partial D$ и $D \supset \sigma^L(M)$. Сужение матриц L (M) на подпространства $\ker P$ и $\operatorname{im} P$ обозначим через L_k (M_k), $k = 0,1$ ($k = 0$ для сужений на $\ker P$ и $k = 1$ — для $\operatorname{im} P$).

Лемма. *Пусть матрица M (L,p)-регулярна $(p = \overline{0, n-1})$. Тогда существуют матрицы L_1^{-1} и M_0^{-1}.*

Рассмотрим задачу Шоуолтера—Сидорова

$$P\big(x(0) - x_0\big) = 0 \tag{3}$$

для неоднородного нестационарного уравнения

$$L\dot{x}(t) = a(t)Mx(t) + f(t) \tag{4}$$

с функцией $f : \mathfrak{J} \to \mathbb{R}^n$. В дальнейшем обозначим $(E_n - Q)f(t) = f^0(t)$, где E_n — единичная матрица размера n.

Определение 2. Решение уравнения (4) будем называть *решением задачи Шоуолтера—Сидорова* (3), (4), если оно дополнительно удовлетворяет условию (3).

Теорема 1 [16]. *Пусть $0, \tau \in \mathfrak{J}$, матрица M (L,p)-регулярна $(p = \overline{0, n-1})$ и функция $a \in C^{p+1}([0,\tau]; \mathbb{R}_+)$. Тогда для любой функции $f : [0,\tau] \to \mathbb{R}^n$ такой, что $Qf \in C^1([0,\tau]; \operatorname{im} Q)$ и $f^0 \in C^{p+1}([0,\tau]; \ker Q)$, и для любого начального значения $x_0 \in \mathbb{R}^n$ существует единственное решение $x \in C^1([0,\tau]; \mathbb{R}^n)$ задачи Шоуолтера—Сидорова (3) для уравнения (4), которое имеет вид*

$$x(t) = X(t,0)Px_0 + \int_0^t X(t,s)L_1^{-1}Qf(s)ds -$$
$$- \sum_{k=0}^{p}(M_0^{-1}L_0)^k M_0^{-1}\Big(\frac{1}{a(t)}\frac{d}{dt}\Big)^k \frac{(E_n - Q)f(t)}{a(t)}, \quad (5)$$

где поток $X(t,s) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma R_\mu^L(M)\exp\Big(\mu\int_s^t a(\zeta)d\zeta\Big)d\mu$ *для* $s < t$*, а выражение* $\Big(\dfrac{1}{a(t)}\dfrac{d}{dt}\Big)^q$ *означает последовательное применение* q *раз данного оператора.*

Перейдем к описанию пространств дифференцируемых «шумов». Пусть $\Omega \equiv (\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ — полное вероятностное пространство с вероятностной мерой $\mathbf{P}$, ассоциированное с σ-алгеброй $\mathcal{A}$ подмножеств множества Ω, а $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел со стандартной борелевой σ-алгеброй и мерой Лебега. Измеримое отображение $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ называется *случайной величиной*. Множество случайных величин с нулевым математическим ожиданием и конечной дисперсией образует гильбертово пространство

$$\mathbf{L}_2 = \mathbf{L}_2(\mathbb{R}) = \{\xi : \mathbf{E}\xi = 0, \mathbf{D}\xi < +\infty\}$$

со скалярным произведением $(\xi_1, \xi_2) = \mathbf{E}\xi_1\xi_2$ и нормой $\|\xi\|_{\mathbf{L}_2}^2 = \mathbf{D}\xi$.

Возьмем множество $\mathfrak{I} \subset \mathbb{R}$. Отображение $\eta : \mathfrak{I} \to \mathbf{L}_2$ задает *стохастический процесс*. Будем говорить, что стохастический процесс $\eta = \eta(t)$ непрерывен на интервале $\mathfrak{I}$, если п.н. (почти наверное) все его траектории непрерывны. Множество непрерывных стохастических процессов $\eta : \mathfrak{I} \to \mathbf{L}_2$ образует банахово пространство со стандартной sup-нормой, которое мы обозначим символом $C(\mathfrak{I}; \mathbf{L}_2)$. Введем в рассмотрение пространства дифференцируемых «шумов»

$$C^\ell(\mathfrak{I}; \mathbf{L}_2), \quad \ell \in \mathbb{N},$$

случайных процессов из $C(\mathfrak{I}; \mathbf{L}_2)$, чьи траектории п.н. *дифференцируемы по Нельсону—Гликлиху* [6, 7] на $\mathfrak{I}$ до порядка ℓ включительно.

Возьмем n случайных процессов $\{\eta_1(t), \eta_2(t), \ldots, \eta_n(t)\}$ и зададим *n-мерный случайный процесс* формулой

$$\Theta(t) = \sum_{j=1}^{n} \eta_j(t)e_j,$$

где e_j — орты в пространстве $\mathbb{R}^n$, $j = \overline{1,n}$ (для краткости такой процесс будем называть *n-случайным процессом*). Очевидно, что п.н. все его траектории непрерывны, если $\eta_j \in C(\mathfrak{I}; \mathbf{L}_2)$, $j = \overline{1,n}$, и непрерывно дифференцируемы по Нельсону—Гликлиху до порядка ℓ включительно, если $\eta_j \in C^\ell(\mathfrak{I}; \mathbf{L}_2)$, $j = \overline{1,n}$. По аналогии с предыдущим введем в рассмотрение пространства непрерывных $C(\mathfrak{I}; \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n))$ и непрерывно дифференцируемых $C^\ell(\mathfrak{I}; \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n))$ n-мерных «шумов».

Рассмотрим неоднородное нестационарное стохастическое уравнение

$$L \overset{\circ}{\eta}(t) = a(t)M\eta(t) + \varsigma(t), \quad (6)$$

где процесс $\varsigma : \mathfrak{I} \to \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n)$ будет описан ниже.

Определение 3. Процесс $\eta \in C(\mathfrak{I}; \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n)) \cap C^1(\mathfrak{I}; \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n))$ будем называть *решением уравнения* (6), если он на $\mathfrak{I}$ п.н. обращает его в тождество. Решение $\eta = \eta(t)$ уравнения (6) называется *решением задачи Шоуолтера—Сидорова*

$$P(\eta(t) - \eta_0) = 0 \tag{7}$$

для уравнения (6), если оно почти наверное удовлетворяет условию (7).

Теорема 2. *Пусть* $0, \tau \in \mathfrak{I}$, *матрица* M (L, p)-*регулярна* $(p = \overline{0, n-1})$ *и функция* $a \in C^{p+1}([0, \tau]; \mathbb{R}_+)$. *Тогда для любой случайной* n-*величины* $\eta_0 \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n)$, *не зависящей от процесса* $\varsigma : \mathfrak{I} \to \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n)$, *для которого выполнены условия*

$$Q\varsigma \in C(\mathfrak{I}; \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n)) \quad \text{и} \quad (E_n - Q)\varsigma \in C^{p+1}(\mathfrak{I}; \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n)),$$

существует почти наверное единственное решение

$$\eta \in C(\mathfrak{I}; \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n)) \cap C^1(\mathfrak{I}; \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n))$$

задачи (6), (7) *вида*

$$\eta(t) = -\sum_{k=0}^{p} (M_0^{-1} L_0)^k M_0^{-1} \left(\frac{1}{a(t)} \frac{ⓓ}{dt} \right)^k \frac{(E_n - Q)\varsigma(t)}{a(t)} + \\ + X(t, 0) P \eta_0 + \int_0^t X(t, s) L_1^{-1} Q \varsigma(s) ds, \tag{8}$$

где символ $\dfrac{ⓓ}{dt}$ *означает производную Нельсона—Гликлиха, а поток* $X(t, \tau)$ *такой же, как в теореме* 1.

Утверждение данной теоремы справедливо в силу теоремы 1 с учетом специфики пространств «шумов».

2. Задача оптимального управления решениями стохастической системы. Опираясь на результаты [16] о существовании решения задачи оптимального управления для детерминированной системы, исследуем задачу оптимального управления решениями стохастической нестационарной системы леонтьевского типа.

На интервале $[0, \tau) \subset \mathbb{R}_+$ $(\tau < +\infty)$ рассмотрим задачу Шоуолтера—Сидорова

$$P(\eta(t) - \eta_0) = 0 \tag{9}$$

для уравнения

$$L \overset{\circ}{\eta}(t) = a(t) M \eta(t) + \delta(t), \tag{10}$$

где матрицы L, $M \in \mathbb{M}_{n \times n}$, а скалярная функция $a : [0, \tau) \to \mathbb{R}_+$ и процесс $\delta : [0, \tau) \to \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n)$ подлежат дальнейшему определению.

Построим пространство

$$H^{p+1}(\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n)) = \{\xi \in L_2(0, \tau; \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n)) : \overset{\circ}{\xi}{}^{(p+1)} \in L_2(0, \tau; \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n)),\ p = \overline{0, n-1}\},$$

которое является гильбертовым в силу гильбертовости $\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n)$ со скалярным произведением

$$[\xi,\vartheta]=\sum_{q=0}^{p+1}\int_0^\tau \langle \xi^{(q)},\vartheta^{(q)}\rangle_{\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n)}dt.$$

Определение 4. Вектор-функцию $\eta\in H^1(\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n))=\{\eta\in L_2(0,\tau;\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n)):\overset{\circ}{\eta}\in L_2(0,\tau;\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n))\}$ назовем *сильным решением уравнения* (10), если она почти всюду на $(0,\tau)$ обращает его в тождество почти наверное. Сильное решение $x=x(t)$ системы (10) называется *сильным решением задачи Шоуолтера—Сидорова* (9), (10), если оно удовлетворяет (9) почти наверное.

В силу теоремы 2 справедлива

Теорема 3. *Пусть матрица M (L,p)-регулярна $(p=\overline{0,n-1})$ и функция $a\in C^{p+1}([0,\tau);\mathbb{R}_+)$. Тогда для любой случайной n-величины $\eta_0\in\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n)$, не зависящей от процесса $\delta:\mathfrak{I}\to\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n)$ такого, что $Q\delta\in L_2(\mathfrak{I};\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n))$ и $(E_n-Q)\delta\in H^{p+1}(\mathfrak{I};\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n))$, существует почти наверное единственное решение $\eta\in H^1(\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n))$ задачи Шоуолтера—Сидорова (9) для системы (10), имеющее вид (8), где вместо процесса $\varsigma(t)$ подставлен процесс $\delta(t)$.*

Пусть $\Upsilon=\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n)$ — гильбертово пространство, а матрица $C\in\mathbb{M}_{n\times n}$. Построим функционал качества

$$J_1(\delta)=\sum_{q=0}^{1}\int_0^\tau \|C\overset{\circ}{\eta}{}^{(q)}(\delta,t)-\overset{\circ}{\vartheta}{}_0^{(q)}(t)\|^2_\Upsilon dt, \tag{11}$$

где $\vartheta_0(t)$ — планируемый процесс состояний системы, который является процессом из некоторого гильбертова пространства наблюдений Υ. Заметим, что если $\eta\in H^1(\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n))$, то $\vartheta\in H^1(\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n))$.

Аналогично $H^{p+1}(\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n))$ зададим пространство $H^{p+1}(\Xi)$, которое является гильбертовым в силу гильбертовости $\Xi=\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n)$. Выделим в пространстве $H^{p+1}(\Xi)$ замкнутое и выпуклое подмножество $H^{p+1}_\partial(\Xi)=\Xi_{ad}$ — *множество допустимых управлений.*

Определение 5. Процесс $\hat{\delta}\in H^{p+1}_\partial(\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n))$ назовем *оптимальным управлением* решениями задачи (9), (10), если

$$J_1(\hat{\delta})=\min_{\delta\in\Xi_{ad}}J_1(\delta), \tag{12}$$

где процессы $\eta(\delta)\in H^1(\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n))$ и $\delta\in\Xi_{ad}$ таковы, что $\eta(\delta)\in H^1(\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n))$ является решением задачи (9), (10).

Теорема 4. *Пусть матрица M (L,p)-регулярна $(p=\overline{0,n-1})$, функция $a\in C^{p+1}([0,\tau);\mathbb{R}_+)$. Тогда для любой случайной n-величины $\eta_0\in\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n)$, не зависящей от независимых процессов $\vartheta_0\in H^1(\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n))$ и $\delta:\mathfrak{I}\to\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n)$ такого, что $Q\delta\in L_2(\mathfrak{I};\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n))$ и $(E_n-Q)\delta\in H^{p+1}(\mathfrak{I};\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n))$, существует оптимальное управление $\hat{\delta}\in\Xi_{ad}$ задачи (9), (10), (12) с функционалом (11).*

Справедливость этого утверждения получается аналогично соответствующему рассуждению из [15] с учетом теоремы 3 и поэтому не приводится.

Вернемся теперь к исходной системе

$$L \overset{\circ}{\xi}(t) = a(t)M\xi(t) + Bu(t) + \delta(t), \tag{13}$$

где L, M и B — квадратные матрицы порядка n, причем $\det L = 0$. Представим $\xi(t) = x(t) + \eta(t)$, причем процесс $\eta(t)$ описывает случайную ошибку и обладает соответствующими свойствами. Как уже отмечалось выше, эта система эквивалентна системе из двух уравнений: стохастического (10) и детерминированного

$$L\dot{x}(t) = a(t)Mx(t) + Bu(t), \tag{14}$$

где матрицы L, M, $B \in \mathbb{M}_{n\times n}$, а скалярная функция $a : [0,\tau) \to \mathbb{R}_+$ и вектор-функции $u : [0,\tau) \to \mathbb{R}^n$ подлежат дальнейшему определению.

Аналогично построим пространство

$$H^{p+1}(\mathfrak{Y}) = \{v \in L_2(0,\tau;\mathfrak{Y}) : v^{(p+1)} \in L_2(0,\tau;\mathfrak{Y}),\ p = \overline{0, n-1}\},$$

которое является гильбертовым в силу гильбертовости $\mathfrak{Y}$ со скалярным произведением

$$[v,w] = \sum_{q=0}^{p+1} \int_0^\tau \langle v^{(q)}, w^{(q)} \rangle_{\mathfrak{Y}} dt.$$

В силу теоремы 2 вид решения $x \in H^1(\mathfrak{X})$ задачи

$$P(x(0) - x_0) = 0 \tag{15}$$

для уравнения (14) имеет вид (5), где вместо функции $f(t)$ подставлена функция $Bu(t)$. Пусть $\mathfrak{Z}$ — гильбертово пространство, а оператор $C \in \mathcal{L}(\mathfrak{X};\mathfrak{Z})$. Построим функционал качества

$$J_2(u) = \sum_{q=0}^{1} \int_0^\tau \|Cx^{(q)} - z_0^{(q)}\|_{\mathfrak{Z}}^2 dt,$$

где $z_0(t)$ — наблюдаемые значения состояний системы, которые являются функциями из некоторого гильбертова пространства наблюдений $\mathfrak{Z}$. Заметим, что если $x \in H^1(\mathfrak{X})$, то $z \in H^1(\mathfrak{Z})$. Так как $\mathfrak{U}$ — гильбертово пространство, пространство $H^{p+1}(\mathfrak{U})$ также является гильбертовым по построению. Наконец, выделим *множество допустимых управлений*, которое является замкнутым и выпуклым подмножеством $H_\partial^{p+1}(\mathfrak{U}) = \mathfrak{U}_{ad}$ в пространстве $H^{p+1}(\mathfrak{U})$.

Вектор-функцию $\hat{u} \in H_\partial^{p+1}(\mathfrak{U})$ назовем *оптимальным управлением* решениями задачи (14), (15), если

$$J_2(\hat{u}) = \min_{u \in \mathfrak{U}_{ad}} J_2(u),$$

где функции $x(u) \in \mathfrak{X}$ и $u \in \mathfrak{U}_{ad}$ таковы, что $x(u) \in \mathfrak{X}$ является решением задачи (14), (15). В [16] показано, что такое оптимальное управление существует и единственно для любых начальных данных $x_0 \in \mathfrak{X}$ и наблюдений $z_0 \in H^1(\mathfrak{Z})$.

Рассмотрим функционал штрафа

$$J(u)=\sum_{q=0}^{1}\int_0^\tau \mathbf{E}\|C\overset{\circ}{\xi}{}^{(q)}(u,t)-z_0^{(q)}(t)\|^2_{\mathbb{R}^n}dt=$$

$$=\sum_{q=0}^{1}\int_0^\tau \mathbf{E}\|C(x^{(q)}(u,t)+\overset{\circ}{\eta}{}^{(q)}(\delta,t))-z_0^{(q)}(t)\|^2_{\mathbb{R}^n}dt\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{q=0}^{1}\int_0^\tau \|Cx^{(q)}(u,t)-z_0^{(q)}(t)\|^2_{\mathbb{R}^n}dt+\int_0^\tau \mathbf{E}\|C\overset{\circ}{\eta}{}^{(q)}(\delta,t)\|^2_{\mathbb{R}^n}dt.$$

Соответственно, для функционала $J(u)$ выполняется неравенство

$$J_2(u)\leqslant J(u)\leqslant J_2(u)+K\|\delta\|_{H^1(\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^n))},\tag{16}$$

где K — константа, зависящая от параметров задачи. По постановке задачи ясно, что требуется найти управляющее воздействие, которое наиболее близко приведет состояние системы к плановому значению. Поэтому полученная оценка помехи будет учитываться при реализации алгоритма нахождения численного решения задачи оптимального управления для детерминированной части системы.

Наконец, в заключение коротко приведем *алгоритм решения задачи оптимального управления* для системы (13). При нахождении оптимального управления будем использовать построенные ранее алгоритмы [18, 19].

Шаг 1. Построить детерминированную часть наблюдения $z_0(t)$ с использованием алгоритма построения наблюдения для задачи оптимального динамического измерения по искаженным данным. В силу вида системы модели измерительного устройства помеха δ отвечает за внутренние помехи системы и по норме пренебрежимо мала.

Шаг 2. По введенным матрицам L, M найти решение детерминированной части нестационарной системы леонтьевского типа, используя приближения матриц разрешающего семейства с помощью степеней пучка $\mu L-M$, причем μ зависит от мультипликативной функции $a(t)$.

Шаг 3. В силу вида системы модели измерительного устройства помеха δ отвечает за внутренние помехи системы и по норме пренебрежимо мала. Константа K оценивается с помощью оценок определителей матриц L, M, их пучка $\mu L-M$ и ее степеней, а также матрицы C из функционала $J(u)$.

Шаг 4. По полученной части наблюдения $z_0(t)$ на шаге 1 найти решение задачи оптимального управления решениями детерминированной части нестационарной системы леонтьевского типа. При этом вычислительная погрешность ε при поиске минимума функционала штрафа $J(u)$ выбирается соразмерно константам, найденным на предыдущем шаге.

Заключение. В работе доказана разрешимость задачи оптимального динамического измерения с мультипликативным воздействием в пространствах случайных процессов. Основным результатом является построение решения для нестационарных систем леонтьевского типа методами вырожденных потоков разрешающих матриц, что расширяет классические подходы теории динамических измерений.

Полученная оценка отклонения функционала качества (16) демонстрирует, что влияние стохастической составляющей на целевую динамику системы может быть контролируемо через норму помехи $\|\delta\|_{H^1}$. Это позволяет при численной реализации задачи фокусироваться на оптимизации детерминированной компоненты, существенно снижая вычислительную сложность алгоритмов.

Результаты работы имеют значение для прикладных задач управления системами с шумовыми возмущениями, включая обработку сигналов в условиях нестационарности. Дальнейшие исследования могут быть направлены на обобщение метода для нелинейных систем и анализ устойчивости полученных решений.

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Ответственность автора. Автор несет полную ответственность за подготовку окончательной версии рукописи и подтверждает ее одобрение для публикации.

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-11-20037, https://rscf.ru/project/24-11-20037/.

Библиографический список

1. Бычков Е. В., Загребина С. А., Замышляева А. А. [и др.] Развитие теории оптимальных динамических измерений // *Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование*, 2022. Т. 15, № 3. С. 19–33. EDN: XCLBOY. DOI: https://doi.org/10.14529/mmp220302.
2. Грановский В. А. *Динамические измерения. Основы метрологического обеспечения.* Л.: Энергоатомиздат, 1984. 224 с.
3. Шестаков А. Л. *Методы теории автоматического управления в динамических измерениях.* Челябинск: ЮУрГУ, 2013. 257 с. EDN: UBFILJ.
4. Shestakov A. L., Keller A. V., Sviridyuk G. A. The theory of optimal measurements // *J. Comp. Eng. Math.*, 2014. vol. 1, no. 1. pp. 3–16. EDN: TRZDMN.
5. Свиридюк Г. А., Брычев С. В. Численное решение систем уравнений леонтьевского типа // *Изв. вузов. Матем.*, 2003. № 8. С. 46–52. EDN: HQUFDX.
6. Favini A., Sviridyuk G. A., Sagadeeva M. A. Linear Sobolev type equations with relatively p-sectorial operators in space of “noises” // *Mediter. J. Math.*, 2016. vol. 15, no. 1. pp. 185–196. EDN: WPETIL. DOI: https://doi.org/10.1007/s00009-016-0765-x.
7. Гликлих Ю. Е. Изучение уравнений леонтьевского типа с белым шумом методами производных в среднем случайных процессов // *Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование*, 2012. № 13. С. 24–34. EDN: PCAULL.
8. Sviridyuk G. A., Fedorov V. E. *Linear Sobolev Type Rquations and Degenerate Semigroups of Operators* / Inverse and Ill-Posed Problems Series. vol. 42. Utrecht: De Gruyter, 2003. viii+216 pp. DOI: https://doi.org/10.1515/9783110915501.
9. Al’shin A. B., Korpusov M. O., Sveshnikov A. G. *Blow-up in Nonlinear Sobolev Type Equations* / De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications. vol. 15. Berlin: De Gruyter, 2011. xii+648 pp. DOI: https://doi.org/10.1515/9783110255294.
10. Келлер А. В. Системы леонтьевского типа: классы задач с начальным условием Шоуолтера–Сидорова и численные решения // *Изв. Иркутск. гос. унив. Сер. Математика*, 2010. Т. 3, № 2. С. 30–43. EDN: MTOZSB.
11. Свиридюк Г. А., Загребина С. А. Задача Шоуолтера–Сидорова как феномен уравнений соболевского типа // *Изв. Иркутск. гос. унив. Сер. Математика*, 2010. Т. 3, № 1. С. 104–125. EDN: MNINJT.
12. Келлер А. В., Загребина С. А. Некоторые обобщения задачи Шоуолтера–Сидорова для моделей соболевского типа // *Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и про-*

граммирование, 2015. Т. 8, № 2. С. 5–23. EDN: TSZPJD. DOI: https://doi.org/10.14529/mmp150201.

13. Свиридюк Г. А., Келлер А. В. О сходимости численного решения задач оптимального управления для систем уравнений леонтьевского типа // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2011. № 2. С. 24–33. EDN: OZBCED. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu951.
14. Keller A. V. On the computational efficiency of the algorithm of the numerical solution of optimal control problems for models of Leontieff type // *J. Comp. Eng. Math.*, 2015. vol. 2, no. 2. pp. 39–59. EDN: UCRTJH. DOI: https://doi.org/10.14529/jcem150205.
15. Замышляева А. А., Цыпленкова О. Н. Восстановление динамически искаженных сигналов на основе теории оптимального управления решениями уравнений соболевского типа в пространствах случайных процессов // *Вестн. Южно-Ур. ун-та. Сер. Матем. Мех. Физ.*, 2022. Т. 14, № 3. С. 38–44. EDN: OCTGLH. DOI: https://doi.org/10.14529/mmph220304.
16. Keller A. V., Sagadeeva M. A. Degenerate matrix groups and degenerate matrix flows in solving the optimal control problem for dynamic balance models of the economy / Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, 325, Semigroups of Operators – Theory and Applications. Cham: Springer, 2020. pp. 263–277. EDN: WQDSBE. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-46079-2_15.
17. Shestakov A. L., Sviridyuk G. A., Khudyakov Yu. V. Dynamical measurements in the view of the group operators theory / *Semigroups of Operators – Theory and Applications* / Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, 113. Cham: Springer, 2015. pp. 273–286. EDN: WWFJNX. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-12145-1_17.
18. Сагадеева М. А. Построение наблюдения для задачи оптимального динамического измерения по искаженным данным // *Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование*, 2019. Т. 12, № 2. С. 82–96. EDN: ZTEVRZ. DOI: https://doi.org/10.14529/mmp190207.
19. Шестаков А. Л., Загребина С. А., Манакова Н. А. [и др.] Алгоритм численного нахождения оптимального измерения, искаженного инерционностью, резонансами и деградацией измерительного устройства // *Автомат. и телемех.*, 2021. № 1. С. 55–67. EDN: BDHCLB. DOI: https://doi.org/10.31857/S0005231021010025.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 4, pp. 651–664
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2114

MSC: 93C23

Problem of optimal dynamic measurement with multiplicative effects in spaces of differentiable “noises”

M. A. Sagadeeva

South Ural State University,
(National Research University),
76, prosp. Lenina, Chelyabinsk, 454080, Russian Federation.

Abstract

The article deals with a model of optimal dynamic measurement with multiplicative influence, considered as an optimal control problem for a non-stationary Leontief-type system. The existence of a solution to this problem in a stochastic formulation is established. The main objective is to find a recoverable signal (control action) that brings the system state as close as possible to the observed indicators, given the presence of an additional input process modeling noise. Solutions to the system must be sought in spaces of random processes. To achieve this, the optimal control problem in spaces of differentiable “noises” is preliminarily analyzed. The linearity of the transducer model, described by a non-stationary Leontief-type system, allows the original system to be decomposed into deterministic and stochastic subsystems. Based on the results regarding the solvability of optimal control problems for each subsystem, a solution to the original problem is obtained.

The first part of the article presents the solvability conditions for a stochastic non-stationary Leontief-type system. The second part explores the optimal control problem in the stochastic case and derives estimates for the minimized functionals using results previously obtained for the deterministic counterpart. In conclusion, an algorithm for studying the problem of optimal dynamic measurement with multiplicative influence in spaces of “noises” is presented.

Keywords: optimal control problem, nonstationary Leontief-type system, relatively regular matrices, Showalter–Sidorov problem, Nelson–Gliklikh derivative.

Received: 6th September, 2024 / Revised: 17th November, 2024 / Accepted: 28th November, 2024 / First online: 27th December, 2024

Differential Equations and Mathematical Physics
Research Article

Please cite this article in press as:
S a g a d e e v a M. A. Problem of optimal dynamic measurement with multiplicative effects in spaces of differentiable “noises”, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 4, pp. 651–664. EDN: CFEGES. DOI: 10.14498/vsgtu2114 (In Russian).

Author’s Details:
Minzilia A. Sagadeeva https://orcid.org/0000-0001-9376-4242
Cand. Phys. & Math. Sci., Associate Professor; Associate Professor; Dept. of Mathematical and Computer Modeling; e-mail: sagadeevama@susu.ru

Conflict of interest. The author declares no conflict of interest.

Author's Responsibilities. The author is solely responsible for preparing the final version of the manuscript and approves it for publication.

Funding. The study was supported by a grant from the Russian Science Foundation no. 24-11-20037, https://rscf.ru/project/24-11-20037/.

References

1. Bychkov E. V., Zagrebina S. A., Zamyshlyaeva A. A., et al. Development of the theory of optimal dynamic measurement, *Vestnik YuUrGU. Ser. Mat. Model. Progr.*, 2022, vol. 15, no. 3, pp. 19–33 (In Russian). EDN: XCLBOY. DOI: https://doi.org/10.14529/mmp220302.
2. Granovskiy V. A. *Dinamicheskie izmereniia. Osnovy metrologicheskogo obespecheniia* [Dynamic Measurements. Fundamentals of Metrological Support]. Leningrad, Energoatomizdat, 1984, 224 pp. (In Russian)
3. Shestakov A. L. *Metody teorii avtomaticheskogo upravleniia v dinamicheskikh izmereniiakh* [Methods of the Theory of Automatic Control in Dynamic Measurements]. Chelyabinsk, South Ural State Univ., 2013, 257 pp. (In Russian). EDN: UBFILJ.
4. Shestakov A. L., Keller A. V., Sviridyuk G. A. The theory of optimal measurements, *J. Comp. Eng. Math.*, 2014, vol. 1, no. 1, pp. 3–16. EDN: TRZDMN.
5. Sviridyuk G. A., Brychev S. V. Numerical solution of systems of equations of Leontief type, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2003, vol. 47, no. 8, pp. 44–50.
6. Favini A., Sviridyuk G. A., Sagadeeva M. A. Linear Sobolev type equations with relatively p-sectorial operators in space of "noises", *Mediter. J. Math.*, 2016, vol. 15, no. 1, pp. 185–196. EDN: WPETIL. DOI: https://doi.org/10.1007/s00009-016-0765-x.
7. Gliklikh Yu. E. Investigation of Leontieff type equations with white noise by the methods of mean derivatives of stochastic processes, *Vestnik YuUrGU. Ser. Mat. Model. Progr.*, 2012, no. 13, pp. 24–34 (In Russian). EDN: PCAULL.
8. Sviridyuk G. A., Fedorov V. E. *Linear Sobolev Type Rquations and Degenerate Semigroups of Operators*, Inverse and Ill-Posed Problems Series, vol. 42. Utrecht, De Gruyter, 2003, viii+216 pp. DOI: https://doi.org/10.1515/9783110915501.
9. Al'shin A. B., Korpusov M. O., Sveshnikov A. G. *Blow-up in Nonlinear Sobolev Type Equations*, De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, vol. 15. Berlin, De Gruyter, 2011, xii+648 pp. DOI: https://doi.org/10.1515/9783110255294.
10. Keller A. V. The Leontief type systems: classes of problems with the Showalter–Sidorov intial condition and numerical solving, *Bulletin of Irkutsk State Univ., Ser. Mathematics*, 2010, vol. 3, no. 2, pp. 30–43 (In Russian). EDN: MTOZSB.
11. Sviridyuk G. A., Zagrebina S. A. The Showalter–Sidorov problem as a phenomena of the Sobolev-type equations, *Bulletin of Irkutsk State Univ., Ser. Mathematics*, 2010, vol. 3, no. 1, pp. 104–125 (In Russian). EDN: MNINJT.
12. Keller A. V., Zagrebina S. A. Some generalizations of the Showalter–Sidorov problem for Sobolev-type models, *Vestnik YuUrGU. Ser. Mat. Model. Progr.*, 2015, vol. 8, no. 2, pp. 5–23 (In Russian). EDN: TSZPJD. DOI: https://doi.org/10.14529/mmp150201.
13. Sviridyuk G. A., Keller A. V. On the numerical solution convergence of optimal control problems for Leontief type system, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2011, no. 2, pp. 24–33 (In Russian). EDN: OZBCED. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu951.
14. Keller A. V. On the computational efficiency of the algorithm of the numerical solution of optimal control problems for models of Leontieff type, *J. Comp. Eng. Math.*, 2015, vol. 2, no. 2, pp. 39–59. EDN: UCRTJH. DOI: https://doi.org/10.14529/jcem150205.
15. Zamyshlyaeva A. A., Tsyplenkova O. N. Reconstruction of dynamically distorted signals based on the theory of optimal control of solutions for Sobolev type equations in the spaces of stochastic processes, *Vestn. Yuzhno-Ural. Gos. Un-ta. Ser. Matem. Mekh. Fiz.*, 2022, vol. 14, no. 3, pp. 38–44 (In Russian). EDN: OCTGLH. DOI: https://doi.org/10.14529/mmph220304.

16. Keller A. V., Sagadeeva M. A. Degenerate matrix groups and degenerate matrix flows in solving the optimal control problem for dynamic balance models of the economy, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, 325, Semigroups of Operators – Theory and Applications. Cham, Springer, 2020, pp. 263–277. EDN: WQDSBE. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-46079-2_15.
17. Shestakov A. L., Sviridyuk G. A., Khudyakov Yu. V. Dynamical measurements in the view of the group operators theory, In: *Semigroups of Operators – Theory and Applications*, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, 113. Cham, Springer, 2015, pp. 273–286. EDN: WWFJNX. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-12145-1_17.
18. Sagadeeva M. A. Reconstruction of observation from distorted data for the optimal dynamic measurement problem, *Vestnik YuUrGU. Ser. Mat. Model. Progr.*, 2019, vol. 12, no. 2, pp. 82–96 (In Russian). EDN: ZTEVRZ. DOI: https://doi.org/10.14529/mmp190207.
19. Shestakov A. L., Zagrebina S. A., Manakova N. A., et al. Numerical optimal measurement algorithm under distortions caused by inertia, resonances, and sensor degradation, *Autom. Remote Control*, 2021, vol. 82, no. 1, pp. 41–50. EDN: FIKVSX. DOI: https://doi.org/10.1134/S0005117921010021.