



УДК 519.642.2

Разностные схемы повышенного порядка точности для нагруженных уравнений теплопроводности с граничными условиями первого рода

М. Х. Бештоков

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
Россия, 360000, Нальчик, ул. Шортанова, 89 а.

Аннотация

Исследуются начально-краевые задачи для нагруженных дифференциальных уравнений теплопроводности с граничными условиями первого рода. Для численного решения рассматриваемых задач построены разностные схемы высокого порядка точности. Методом энергетических неравенств получены априорные оценки в разностной форме. Из установленных оценок следует единственность и устойчивость решения по правой части и начальным данным, а также сходимость решения разностной задачи к решению исходной дифференциальной задачи со скоростью $O(h^4 + \tau^2)$. Проведены численные эксперименты для тестовых примеров, подтверждающие теоретические результаты работы.

Ключевые слова: параболическое уравнение, первая начально-краевая задача, нагруженное уравнение, интегральное уравнение, априорная оценка, разностная схема, устойчивость и сходимость.

Получение: 6 января 2025 г. / Исправление: 12 апреля 2025 г. /
Принятие: 28 апреля 2025 г. / Публикация онлайн: 24 июня 2025 г.

Дифференциальные уравнения и математическая физика Научная статья

© Коллектив авторов, 2025

© СамГТУ, 2025 (составление, дизайн, макет)

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Бештоков М. Х. Разностные схемы повышенного порядка точности для нагруженных уравнений теплопроводности с граничными условиями первого рода // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2025. Т. 29, № 2. С. 220–240. EDN: EORDFG. DOI: 10.14498/vsgtu2142.

Сведения об авторе

Мурат Хамидбиевич Бештоков  <https://orcid.org/0000-0003-2968-9211>

кандидат физико-математических наук, доцент; ведущий научный сотрудник; отд. вычислительных методов; e-mail: beshtokov-murat@yandex.ru

Введение. Многие важные задачи математической физики и биологии [1], включая задачи долгосрочного прогнозирования и регулирования грунтовых вод [2], моделирования процессов переноса частиц [3], тепломассопереноса с сосредоточенными источниками (стоками) переносимой субстанции, фильтрации жидкости в пористых средах [4], исследования обратных задач [5], а также решения задач оптимального управления агроэкосистемами [6], приводят к краевым задачам для нагруженных уравнений в частных производных.

Термин «нагруженное уравнение» был впервые введен в работе [7]. Современное общепринятое определение нагруженных уравнений было предложено А. М. Нахушевым в [8], где дано наиболее общее определение и подробная классификация различных типов нагруженных уравнений: дифференциальных, интегральных, интегро-дифференциальных, функциональных, а также рассмотрены их многочисленные приложения.

Исследованию краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений соболевского типа посвящены работы [9–11]. В исследованиях [12–14] изучены математические модели, учитывающие эффекты памяти в диффузионных процессах, возникающие при моделировании вязкоупругих свойств неньютоновских жидкостей [12, 13] и являющиеся следствием модифицированного закона Фурье для анизотропных неоднородных сред [14]. В работе [15] рассмотрены диффузионные модели с интегральными членами в граничных потоках.

Численным методам решения краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений в частных производных посвящены исследования [16–20]. Разработке разностных схем повышенного порядка точности посвящены работы [21–24].

Настоящая работа посвящена разностным методам решения начально-краевых задач для нагруженных уравнений теплопроводности с граничными условиями первого рода. Для рассматриваемых задач на равномерной сетке построены разностные схемы повышенного порядка точности. Методом энергетических неравенств получены априорные оценки решений разностных задач, из которых следуют единственность решения и его непрерывная зависимость от входных данных, а также сходимость решений разностной задачи к решениям исходной дифференциальной задачи со скоростью $O(h^4 + \tau^2)$ в сеточной норме $W_2^1(\omega_h)$. Проведены численные эксперименты для тестовых примеров, подтверждающие теоретические результаты исследования. Данная работа развивает исследования автора в данном направлении [15, 20, 24, 25], посвященные разностным методам решения локальных и нелокальных краевых задач для нагруженных уравнений теплопроводности и Аллера.

1. Постановка задачи А. В прямоугольной области

$$\bar{D} = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$$

рассмотрим первую краевую задачу для уравнения теплопроводности с интегральным слагаемым вольтерровского типа:

$$u_t = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \int_0^t \rho(x, t, \xi) u(x, \xi) d\xi + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (3)$$

где выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned} 0 < c_0 \leq k(x, t), \quad \frac{1}{k(x, t)} \leq c_1, \quad \left| \left(\frac{1}{k(x, t)} \right)_x \right|, \quad |\rho(x, t, t)|, \quad |\rho_x| \leq c_2; \\ u(x, t) \in C^{6,3}(\overline{D}), \quad k(x, t) \in C^{5,1}(\overline{D}), \quad \rho(x, t, t), \quad f(x, t) \in C^{4,1}(\overline{D}). \end{aligned} \quad (4)$$

2. Устойчивость и сходимость разностной схемы. Для численного решения задачи (1)–(3) применяется метод конечных разностей. Введем равномерную сетку:

$$\overline{\omega}_{h\tau} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau = \{(x_i, t_j) \in \overline{D}\},$$

где

$$\begin{aligned} \overline{\omega}_h &= \{x_i = ih, \quad i = \overline{0, N}, \quad h = l/N\}, \\ \overline{\omega}_\tau &= \{t_j = j\tau, \quad j = \overline{0, 1, \dots, j_0}, \quad \tau = T/j_0\}. \end{aligned}$$

Дифференциальной задаче (1)–(3) поставим в соответствие разностную схему с порядком аппроксимации $O(h^4 + \tau^2)$ [21, 26]:

$$y_t = (ay_{\bar{x}}^\sigma)_x + \sum_{s=0}^{j+1/2} \bar{\rho}_i^{j+1/2, s} y_i^s \bar{\tau} + \varphi, \quad (5)$$

$$y_0 = y_N = 0, \quad t_j \in \overline{\omega}_\tau, \quad (6)$$

$$y(x_i, 0) = u_0(x_i), \quad x_i \in \overline{\omega}_h, \quad (7)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} a_i^j &= a(x_i, t_j) = \frac{1}{\frac{1}{6}p_{i-1} + \frac{2}{3}p_{i-1/2} + \frac{1}{6}p_i}, \\ p &= p(x, t) = k^{-1}(x, t), \quad x_{i-1/2} = x_i - h/2, \\ y &= y_i^j = y(x_i, t_j), \quad \hat{y} = y_i^{j+1} = y(x_i, t_{j+1}), \quad y_{i\pm 1}^j = y(x_i \pm h, t_j), \\ y_{\bar{x}} &= \frac{y - y_{i-1}}{h}, \quad y_x = \frac{y_{i+1} - y}{h}, \quad y_t = \frac{\hat{y} - y^j}{\tau}, \\ \bar{\rho}y &= \rho y + \frac{h^2}{12} \Delta p \rho y = \left(\rho y + \frac{h^2}{12} (a(p\rho y)_{\bar{x}})_x \right)_i^{j+1/2}, \quad \sigma = \frac{1}{2} - \frac{h^2 p}{12\tau}, \\ \varphi_i^j &= \left(f + \frac{h^2}{12} (a(pf)_{\bar{x}})_x \right)_i^{j+1/2}, \quad y^{(1/2)} = \frac{1}{2}Y, \quad Y = (y^{j+1} + y^j), \\ \sum_{s=0}^{j+1/2} y^s \bar{\tau} &= \sum_{s=1}^{j-1} y^s \tau + 0.5\tau(y^0 + y^j + y^{j+1/2}) = \sum_{s=1}^j y^s \tau + 0.5\tau y^0, \end{aligned}$$

$$\bar{\tau} = \begin{cases} \tau/2, & s = 0, j, j+1/2, \\ \tau, & s \neq 0, j, j+1/2, \end{cases} \quad \text{или} \quad \bar{\tau} = \begin{cases} \tau/2, & s = 0, \\ \tau, & s \neq 0, \end{cases}$$

где j_0 — количество узлов сетки на отрезке $[0, T]$, N — количество узлов сетки на отрезке $[0, l]$.

Для получения априорной оценки применим метод энергетических неравенств. Введем скалярные произведения и норму:

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{N-1} u_i v_i h, \quad (u, v) = \sum_{i=1}^N u_i v_i h, \quad (u, u) = (1, u^2) = \|u(\cdot, t)\|_0^2 = \|u\|_0^2.$$

Справедлива следующая лемма [26, р. 120].

ЛЕММА. Для произвольной функции $y(x)$, заданной на равномерной сетке

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N, x_0 = 0, x_N = l\}$$

и удовлетворяющей граничным условиям $y(0) = y(l) = 0$, выполняются следующие оценки:

$$\frac{h^2}{4} \|y_{\bar{x}}\|^2 \leq \|y\|^2 \leq \frac{l^2}{8} \|y_{\bar{x}}\|^2.$$

Для получения априорной оценки воспользуемся методом энергетических неравенств. Перепишем уравнение (5) в виде

$$y_t = \frac{1}{2} (aY_{\bar{x}})_x - \frac{h^2}{12} (a(py_t)_{\bar{x}})_x + \sum_{s=0}^{j+1/2} \bar{\rho}_{i,s}^j y_i^s \bar{\tau} + \varphi. \quad (8)$$

Умножим уравнение (8) скалярно на $Y = y^j + y^{j+1}$:

$$(y_t, Y) = \frac{1}{2} ((aY_{\bar{x}})_x, Y) - \frac{h^2}{12} ((a(py_t)_{\bar{x}})_x, Y) + \left(\sum_{s=0}^{j+1/2} \bar{\rho}_i^{j+1/2,s} y_i^s \bar{\tau}, Y \right) + (\varphi, Y). \quad (9)$$

Преобразуем слагаемые в (9), используя разностную формулу Грина, лемму и неравенство Коши с параметром ε :

$$(y_t, Y) = (y_t, y^{j+1} + y^j) = \frac{1}{\tau} (y^{j+1} - y^j, y^{j+1} + y^j) = (\|y^j\|_0^2)_t;$$

$$\left(\frac{1}{2} (aY_{\bar{x}})_x, Y \right) = -\frac{1}{2} (aY_{\bar{x}}, Y_{\bar{x}}) \geq -\frac{c_0}{2} \|Y_{\bar{x}}\|_0^2;$$

$$\begin{aligned} -\frac{h^2}{12} ((a(py_t)_{\bar{x}})_x, Y) &= \frac{h^2}{12} (a(py_t)_{\bar{x}}, Y_{\bar{x}}) = \frac{h^2}{12} (a[p_{\bar{x}} y_t + p^{(-1)} y_{t\bar{x}}], Y_{\bar{x}}) = \\ &= \frac{h^2}{12} (ap_{\bar{x}} y_t, Y_{\bar{x}}) + \frac{h^2}{12} (ap^{(-1)} y_{t\bar{x}}, Y_{\bar{x}}) \leq \\ &\leq \|y_t\|_0^2 + \frac{h^4}{144} M_1 \|Y_{\bar{x}}\|_0^2 + \frac{h^2}{12} M_2 (\|y_{\bar{x}}\|_0^2)_t \leq \\ &\leq \|y_t\|_0^2 + \frac{h^2}{36} M_1 \|Y\|_0^2 + \frac{h^2}{12} M_2 (\|y_{\bar{x}}\|_0^2)_t; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\sum_{s=0}^{j+1/2} \bar{\rho}_i^{j+1/2,s} y_i^s \bar{\tau}, Y \right) = \\
 & = \left(\sum_{s=0}^{j+1/2} \rho_i^{j+1/2,s} y_i^s \bar{\tau}, Y \right) + \left(\frac{h^2}{12} \left(a \left(p \sum_{s=0}^{j+1/2} \rho_i^{j+1/2,s} y_i^s \bar{\tau} \right)_{\bar{x}} \right)_x, Y \right) = \\
 & = \left(\sum_{s=0}^{j+1/2} \rho_i^{j+1/2,s} y_i^s \bar{\tau}, Y \right) - \left(\frac{h^2}{12} a \left(p \sum_{s=0}^{j+1/2} \rho_i^{j+1/2,s} y_i^s \bar{\tau} \right)_{\bar{x}}, Y_{\bar{x}} \right) \leq \\
 & \leq \left(\sum_{s=0}^{j+1/2} \rho_i^{j+1/2,s} y_i^s \bar{\tau}, Y \right) - \left(\frac{h^2}{12} a p_{\bar{x}} \sum_{s=0}^{j+1/2} \rho_i^{j+1/2,s} y_i^s \bar{\tau}, Y_{\bar{x}} \right) - \\
 & - \left(\frac{h^2}{12} a p^{(-1)} \sum_{s=0}^{j+1/2} (\rho_i^{j+1/2,s})_{\bar{x}} y_i^s \bar{\tau}, Y_{\bar{x}} \right) - \left(\frac{h^2}{12} a p^{(-1)} \sum_{s=0}^{j+1/2} \rho_{i-1}^{j+1/2,s} y_{\bar{x}}^s \bar{\tau}, Y_{\bar{x}} \right) \leq \\
 & \leq \left(\frac{1}{2}, \left(\sum_{s=0}^{j+1/2} \rho_i^{j+1/2,s} y_i^s \bar{\tau} \right)^2 \right) + \left(1, \left(\sum_{s=0}^{j+1/2} \rho_{\bar{x}}^{j+1/2,s} y_{\bar{x}}^s \bar{\tau} \right)^2 \right) + \\
 & + \left(\frac{h^2}{4}, \left(\sum_{s=0}^{j+1/2} \rho_{i-1}^{j+1/2,s} y_{\bar{x}}^s \bar{\tau} \right)^2 \right) + \frac{1}{2} \|Y\|_0^2 + M_3 \frac{h^2}{4} \|Y_{\bar{x}}\|_0^2 \leq \\
 & \leq M_4 \|Y\|_0^2 + \left(\frac{1}{2}, \sum_{s=0}^{j+1/2} (\rho_i^{j+1/2,s})^2 \bar{\tau} \sum_{s=0}^{j+1/2} y^2 \bar{\tau} \right) + \\
 & + \left(1, \sum_{s=0}^{j+1/2} (\rho_{\bar{x}}^{j+1/2,s})^2 \bar{\tau} \sum_{s=0}^{j+1/2} y^2 \bar{\tau} \right) + \left(\frac{h^2}{4}, \sum_{s=0}^{j+1/2} (\rho_{i-1}^{j+1/2,s})^2 \bar{\tau} \sum_{s=0}^{j+1/2} y_{\bar{x}}^2 \bar{\tau} \right) \leq \\
 & \leq M_4 \|Y\|_0^2 + M_5 \sum_{s=0}^{j+1/2} (1, y^2) \bar{\tau} + M_6 \sum_{s=0}^{j+1/2} \left(\frac{h^2}{4}, y_{\bar{x}}^2 \right) \bar{\tau} \leq M_4 \|Y\|_0^2 + \\
 & + M_5 \sum_{s=0}^{j+1/2} \|y^s\|_0^2 \bar{\tau} + M_6 \frac{h^2}{4} \sum_{s=0}^{j+1/2} \|y_{\bar{x}}^s\|_0^2 \bar{\tau} \leq M_4 \|Y\|_0^2 + M_7 \sum_{s=0}^{j+1/2} \|y^s\|_0^2 \bar{\tau}; \\
 & (\varphi, Y) \leq \frac{1}{2} \|\varphi\|_0^2 + \frac{1}{2} \|Y\|_0^2.
 \end{aligned}$$

Здесь и далее через M_i ($i = 1, 2, \dots$) обозначены положительные постоянные, зависящие только от входных данных исходной дифференциальной задачи.

Учитывая полученные выше преобразования, из (9) получаем неравенство

$$\begin{aligned}
 & (\|y^j\|_0^2)_t - \frac{h^2}{12} M_2 (\|y_{\bar{x}}\|_0^2)_t + \frac{c_0}{2} \|Y_{\bar{x}}\|_0^2 \leq \\
 & \leq \|y_t\|_0^2 + M_8 \|Y\|_0^2 + M_7 \sum_{s=0}^{j+1/2} \|y^s\|_0^2 \bar{\tau} + \frac{1}{2} \|\varphi\|_0^2. \quad (10)
 \end{aligned}$$

Оценим первое слагаемое в правой части (10). Для этого умножим (1) скалярно на y_t :

$$(y_t, y_t) = \frac{1}{2}((aY_{\bar{x}})_x, y_t) - \frac{h^2}{12}((a(py_t)_{\bar{x}})_x, y_t) + \left(\sum_{s=0}^{j+1/2} \bar{\rho}_i^{j+1/2,s} y_i^s \bar{\tau}, y_t \right) + (\varphi, y_t). \quad (11)$$

Оценим суммы, входящие в тождество (11):

$$(y_t, y_t) = \|y_t\|_0^2;$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}(aY_{\bar{x}})_x, y_t \right) &= -\frac{1}{2}(aY_{\bar{x}}, y_{\bar{x}t}) = \\ &= -\frac{1}{2\tau}(a, (y_{\bar{x}}^{j+1} + y_{\bar{x}}^j)(y_{\bar{x}}^{j+1} - y_{\bar{x}}^j)) \geq -\frac{c_0}{2}(\|y_{\bar{x}}\|_0^2)_t; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{h^2}{12}((a(py_t)_{\bar{x}})_x, y_t) &= \frac{h^2}{12}(a(py_t)_{\bar{x}}, y_{\bar{x}t}) = \frac{h^2}{12}(a[p_{\bar{x}}y_{t,i-1} + py_{t\bar{x}}], y_{\bar{x}t}) = \\ &= \frac{h^2}{12}(ap_{\bar{x}}, y_{t,i-1}y_{\bar{x}t}) + \frac{h^2}{12}(1, y_{\bar{x}t}^2) \leq \frac{h^2}{12}(ap_{\bar{x}}, y_{t,i-1}y_{\bar{x}t}) + \frac{1}{3}\|y_t\|_0^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\sum_{s=0}^{j+1/2} \bar{\rho}_i^{j+1/2,s} y_i^s \bar{\tau}, y_t \right) &= \\ &= \left(\sum_{s=0}^{j+1/2} \rho_i^{j+1/2,s} y_i^s \bar{\tau}, y_t \right) + \left(\frac{h^2}{12} \left(a \left(p \sum_{s=0}^{j+1/2} \rho_i^{j+1/2,s} y_i^s \bar{\tau} \right)_{\bar{x}} \right)_x, y_t \right) = \\ &= \left(\sum_{s=0}^{j+1/2} \rho_i^{j+1/2,s} y_i^s \bar{\tau}, y_t \right) - \left(\frac{h^2}{12} a \left(p \sum_{s=0}^{j+1/2} \rho_i^{j+1/2,s} y_i^s \bar{\tau} \right)_{\bar{x}}, y_{\bar{x}t} \right) \leq \\ &\leq \left(\sum_{s=0}^{j+1/2} \rho_i^{j+1/2,s} y_i^s \bar{\tau}, y_t \right) - \left(\frac{h^2}{12} ap_{\bar{x}} \sum_{s=0}^{j+1/2} \rho_i^{j+1/2,s} y_i^s \bar{\tau}, y_{\bar{x}t} \right) - \\ &- \left(\frac{h^2}{12} ap^{(-1)} \sum_{s=0}^{j+1/2} (\rho_i^{j+1/2,s})_{\bar{x}} y_i^s \bar{\tau}, y_{\bar{x}t} \right) - \left(\frac{h^2}{12} ap^{(-1)} \sum_{s=0}^{j+1/2} \rho_{i-1}^{j+1/2,s} y_{\bar{x}}^s \bar{\tau}, y_{\bar{x}t} \right) \leq \\ &\leq \left(M_9^\varepsilon, \left(\sum_{s=0}^{j+1/2} \rho_i^{j+1/2,s} y_i^s \bar{\tau} \right)^2 \right) + \left(M_{10}, \left(\sum_{s=0}^{j+1/2} \rho_{\bar{x}}^{j+1/2,s} y_i^s \bar{\tau} \right)^2 \right) + \\ &+ \left(\frac{h^2}{12} M_{11}, \left(\sum_{s=0}^{j+1/2} \rho_{i-1}^{j+1/2,s} y_{\bar{x}}^s \bar{\tau} \right)^2 \right) + \varepsilon \|y_t\|_0^2 + \frac{h^2}{12} \|y_{\bar{x}t}\|_0^2 \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \left(\varepsilon + \frac{1}{3}\right) \|y_t\|_0^2 + M_{12}^\varepsilon \sum_{s=0}^{j+1/2} (1, y^2) \bar{\tau} + M_{13} \sum_{s=0}^{j+1/2} \left(\frac{h^2}{12}, y_{\bar{x}}^2\right) \bar{\tau} \leq \\
 &\leq \left(\varepsilon + \frac{1}{3}\right) \|y_t\|_0^2 + M_{12}^\varepsilon \sum_{s=0}^{j+1/2} \|y^s\|_0^2 \bar{\tau} + M_{13} \frac{h^2}{4} \sum_{s=0}^{j+1/2} \|y_{\bar{x}}^s\|_0^2 \bar{\tau} \leq \\
 &\leq \left(\varepsilon + \frac{1}{3}\right) \|y_t\|_0^2 + M_{14}^\varepsilon \sum_{s=0}^{j+1/2} \|y^s\|_0^2 \bar{\tau}; \\
 &(\varphi, y_t) \leq \frac{3}{2} \|\varphi\|_0^2 + \frac{1}{6} \|y_t\|_0^2.
 \end{aligned}$$

Учитывая полученные преобразования, из (11) находим

$$\begin{aligned}
 &\left(\frac{1}{6} - \varepsilon\right) \|y_t\|_0^2 + \frac{c_0}{2} (\|y_{\bar{x}}\|_0^2)_t \leq \\
 &\leq \frac{h^2}{12} (ap_{\bar{x}}, y_{t,i-1} y_{\bar{x}t}) + M_{14}^\varepsilon \sum_{s=0}^{j+1/2} \|y^s\|_0^2 \bar{\tau} + \frac{3}{2} \|\varphi\|_0^2. \quad (12)
 \end{aligned}$$

Оценим первое слагаемое в правой части (12). В этих целях рассмотрим отдельно неравенство

$$-(y_i - y_{i-1})^2 \leq 0,$$

которое можно переписать в виде

$$-y_i^2 + 2y_i y_{i-1} - y_{i-1}^2 \leq 0. \quad (13)$$

Из (13) получаем оценку

$$hy_{i-1} y_{\bar{x}} \leq \frac{1}{2} y_i^2.$$

Следовательно, для первого слагаемого в (12) имеем

$$\frac{h^2}{12} (ap_{\bar{x}}, y_{t,i-1} y_{\bar{x}t}) \leq \frac{h}{12} M_{15} \|y_t\|_0^2. \quad (14)$$

Подставляя (14) в (12), получаем

$$\left(\frac{1}{6} - \varepsilon - \frac{h}{12} M_{15}\right) \|y_t\|_0^2 + \frac{c_0}{2} (\|y_{\bar{x}}\|_0^2)_t \leq M_{14}^\varepsilon \sum_{s=0}^{j+1/2} \|y^s\|_0^2 \bar{\tau} + \frac{3}{2} \|\varphi\|_0^2. \quad (15)$$

Выбирая параметры $\varepsilon = 1/12$ и $h \leq h_1 = 1/(2M_{15})$, из (15) находим

$$\|y_t\|_0^2 + (\|y_{\bar{x}}\|_0^2)_t \leq M_{15} \sum_{s=0}^{j+1/2} \|y^s\|_0^2 \bar{\tau} + M_{16} \|\varphi\|_0^2. \quad (16)$$

Используя оценку (16) в неравенстве (10), получаем

$$\begin{aligned}
 (\|y\|_0^2)_t + \left(1 - \frac{h^2}{12}M_2\right)(\|y_{\bar{x}}\|_0^2)_t + \frac{c_0}{4}\|Y_{\bar{x}}\|_0^2 &\leq \\
 &\leq M_{17}\|Y\|_0^2 + M_{18} \sum_{s=0}^{j+1/2} \|y^s\|_0^2 \bar{\tau} + M_{19}\|\varphi\|_0^2. \quad (17)
 \end{aligned}$$

Оценим второе слагаемое в правой части (17) следующим образом:

$$\sum_{s=0}^{j+1/2} \|y^s\|_0^2 \bar{\tau} = \sum_{s=0}^j \|y^s\|_0^2 \tau + 0.5\tau \|y^j\|_0^2 \leq 2 \sum_{s=0}^j \|y^s\|_0^2 \tau. \quad (18)$$

Принимая $h^2 \leq h_2^2 = 1/M_2$ и подставляя (18) в (17), окончательно получаем

$$(\|y\|_0^2)_t + (\|y_{\bar{x}}\|_0^2)_t + \|Y_{\bar{x}}\|_0^2 \leq M_{20}\|Y\|_0^2 + M_{21} \sum_{s=0}^j \|y^s\|_0^2 \tau + M_{22}\|\varphi\|_0^2. \quad (19)$$

Умножим обе части (19) на τ и просуммируем по j' от 0 до j :

$$\begin{aligned}
 \|y^{j+1}\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^{j+1}\|_0^2 + \sum_{j'=0}^j \|Y_{\bar{x}}^{j'}\|_0^2 \tau &\leq M_{20} \sum_{j'=0}^j \|Y^{j'}\|_0^2 \tau + \\
 + M_{21} \sum_{j'=0}^j \sum_{s=0}^{j'} \|y^s\|_0^2 \tau + M_{22} &\left(\sum_{j'=0}^j \|\varphi^{j'}\|_0^2 \tau + \|y^0\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^0\|_0^2 \right). \quad (20)
 \end{aligned}$$

Преобразуем первое слагаемое в правой части (20). Используя неравенство $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$, получаем

$$\begin{aligned}
 \sum_{j'=0}^j \|Y\|_0^2 \tau &= \sum_{j'=0}^j \|y^{j'+1} + y^{j'}\|_0^2 \tau \leq 2 \sum_{j'=0}^j (\|y^{j'+1}\|_0^2 + \|y^{j'}\|_0^2) \tau = \\
 &= 2 \sum_{j'=0}^j \|y^{j'+1}\|_0^2 \tau + 2 \sum_{j'=0}^j \|y^{j'}\|_0^2 \tau = 2 \sum_{j'=1}^{j+1} \|y^{j'}\|_0^2 \tau + 2 \sum_{j'=0}^j \|y^{j'}\|_0^2 \tau = \\
 &= 2\|y^{j+1}\|_0^2 + 2\|y^0\|_0^2 + 4 \sum_{j'=1}^j \|y^{j'}\|_0^2 \tau. \quad (21)
 \end{aligned}$$

Для двойной суммы имеем оценку

$$\sum_{j'=0}^j \sum_{s=0}^{j'} \|y^s\|_0^2 \tau \leq T \sum_{j'=0}^j \|y^{j'}\|_0^2 \tau. \quad (22)$$

Подставляя (21) и (22) в (20), получаем

$$\begin{aligned}
 (1 - 2M_{20}\tau) \|y^{j+1}\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^{j+1}\|_0^2 + \sum_{j'=0}^j \|Y_{\bar{x}}^{j'}\|_0^2 \tau &\leq \\
 &\leq 4M_{20} \sum_{j'=0}^j \|y\|_0^2 \tau + M_{23} \left(\sum_{j'=0}^j \|\varphi^{j'}\|_0^2 \tau + \|y^0\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^0\|_0^2 \right). \quad (23)
 \end{aligned}$$

Выбирая шаг $\tau \leq \tau_0 = 1/(4M_{20})$, из (23) находим

$$\begin{aligned}
 \|y^{j+1}\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^{j+1}\|_0^2 + \sum_{j'=0}^j \|Y_{\bar{x}}^{j'}\|_0^2 \tau &\leq \\
 &\leq M_{24} \sum_{j'=0}^j \|y\|_0^2 \tau + M_{25} \left(\sum_{j'=0}^j \|\varphi^{j'}\|_0^2 \tau + \|y^0\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^0\|_0^2 \right). \quad (24)
 \end{aligned}$$

Применяя разностный аналог леммы Гроуолла [27, лемма 4, с. 171] к (24), получаем

$$\|y^{j+1}\|_0^2 \leq M_{26} \left(\sum_{j'=0}^j \|\varphi^{j'}\|_0^2 \tau + \|y^0\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^0\|_0^2 \right).$$

Учитывая последнее, из (24) получаем окончательную априорную оценку:

$$\begin{aligned}
 \|y^{j+1}\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^{j+1}\|_0^2 + \sum_{j'=0}^j \|Y_{\bar{x}}^{j'}\|_0^2 \tau &\leq \\
 &\leq M(T) \left(\sum_{j'=0}^j \|\varphi^{j'}\|_0^2 \tau + \|y^0\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^0\|_0^2 \right), \quad (25)
 \end{aligned}$$

где $M(T) = \text{const} > 0$ не зависит от параметров сетки h и τ .

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия гладкости (4). Тогда существуют $\tau_0 > 0$ и $h_0 > 0$, зависящие от констант c_0, c_1, c_2 , такие что при $\tau \leq \tau_0(c_0, c_1, c_2)$, $h \leq h_0(c_0, c_1, c_2) = \min\{h_1, h_2\}$ разностная схема (5)–(7) устойчива по правой части и начальным данным. При этом для решения задачи справедлива априорная оценка (25) на каждом временном слое в смысле нормы $\|y\|_1^2 = \|y^{j+1}\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^{j+1}\|_0^2 + \sum_{j'=0}^j \|Y_{\bar{x}}^{j'}\|_0^2 \tau$.

Из априорной оценки (25) следует единственность решения разностной задачи (5)–(7) и непрерывная зависимость решения от входных данных задачи.

Введем следующие обозначения: $u(x, t)$ — решение исходной дифференциальной задачи (1)–(3); $y(x_i, t_j) = y_i^j$ — решение разностной задачи (5)–(7).

Для оценки точности разностной схемы (5)–(7) рассмотрим разность $z_i^j = y_i^j - u_i^j$, где $u_i^j = u(x_i, t_j)$. Подстановка $y = z + u$ в разностные соотношения (5)–(7) приводит к задаче для погрешности аппроксимации:

$$z_t = (az_{\bar{x}}^\sigma)_x + \sum_{s=0}^{j+1/2} \bar{\rho}_{i,s}^j z_i^s \bar{\tau} + \Psi, \quad (26)$$

$$z_0 = z_N = 0, \quad z(x_i, 0) = 0, \quad (27)$$

где величина $\Psi = O(h^4 + \tau^2)$ характеризует погрешность аппроксимации дифференциальной задачи (1)–(3) разностной схемой (5)–(7) в классе решений $u(x, t)$ исходной задачи.

Применение априорной оценки (25) к задаче (26), (27) дает следующую оценку погрешности:

$$\|z^{j+1}\|_0^2 + \|z_{\bar{x}}^{j+1}\|_0^2 + \sum_{j'=0}^j \|Z_{\bar{x}}^{j'}\|_0^2 \tau \leq M \sum_{j'=0}^j \|\Psi^{j'}\|_0^2 \tau, \quad (28)$$

где постоянная $M > 0$ не зависит от h и τ .

С учетом (28) справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия, при которых $\|\Psi\| = O(h^4 + \tau^2)$, и условия ограниченности (4). Тогда разностная схема (5)–(7) при независимом стремлении h и τ к нулю сходится к решению дифференциальной задачи (1)–(3) в смысле нормы

$$\|z^{j+1}\|_1^2 = \|z^{j+1}\|_0^2 + \|z_{\bar{x}}^{j+1}\|_0^2 + \sum_{j'=0}^j \|Z_{\bar{x}}^{j'}\|_0^2 \tau$$

на каждом слое так, что при достаточно малых h и τ имеет место оценка

$$\|y^{j+1} - u^{j+1}\|_1 \leq M(h^4 + \tau^2), \quad \tau \leq \tau_0, \quad h \leq h_0 = \min\{h_1, h_2\},$$

где константа $M > 0$ не зависит от выбора сетки.

3. Постановка задачи Б. В прямоугольной области

$$\bar{D} = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$$

рассмотрим нагруженное уравнение теплопроводности, заменяющее уравнение (1):

$$u_t = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \sum_{s=1}^m q_s(x, t) u(x_s, t) + f(x, t), \quad 0 < x < l, 0 < t \leq T, \quad (29)$$

где коэффициенты удовлетворяют условиям

$$|q_s(x, t)|, |q_{s,xx}(x, t)| \leq c_2, \quad s = 1, 2, \dots, m; \quad q_s(x, t) \in C^{4,1}(\bar{D}), \quad (30)$$

а x_s ($s = 1, 2, \dots, m$) представляют собой произвольные фиксированные точки интервала $(0, l)$.

4. Устойчивость и сходимость разностной схемы. На равномерной сетке $\bar{\omega}_{h\tau}$ дифференциальной задаче (2), (3), (29) поставим в соответствие разностную схему порядка аппроксимации $O(h^4 + \tau^2)$:

$$y_t = (ay_{\bar{x}}^\sigma)_x - \frac{1}{2} \sum_{s=1}^m \bar{d}_s \bar{Y}_s + \varphi, \quad (31)$$

$$y_0 = y_N = 0, \quad t_j \in \bar{\omega}_\tau, \quad (32)$$

$$y(x_i, 0) = u_0(x_i), \quad x_i \in \bar{\omega}_h, \quad (33)$$

где

$$x_{i_s} \leq x_s \leq x_{i_{s+1}}, \quad \bar{d}_{s,i}^j y = \left(d_s y + \frac{h^2}{12} (a(p d_s y)_{\bar{x}})_x \right)_i^{j+1/2}, \quad \sigma = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau} p,$$

$$\begin{aligned} \bar{y}_s = & \frac{(x_s - x_{i_s})(x_s - x_{i_{s+1}})(x_s - x_{i_{s+2}})}{-6h^3} y_{i_{s-1}} + \\ & + \frac{(x_s - x_{i_{s-1}})(x_s - x_{i_{s+1}})(x_s - x_{i_{s+2}})}{2h^3} y_{i_s} + \\ & + \frac{(x_s - x_{i_{s-1}})(x_s - x_{i_s})(x_s - x_{i_{s+2}})}{-2h^3} y_{i_{s+1}} + \\ & + \frac{(x_s - x_{i_{s-1}})(x_s - x_{i_s})(x_s - x_{i_{s+1}})}{6h^3} y_{i_{s+2}}. \end{aligned}$$

В дальнейшем будем считать, что $h < \min\{x_1, l - x_m\}$.

Найдем априорную оценку, используя метод энергетических неравенств.

Перепишем (31) в виде

$$y_t = \frac{1}{2} (a Y_{\bar{x}})_x - \frac{h^2}{12} (a(p y_t)_{\bar{x}})_x - \frac{1}{2} \sum_{s=1}^m \bar{d}_s \bar{Y}_s + \varphi. \quad (34)$$

Умножая (34) скалярно на $Y = y^j + y^{j+1}$, получим

$$(y_t, Y) = \frac{1}{2} ((a Y_{\bar{x}})_x, Y) - \frac{h^2}{12} ((a(p y_t)_{\bar{x}})_x, Y) - \frac{1}{2} \left(\sum_{s=1}^m \bar{d}_s \bar{Y}_s, Y \right) + (\varphi, Y). \quad (35)$$

После подробных преобразований (аналогичных (9), (10)) с учетом (32) и оценки

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \left(\sum_{s=1}^m \bar{d}_s \bar{Y}_s, Y \right) &= -\frac{1}{2} \left(\sum_{s=1}^m d_s \bar{Y}_s, Y \right) - \left(\frac{h^2}{24} \sum_{s=1}^m (a(p d_s \bar{Y}_s)_{\bar{x}})_x, Y \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{s=1}^m \bar{Y}_s (d_s, Y) + \left(\frac{h^2}{24} \sum_{s=1}^m a(p d_s)_{\bar{x}} \bar{Y}_s, Y_{\bar{x}} \right) \leq \\ &\leq \sum_{s=1}^m \left(\frac{1}{4} (\bar{Y}_s)^2 + \frac{c_2^2}{4} (1, Y)^2 \right) + \left(\frac{h^2}{24} M_1 \sum_{s=1}^m Y_s, Y_{\bar{x}} \right) \leq \\ &\leq M_2 \sum_{s=1}^m \bar{Y}_s^2 + \frac{m l c_2^2}{4} (1, Y^2) + \left(\frac{h^2}{48} M_1^2, \left(\sum_{s=1}^m Y_s \right)^2 \right) + \left(\frac{h^2}{48}, Y_{\bar{x}}^2 \right) \leq \\ &\leq M_3 \left(\varepsilon \|Y_{\bar{x}}\|_0^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|Y\|_0^2 \right) + \frac{m l c_2^2}{4} (1, Y^2) + \left(\frac{h^2}{48} M_4, \sum_{s=1}^m Y_s^2 \right) + \frac{h^2}{48} \|Y_{\bar{x}}\|_0^2 \leq \end{aligned}$$

$$\leq \varepsilon M_5 \|Y_{\bar{x}}\|_0^2 + \frac{h^2}{48} M_6 \|Y_{\bar{x}}\|_0^2 + M_7^\varepsilon \|Y\|_0^2 \leq \varepsilon M_5 \|Y_{\bar{x}}\|_0^2 + M_8^\varepsilon \|Y\|_0^2$$

из (35) получаем

$$\begin{aligned} (\|y^j\|_0^2)_t - \frac{h^2}{12} M_9 (\|y_{\bar{x}}\|_0^2)_t + \left(\frac{c_0}{2} - \varepsilon M_5\right) \|Y_{\bar{x}}\|_0^2 &\leq \\ &\leq \|y_t\|_0^2 + M_8^\varepsilon \|Y\|_0^2 + \frac{1}{2} \|\varphi\|_0^2. \end{aligned} \quad (36)$$

Выбирая $\varepsilon = c_0/(4M_5)$, из (36) получаем

$$(\|y\|_0^2)_t - \frac{h^2}{12} M_9 (\|y_{\bar{x}}\|_0^2)_t + \frac{c_0}{4} \|Y_{\bar{x}}\|_0^2 \leq \|y_t\|_0^2 + M_{10} \|Y\|_0^2 + \frac{1}{2} \|\varphi\|_0^2. \quad (37)$$

Оценим первое слагаемое в правой части (37). Для этого умножим (31) скалярно на y_t :

$$(y_t, y_t) = \frac{1}{2} ((aY_{\bar{x}})_x, y_t) - \frac{h^2}{12} ((a(py_t)_{\bar{x}})_x, y_t) - \frac{1}{2} \left(\sum_{s=1}^m \bar{d}_s \bar{Y}_s, y_t \right) + (\varphi, y_t). \quad (38)$$

После подробных преобразований (аналогичных (11), (12)) с учетом оценки

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \left(\sum_{s=1}^m \bar{d}_s \bar{Y}_s, y_t \right) &= -\frac{1}{2} \left(\sum_{s=1}^m d_s \bar{Y}_s, y_t \right) - \left(\frac{h^2}{24} \sum_{s=1}^m (a(pd_s \bar{Y}_s)_{\bar{x}})_x, y_t \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{s=1}^m \bar{Y}_s (d_s, y_t) + \left[\frac{h^2}{24} \sum_{s=1}^m a(pd_s)_{\bar{x}} \bar{Y}_s, y_{\bar{x}t} \right] \leq \\ &\leq \sum_{s=1}^m \left(\frac{1}{8\varepsilon} (\bar{Y}_s)^2 + \varepsilon c_2^2 (1, y_t^2) \right) + \left(\frac{h^2}{24} M_{11} \sum_{s=1}^m Y_s, y_{\bar{x}t} \right) \leq \\ &\leq M_{12}^\varepsilon \sum_{s=1}^m \bar{Y}_s^2 + \varepsilon m l c_2^2 (1, y_t^2) + \left(\frac{h^2}{48} M_{11}^{\varepsilon_1}, \left(\sum_{s=1}^m Y_s \right)^2 \right) + \left(\frac{h^2}{48}, \varepsilon_1 y_{\bar{x}t}^2 \right) \leq \\ &\leq M_{13}^\varepsilon \left(\varepsilon_2 \|Y_{\bar{x}}\|_0^2 + \frac{1}{4\varepsilon_2} \|Y\|_0^2 \right) + \varepsilon m l c_2^2 (1, y_t^2) + \left(\frac{h^2}{48} M_{14}^{\varepsilon_1}, \sum_{s=1}^m Y_s^2 \right) + \varepsilon_1 \frac{h^2}{48} \|y_{\bar{x}t}\|_0^2 \leq \\ &\leq (\varepsilon + \varepsilon_1) M_{15} \|y_t\|_0^2 + \varepsilon_2 M_{13}^\varepsilon \|Y_{\bar{x}}\|_0^2 + M_{16}^{\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2} \|Y\|_0^2 \end{aligned}$$

из (38) находим

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{3} - (\varepsilon + \varepsilon_1) M_{15} \right) \|y_t\|_0^2 + \frac{c_0}{2} (\|y_{\bar{x}}\|_0^2)_t &\leq \frac{h^2}{12} (ap_{\bar{x}}, y_{t, i-1} y_{\bar{x}t}) + \\ &+ \varepsilon_2 M_{13}^\varepsilon \|Y_{\bar{x}}\|_0^2 + M_{16}^{\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2} \|Y\|_0^2 + \frac{3}{4} \|\varphi\|_0^2. \end{aligned} \quad (39)$$

С учетом преобразования (14) из (39) имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{3} - (\varepsilon + \varepsilon_1)M_{15} - \frac{h}{12}M_{17}\right)\|y_t\|_0^2 + \frac{c_0}{2}(\|y_{\bar{x}}\|_0^2)_t &\leq \\ &\leq \varepsilon_2 M_{13}^\varepsilon \|Y_{\bar{x}}\|_0^2 + M_{16}^{\varepsilon, \varepsilon_1 \varepsilon_2} \|Y\|_0^2 + \frac{3}{4}\|\varphi\|_0^2. \end{aligned} \quad (40)$$

Выбирая $\varepsilon = \varepsilon_1 = 1/(12M_{15})$, $h \leq h_1 = 1/M_{17}$, из (40) находим

$$\|y_t\|_0^2 + (\|y_{\bar{x}}\|_0^2)_t \leq \varepsilon_2 M_{18} \|Y_{\bar{x}}\|_0^2 + M_{19}^{\varepsilon_2} \|Y\|_0^2 + M_{20} \|\varphi\|_0^2. \quad (41)$$

С учетом (41) из (37) получим

$$\begin{aligned} (\|y\|_0^2)_t + \left(1 - \frac{h^2}{12}M_9\right)(\|y_{\bar{x}}\|_0^2)_t + \left(\frac{c_0}{4} - \varepsilon_2 M_{18}\right)\|Y_{\bar{x}}\|_0^2 &\leq \\ &\leq M_{21}^{\varepsilon_2} \|Y\|_0^2 + M_{22} \|\varphi\|_0^2. \end{aligned} \quad (42)$$

Выбирая $h^2 \leq h_2^2 = 1/M_9$, $\varepsilon_2 = c_0/(8M_{18})$, из (42) находим

$$(\|y\|_0^2)_t + (\|y_{\bar{x}}\|_0^2)_t + \|Y_{\bar{x}}\|_0^2 \leq M_{23} \|Y\|_0^2 + M_{24} \|\varphi\|_0^2. \quad (43)$$

Умножим обе части (43) на τ и просуммируем по j' от 0 до j :

$$\begin{aligned} \|y^{j+1}\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^{j+1}\|_0^2 + \sum_{j'=0}^j \|Y_{\bar{x}}^{j'}\|_0^2 \tau &\leq \\ &\leq M_{23} \sum_{j'=0}^j \|Y^{j'}\|_0^2 \tau + M_{25} \left(\sum_{j'=0}^j \|\varphi^{j'}\|_0^2 \tau + \|y^0\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^0\|_0^2 \right). \end{aligned} \quad (44)$$

Учитывая (21), из (44) находим

$$\begin{aligned} (1 - 2M_{23}\tau)\|y^{j+1}\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^{j+1}\|_0^2 + \sum_{j'=0}^j \|Y_{\bar{x}}^{j'}\|_0^2 \tau &\leq \\ &\leq 4M_{23} \sum_{j'=0}^j \|y\|_0^2 \tau + M_{26} \left(\sum_{j'=0}^j \|\varphi^{j'}\|_0^2 \tau + \|y^0\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^0\|_0^2 \right). \end{aligned} \quad (45)$$

Выбирая $\tau \leq \tau_0 = 1/(4M_{23})$, из (45) находим

$$\begin{aligned} \|y^{j+1}\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^{j+1}\|_0^2 + \sum_{j'=0}^j \|Y_{\bar{x}}^{j'}\|_0^2 \tau &\leq \\ &\leq M_{27} \sum_{j'=0}^j \|y\|_0^2 \tau + M_{28} \left(\sum_{j'=0}^j \|\varphi^{j'}\|_0^2 \tau + \|y^0\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^0\|_0^2 \right). \end{aligned}$$

Применяя к последнему неравенству разностный аналог леммы Гронуолла [27, лемма 4, с. 171], находим оценку

$$\|y^{j+1}\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^{j+1}\|_0^2 + \sum_{j'=0}^j \|Y_{\bar{x}}^{j'}\|_0^2 \tau \leq M(T) \left(\sum_{j'=0}^j \|\varphi^{j'}\|_0^2 \tau + \|y^0\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^0\|_0^2 \right), \quad (46)$$

где $M(T) = \text{const} > 0$ не зависит от параметров сетки h и τ .

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены условия (4), (30). Тогда существуют $\tau_0 > 0$ и $h_0 > 0$, зависящие от констант c_0, c_1, c_2 , такие что при $\tau \leq \tau_0(c_0, c_1, c_2)$, $h \leq h_0(c_0, c_1, c_2) = \min\{h_1, h_2\}$ разностная схема (31)–(33) устойчива по правой части и начальным данным. При этом для решения задачи справедлива априорная оценка (46) на каждом временном слое в смысле нормы

$$\|y\|_1 = \left(\|y^{j+1}\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^{j+1}\|_0^2 + \sum_{j'=0}^j \|Y_{\bar{x}}^{j'}\|_0^2 \tau \right)^{1/2}.$$

Из априорной оценки (46) следуют единственность решения разностной задачи (31)–(33) и непрерывная зависимость решения от входных данных задачи.

Пусть $u(x, t)$ — решение задачи (29), (2), (3); $y(x_i, t_j) = y_i^j$ — решение разностной задачи (31)–(33).

Для оценки точности разностной схемы (31)–(33) рассмотрим разность $z_i^j = y_i^j - u_i^j$, где $u_i^j = u(x_i, t_j)$. Подстановка $y = z + u$ разностные соотношения (31)–(33) приводит к задаче для функции z :

$$z_t = (az_{\bar{x}}^\sigma)_x - \frac{1}{2} \sum_{s=1}^m \bar{d}_s \bar{Z}_s + \Psi, \quad (47)$$

$$z_0 = z_N = 0, \quad z(x_i, 0) = 0, \quad (48)$$

где $\Psi = O(h^4 + \tau^2)$ характеризует погрешность аппроксимации дифференциальной задачи (1)–(3) разностной схемой (31)–(33) в классе решений $u = u(x, t)$ задачи (29), (2), (3).

Применение априорной оценки (46) к задаче (47), (48) дает следующую оценку погрешности:

$$\|z^{j+1}\|_0^2 + \|z_{\bar{x}}^{j+1}\|_0^2 + \sum_{j'=0}^j \|Z_{\bar{x}}^{j'}\|_0^2 \tau \leq M \sum_{j'=0}^j \|\Psi^{j'}\|_0^2 \tau, \quad (49)$$

где постоянная $M > 0$ не зависит от h и τ .

С учетом (49) справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполнены условия, при которых $\|\Psi\| = O(h^4 + \tau^2)$, и условия ограниченности (4), (30). Тогда разностная схема (31)–(33) при независимом стремлении h и τ к нулю сходится к решению дифференциальной задачи (29), (2), (3) в смысле нормы

$$\|z^{j+1}\|_1^2 = \|z^{j+1}\|_0^2 + \|z_{\bar{x}}^{j+1}\|_0^2 + \sum_{j'=0}^j \|Z_{\bar{x}}^{j'}\|_0^2 \tau$$

на каждом слое так, что при достаточно малых h и τ имеет место оценка

$$\|y^{j+1} - u^{j+1}\|_1 \leq M(h^4 + \tau^2), \quad \tau \leq \tau_0, \quad h \leq h_0 = \min\{h_1, h_2\},$$

где константа $M > 0$ не зависит от выбора сетки.

5. Тестовые задачи и численные результаты. Коэффициенты уравнения и граничные условия дифференциальных задач (1)–(3) и (29), (2), (3) подбираются таким образом, чтобы функция

$$u(x, t) = t^3(x^6 - lx^5)$$

являлась точным решением каждой из рассматриваемых задач.

Для приведения разностных схем (5)–(6) и (31)–(33) к расчетному виду был применен метод параметрической прогонки [28, с. 131].

В табл. 1–4 представлены максимальные значения погрешности $z = y - u$ и вычислительный (апостериорный) порядок сходимости СО (Convergence Order) при последовательном уменьшении шагов сетки. Исследование проводилось в нормах $\|\cdot\|_{L_2(\bar{\omega}_{h\tau})}$ и $\|\cdot\|_{C(\bar{\omega}_{h\tau})}$:

$$\|z\|_{L_2(\bar{\omega}_{h\tau})} = \left(\tau h \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^{j_0} |z_{ij}|^2 \right)^{1/2}, \quad \|z\|_{C(\bar{\omega}_{h\tau})} = \max_{(x_i, t_j) \in \bar{\omega}_{h\tau}} |z_{ij}|,$$

где $z_{ij} = z(x_i, t_j)$. Наблюдаемое уменьшение погрешности соответствует теоретическому порядку аппроксимации $O(h^4 + \tau^2)$.

Вычислительный порядок сходимости определялся по формуле

$$\text{CO} = \log_2 \frac{\|z_1\|}{\|z_2\|},$$

где z_1 и z_2 — погрешности, полученные при шагах сетки $0.5\bar{h}$ и $\bar{h}$ соответственно.

Заключение. Основным результатом исследования является построение и обоснование разностных схем повышенного порядка точности $O(h^4 + \tau^2)$ для решения начально-краевых задач для нагруженных уравнений теплопроводности с граничными условиями Дирихле. На основе метода энергетических неравенств получены априорные оценки решений разностных задач в сеточных нормах, из которых следует единственность решения разностной задачи, устойчивость по начальным данным и правой части, сходимость к решению исходной дифференциальной задачи в классе достаточно гладких функций. Проведенные численные эксперименты для тестовых задач подтверждают теоретические оценки порядка точности и демонстрируют эффективность предложенного метода.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнено без финансовой поддержки.

Таблица 1

Погрешность и порядок сходимости в нормах $\|\cdot\|_{L_2(\bar{\omega}_{h\tau})}$ и $\|\cdot\|_{C(\bar{\omega}_{h\tau})}$ для задачи (1)–(3) при согласованных параметрах сетки $h^2 = \tau$ ($t = 1$) [Error and convergence order (CO) in $\|\cdot\|_{L_2(\bar{\omega}_{h\tau})}$ and $\|\cdot\|_{C(\bar{\omega}_{h\tau})}$ norms for problem (1)–(3) with matched grid parameters $h^2 = \tau$ ($t = 1$)]

h	$\ \cdot\ _{L_2(\bar{\omega}_{h\tau})}$	CO in $\ \cdot\ _{L_2(\bar{\omega}_{h\tau})}$	$\ \cdot\ _{C(\bar{\omega}_{h\tau})}$	CO in $\ \cdot\ _{C(\bar{\omega}_{h\tau})}$
1/10	$2.83363 \cdot 10^{-6}$	—	$5.02040 \cdot 10^{-6}$	—
1/20	$1.77302 \cdot 10^{-7}$	3.998368	$3.13703 \cdot 10^{-7}$	4.000327
1/40	$1.10820 \cdot 10^{-8}$	3.999922	$1.96055 \cdot 10^{-8}$	4.000070
1/80	$6.92625 \cdot 10^{-10}$	4.000002	$1.22533 \cdot 10^{-9}$	4.000017
1/160	$4.32890 \cdot 10^{-11}$	4.000002	$7.65853 \cdot 10^{-11}$	3.999959

Таблица 2

Погрешность и порядок сходимости в нормах $\|\cdot\|_{L_2(\bar{\omega}_{h\tau})}$ и $\|\cdot\|_{C(\bar{\omega}_{h\tau})}$ для задачи (1)–(3) при фиксированном $h = 1/200$ и уменьшении τ ($t = 1$) [Error and convergence order (CO) in $\|\cdot\|_{L_2(\bar{\omega}_{h\tau})}$ and $\|\cdot\|_{C(\bar{\omega}_{h\tau})}$ norms for problem (1)–(3) with fixed $h = 1/200$ and decreasing τ ($t = 1$)]

h	$\ \cdot\ _{L_2(\bar{\omega}_{h\tau})}$	CO in $\ \cdot\ _{L_2(\bar{\omega}_{h\tau})}$	$\ \cdot\ _{C(\bar{\omega}_{h\tau})}$	CO in $\ \cdot\ _{C(\bar{\omega}_{h\tau})}$
1/10	$4.70018 \cdot 10^{-4}$	—	$7.88143 \cdot 10^{-4}$	—
1/20	$1.17493 \cdot 10^{-4}$	2.000134	$1.96990 \cdot 10^{-4}$	2.000328
1/40	$2.93737 \cdot 10^{-5}$	1.999983	$4.92488 \cdot 10^{-5}$	1.999968
1/80	$7.34346 \cdot 10^{-6}$	1.999995	$1.23122 \cdot 10^{-5}$	1.999989
1/160	$1.83584 \cdot 10^{-6}$	2.000014	$3.07808 \cdot 10^{-6}$	1.999996

Таблица 3

Погрешность и порядок сходимости в нормах $\|\cdot\|_{L_2(\bar{\omega}_{h\tau})}$ и $\|\cdot\|_{C(\bar{\omega}_{h\tau})}$ для задачи (29), (2), (3) при $h^2 = \tau$ ($t = 1$) и различных значениях $x_1 = 0.11$, $x_2 = 0.51$, $x_3 = 0.91$ [Error and convergence order (CO) in $\|\cdot\|_{L_2(\bar{\omega}_{h\tau})}$ and $\|\cdot\|_{C(\bar{\omega}_{h\tau})}$ norms for problem (29), (2), (3) with $h^2 = \tau$ ($t = 1$), evaluated at different points $x_1 = 0.11$, $x_2 = 0.51$, $x_3 = 0.91$]

h	$\ \cdot\ _{L_2(\bar{\omega}_{h\tau})}$	CO in $\ \cdot\ _{L_2(\bar{\omega}_{h\tau})}$	$\ \cdot\ _{C(\bar{\omega}_{h\tau})}$	CO in $\ \cdot\ _{C(\bar{\omega}_{h\tau})}$
1/10	$2.99353 \cdot 10^{-6}$	—	$5.47023 \cdot 10^{-6}$	—
1/20	$1.87282 \cdot 10^{-7}$	3.998557	$3.41829 \cdot 10^{-7}$	4.000256
1/40	$1.17056 \cdot 10^{-8}$	3.999945	$2.13634 \cdot 10^{-8}$	4.000057
1/80	$7.31599 \cdot 10^{-10}$	4.000006	$1.33520 \cdot 10^{-9}$	4.000014
1/160	$4.57248 \cdot 10^{-11}$	4.000004	$8.34805 \cdot 10^{-11}$	3.999477

Таблица 4

Погрешность и порядок сходимости в нормах $\|\cdot\|_{L_2(\bar{\omega}_{h\tau})}$ и $\|\cdot\|_{C(\bar{\omega}_{h\tau})}$ для задачи (29), (2), (3) при $h = 1/200$ и уменьшении τ ($t = 1$) и различных значениях $x_1 = 0.11$, $x_2 = 0.51$, $x_3 = 0.91$ [Error and convergence order (CO) in $\|\cdot\|_{L_2(\bar{\omega}_{h\tau})}$ and $\|\cdot\|_{C(\bar{\omega}_{h\tau})}$ norms for problem (29), (2), (3) with fixed spatial step $h = 1/200$ and decreasing temporal step τ ($t = 1$), evaluated at different points $x_1 = 0.11$, $x_2 = 0.51$, $x_3 = 0.91$]

h	$\ \cdot\ _{L_2(\bar{\omega}_{h\tau})}$	CO in $\ \cdot\ _{L_2(\bar{\omega}_{h\tau})}$	$\ \cdot\ _{C(\bar{\omega}_{h\tau})}$	CO in $\ \cdot\ _{C(\bar{\omega}_{h\tau})}$
1/10	$4.67888 \cdot 10^{-4}$	—	$7.85270 \cdot 10^{-4}$	—
1/20	$1.16954 \cdot 10^{-4}$	2.000222	$1.96263 \cdot 10^{-4}$	2.000398
1/40	$2.92384 \cdot 10^{-5}$	2.000004	$4.90663 \cdot 10^{-5}$	1.999986
1/80	$7.30961 \cdot 10^{-6}$	2.000000	$1.22666 \cdot 10^{-5}$	1.999993
1/160	$1.82738 \cdot 10^{-6}$	2.000003	$3.06667 \cdot 10^{-6}$	1.999996

Библиографический список

1. Нахушев А. М. *Уравнения математической биологии*. М.: Высш. шк., 1995. 301 с. EDN: PDBBNB.
2. Нахушев А. М., Борисов В. Н. Краевые задачи для нагруженных параболических уравнений и их приложения к прогнозу уровня грунтовых вод // *Диффер. уравн.*, 1977. Т. 13, № 1. С. 105–110.
3. Wiener J., Debnath L. A survey of partial differential equations with piecewise continuous arguments // *Int. J. Math. Math. Sci.*, 1995. vol. 18, no. 2. pp. 209–228. DOI: <https://doi.org/10.1155/s0161171295000275>.
4. Шхануков М. Х. О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах // *Диффер. уравн.*, 1982. Т. 18, № 4. С. 689–699.
5. Кожанов А. И. Об одном нелинейном нагруженном параболическом уравнении и о связанной с ним обратной задаче // *Матем. заметки*, 2004. Т. 76, № 6. С. 840–853. DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm156>.
6. Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И. *Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений*. Алматы: Гылым, 2010. 335 с.
7. Kneser A. Belastete integralgleichungen // *Rend. Circ. Matem. Palermo*, 1914. vol. 37. pp. 169–197. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF03014816>.
8. Нахушев А. М. *Нагруженные уравнения и их применения*. М.: Наука, 2012. 231 с.
9. Guezane-Lakoud A., Belakroum D. Time-discretization schema for an integro-differential Sobolev type equation with integral conditions // *Appl. Math. Comput.*, 2012. vol. 218, no. 9. pp. 4695–4702. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.11.077>.
10. Luo Z. D. Teng F. A reduced-order extrapolated finite difference iterative scheme based on POD method for 2D Sobolev equation // *Appl. Math. Comput.*, 2018. vol. 329. pp. 374–383. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2018.02.022>.
11. Бештоков М. Х. Численное исследование начально-краевых задач для уравнения соболевского типа с дробной по времени производной // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2019. Т. 59, № 2. С. 185–202. EDN: YXCFFN. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0044466919020054>.
12. Grasselli M., Pata V. A reaction-diffusion equation with memory // *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2006. vol. 15, no. 4. pp. 1079–1088. DOI: <https://doi.org/10.3934/dcds.2006.15.1079>.
13. Olmstead W. E., Davis S. H., Rosenblat S., Kath W. L. Bifurcation with memory // *SIAM J. Appl. Math.*, 1986. vol. 46, no. 2. pp. 171–188. DOI: <https://doi.org/10.1137/0146013>.
14. Yong J., Zhang X. Heat equations with memory // *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl.*, 2005. vol. 63, no. 5–7. pp. e99–e108. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.na.2005.02.033>.
15. Бештоков М. Х., Водахова В. А. Нелокальные краевые задачи для уравнения конвекции-диффузии дробного порядка // *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, 2019. Т. 29, № 4. С. 459–482. DOI: <https://doi.org/https://doi.org/10.20537/vm190401>.
16. Абдуллаев В. М., Айда-заде К. Р. О численном решении нагруженных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2004. Т. 44, № 9. С. 1585–1595. EDN: LVCBIL.
17. Абдуллаев В. М., Айда-заде К. Р. Численное решение задач оптимального управления нагруженными сосредоточенными системами // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2006. Т. 46, № 9. С. 1566–1581. EDN: HUZTBH.
18. Абдуллаев В. М., Айда-заде К. Р. Конечноразностные методы решения нагруженных параболических уравнений // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2016. Т. 56, № 1. С. 99–112. EDN: VIPLHR. DOI: <https://doi.org/10.7868/S0044466916010038>.
19. Алиханов А. А., Березгов А. М., Шхануков-Лафиев М. Х. Краевые задачи для некоторых классов нагруженных дифференциальных уравнений и разностные методы их

- численной реализации // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2008. Т. 48, № 9. С. 1619–1628. EDN: JKCTQD.
20. Beshtokov M. Kh. The third boundary value problem for loaded differential Sobolev type equation and grid methods of their numerical implementation // *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2016. vol. 158, 012019. EDN: YVCYFN. DOI: <https://doi.org/10.1088/1757-899X/158/1/012019>.
21. Самарский А. А. Схемы повышенного порядка точности для многомерного уравнения теплопроводности // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1963. Т. 3, № 5. С. 812–840.
22. Lele S. K. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution // *J. Comput. Phys.*, 1992. vol. 103, no. 1. pp. 16–42. DOI: [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(92\)90324-R](https://doi.org/10.1016/0021-9991(92)90324-R).
23. Матус П. П., Утебаев Б. Д. Компактные и монотонные разностные схемы для параболических уравнений // *Матем. моделирование*, 2021. Т. 33, № 4. С. 60–78. DOI: <https://doi.org/10.20948/mm-2021-04-04>.
24. Alikhanov A., Beshtokov M., Mehra M. The Crank–Nicolson type compact difference schemes for a loaded time-fractional Hallaire equation // *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2021. vol. 24, no. 4. pp. 1231–1256. DOI: <https://doi.org/10.1515/fca-2021-0053>.
25. Бештоков М. Х. Краевые задачи для нагруженного модифицированного уравнения влагопереноса дробного порядка с оператором Бесселя и разностные методы их решения // *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, 2020. Т. 30, № 2. С. 158–175. DOI: <https://doi.org/10.35634/vm200202>.
26. Самарский А. А. *Теория разностных схем*. М.: Наука, 1977. 656 с.
27. Самарский А. А., Гулин А. В. *Устойчивость разностных схем*. М.: УРСС, 2005. 384 с. EDN: QJOCSP.
28. Воеводин А. Ф., Шугрин С. М. *Численные методы расчета одномерных систем*. Новосибирск: Наука, 1981. 208 с.

MSC: 65M06, 65N12, 35R09

Higher-order difference schemes for the loaded heat conduction equations with boundary conditions of the first kind

M. Kh. Beshtokov

Institute of Applied Mathematics and Automation
of Kabardin-Balkar Scientific Centre of RAS,
89 a, Shortanova st., Nal'chik, 360000, Russian Federation.

Abstract

This paper investigates initial-boundary value problems for loaded heat equations with boundary conditions of the first kind. High-accuracy difference schemes are constructed for numerical solution of these problems. A priori estimates in discrete form are obtained through energy inequalities. The derived estimates establish solution uniqueness and stability with respect to both initial data and right-hand side terms, while proving convergence of the discrete solution to the original differential problem at $O(h^4 + \tau^2)$ rate (under sufficient smoothness assumptions). Numerical experiments with test cases validate all theoretical findings.

Keywords: parabolic equation, first initial-boundary value problem, loaded equation, integral equation, a priori estimate, difference scheme, stability and convergence.

Received: 6th January, 2025 / Revised: 12th April, 2025 /

Accepted: 28th April, 2025 / First online: 24th June, 2025

Competing interests. The author declares no competing interests.

Authors' contributions. The author is solely responsible for the content and preparation of this manuscript. The final version has been reviewed and approved by the author.

Funding. This research received no external funding.

Differential Equations and Mathematical Physics Research Article

© The Author(s), 2025

© Samara State Technical University, 2025 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Beshtokov M. Kh. Higher-order difference schemes for the loaded heat conduction equations with boundary conditions of the first kind, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2025, vol. 29, no. 2, pp. 220–240.
EDN: [EORDFG](https://www.edn.ru/10.14498/vsgtu2142). DOI: [10.14498/vsgtu2142](https://doi.org/10.14498/vsgtu2142) (In Russian).

Author's Details:

Murat Kh. Beshtokov   <https://orcid.org/0000-0003-2968-9211>

Cand. Phys. & Math. Sci., Associate Professor; Leading Researcher; Dept. of Computational Methods; e-mail: beshtokov-murat@yandex.ru

References

1. Nakhushev A. M. *Uravneniya matematicheskoy biologii* [Equations of Mathematical Biology]. Moscow, Vyssh. shk., 1995, 301 pp. (In Russian). EDN: PDBBNB.
2. Nakhushev A. M., Borisov V. N. Boundary value problems for loaded parabolic equations and their applications to the prediction of ground water level, *Differ. Uravn.*, 1977, vol. 13, no. 1, pp. 105–110 (In Russian).
3. Wiener J., Debnath L. A survey of partial differential equations with piecewise continuous arguments, *Int. J. Math. Math. Sci.*, 1995, vol. 18, no. 2, pp. 209–228. DOI: <https://doi.org/10.1155/s0161171295000275>.
4. Shkhanukov M. Kh. On some boundary value problems for an equation of third order arising from simulation of filtration of a fluid in porous media, *Differ. Uravn.*, 1982, vol. 18, no. 4, pp. 689–699 (In Russian).
5. Kozhanov A. I. A nonlinear loaded parabolic equation and a related inverse problem, *Math. Notes*, 2004, vol. 76, no. 6, pp. 784–795. DOI: <https://doi.org/10.1023/B:MATN.0000049678.16540.a5>.
6. Dzhenaliyev M. T., Ramazanov M. I. *Nagruzhennyye uravneniya kak vozmushcheniya differentsial'nykh uravneniy* [Loaded Equations as Perturbations of Differential Equations]. Almaty, Gylim, 2010, 335 pp. (In Russian)
7. Kneser A. Belastete integralgleichungen, *Rend. Circ. Matem. Palermo*, 1914, vol. 37, pp. 169–197. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF03014816>.
8. Nakhushev A. M. *Nagruzhennyye uravneniya i ikh primeneniya* [Loaded Equations and Their Applications]. Moscow, Nauka, 2012, 231 pp. (In Russian)
9. Guezane-Lakoud A., Belakroum D. Time-discretization schema for an integro-differential Sobolev type equation with integral conditions, *Appl. Math. Comput.*, 2012, vol. 218, no. 9, pp. 4695–4702. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.11.077>.
10. Luo Z. D. Teng F. A reduced-order extrapolated finite difference iterative scheme based on POD method for 2D Sobolev equation, *Appl. Math. Comput.*, 2018, vol. 329, pp. 374–383. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2018.02.022>.
11. Beshtokov M. Kh. Numerical analysis of initial-boundary value problem for a Sobolev-type equation with a fractional-order time derivative, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2019, vol. 59, no. 2, pp. 175–192. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0965542519020052>.
12. Grasselli M., Pata V. A reaction-diffusion equation with memory, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2006, vol. 15, no. 4, pp. 1079–1088. DOI: <https://doi.org/10.3934/dcds.2006.15.1079>.
13. Olmstead W. E., Davis S. H., Rosenblat S., Kath W. L. Bifurcation with memory, *SIAM J. Appl. Math.*, 1986, vol. 46, no. 2, pp. 171–188. DOI: <https://doi.org/10.1137/0146013>.
14. Yong J., Zhang X. Heat equations with memory, *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl.*, 2005, vol. 63, no. 5–7, pp. e99–e108. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.na.2005.02.033>.
15. Beshtokov M. Kh., Vodahova V. A. Nonlocal boundary value problems for a fractional-order convection-diffusion equation, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2019, vol. 29, no. 4, pp. 459–482 (In Russian). DOI: <https://doi.org/https://doi.org/10.20537/vm190401>.
16. Abdullaev V. M., Aida-zade K. R. On the numerical solution of loaded systems of ordinary differential equations, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2004, vol. 44, no. 9, pp. 1505–1515. EDN: XLKZWN.
17. Abdullaev V. M., Aida-zade K. R. Numerical solution of optimal control problems for loaded lumped parameter systems, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2006, vol. 46, no. 9, pp. 1487–1502. EDN: XLLQVH. DOI: <https://doi.org/10.1134/S096554250609003X>.
18. Abdullaev V. M., Aida-zade K. R. Finite-difference methods for solving loaded parabolic equations, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2016, vol. 56, no. 1, pp. 93–105 (In Russian). EDN: WUXIWJ. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0965542516010036>.
19. Alikhanov A. A., Berezgov A. M., Shkhanukov-Lafishev, M. Kh. Boundary value problems for certain classes of loaded differential equations and solving them by finite difference

- methods, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2008, vol. 48, no. 9, pp. 1581–1590. DOI: <https://doi.org/10.1134/S096554250809008X>.
20. Beshtokov M. Kh. The third boundary value problem for loaded differential Sobolev type equation and grid methods of their numerical implementation, *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2016, vol. 158, 012019. EDN: YVCYFN. DOI: <https://doi.org/10.1088/1757-899X/158/1/012019>.
 21. Samarskii A. A. Schemes of high-order accuracy for the multi-dimensional heat conduction equation, *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, 1963, vol. 3, no. 5, pp. 1107–1146. DOI: [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(63\)90104-6](https://doi.org/10.1016/0041-5553(63)90104-6).
 22. Lele S. K. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution, *J. Comput. Phys.*, 1992, vol. 103, no. 1, pp. 16–42. DOI: [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(92\)90324-R](https://doi.org/10.1016/0021-9991(92)90324-R).
 23. Matus P. P., Utebaev B. D. Compact and monotone difference schemes for parabolic equations, *Math. Models Comput. Simul.*, 2021, vol. 13, no. 6, pp. 1038–1048. DOI: <https://doi.org/10.1134/S2070048221060132>.
 24. Alikhanov A., Beshtokov M., Mehra M. The Crank–Nicolson type compact difference schemes for a loaded time-fractional Hallaire equation, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2021, vol. 24, no. 4, pp. 1231–1256. DOI: <https://doi.org/10.1515/fca-2021-0053>.
 25. Beshtokov M. Kh. Boundary value problems for a loaded modified fractional-order moisture transfer equation with the Bessel operator and difference methods for their solution, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2020, vol. 30, no. 2, pp. 158–175 (In Russian). DOI: <https://doi.org/10.35634/vm200202>.
 26. Samarskiy A. A. *Teoriya raznostnykh skhem* [Theory of Difference Schemes]. Moscow, Nauka, 1977, 656 pp. (In Russian)
 27. Samarskiy A. A., Gulin A. V. *Ustoychivost' raznostnykh skhem* [Stability of Difference Schemes]. Moscow, URSS, 2005, 384 pp. (In Russian)
 28. Voevodin A. F., Shugrin S. M. *Chislennyye metody rascheta odnomernykh sistem* [Numerical Methods for Calculating One-Dimensional Systems]. Novosibirsk, Nauka, 1981, 208 pp. (In Russian)