



УДК 517.956

Существование и единственность решений системы Гурса–Дарбу с интегральными граничными условиями

М. Дж. Марданов^{1,2}, Я. А. Шарифов^{1,2,3}

¹ Институт математики и механики НАН Азербайджана, Азербайджан, AZ1141, Баку, ул. Б. Вахабзаде, 9.

² Бакинский государственный университет, Азербайджан, AZ1148, Баку, ул. З. Халилова, 33.

³ Азербайджанский технический университет, Азербайджан, AZ1073, Баку, пр. Гусейн Джавида, 25.

Аннотация

В настоящее время локальные краевые задачи для дифференциальных уравнений гиперболического типа изучены достаточно подробно. Однако математическое моделирование ряда реальных процессов приводит к нелокальным краевым задачам для нелинейных дифференциальных уравнений гиперболического типа, которые остаются слабо исследованными. В данной работе рассматривается интегральная граничная задача общего вида в характеристическом прямоугольнике для уравнений гиперболического типа. При естественных условиях на исходные данные задачи построена функция Грина и установлены критерии однозначной разрешимости. Доказательства основных результатов демонстрируют существенность наложенных условий: их нарушение приводит к невозможности построения функции Грина и утрате требуемых свойств разрешимости задачи. В частном случае, с применением метода сжимающих отображений Банаха, получены достаточные условия существования и единственности решения краевой задачи. В качестве иллюстрации приведен конкретный пример.

Ключевые слова: системы Гурса–Дарбу, гиперболические уравнения, нелокальные краевые задачи, интегральные граничные условия, функ-

Дифференциальные уравнения и математическая физика
Научная статья

© Коллектив авторов, 2025

© СамГТУ, 2025 (составление, дизайн, макет)

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Марданов М. Дж., Шарифов Я. А. Существование и единственность решений системы Гурса–Дарбу с интегральными граничными условиями // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2025. Т. 29, № 2. С. 241–255. EDN: **ESOZQG**. DOI: [10.14498/vsgtu2147](https://doi.org/10.14498/vsgtu2147).

Сведения об авторах

Мисир Джумаил Марданов  <https://orcid.org/0000-0003-3901-0719>

доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент НАНА; директор института¹; профессор; каф. высшей математики²; e-mail: misirmardanov@yahoo.com

Ягуб Амияр Шарифов  <https://orcid.org/0000-0001-5273-6384>

доктор физико-математических наук, профессор; ведущий научный сотрудник; отд. оптимального управления¹; профессор; каф. инженерной математики и искусственного интеллекта²; профессор; каф. прикладной математики³; e-mail: sharifov22@rambler.ru

ция Грина, условия разрешимости, метод сжимающих отображений, единственность решения.

Получение: 9 января 2025 г. / Исправление: 12 апреля 2025 г. /
Принятие: 28 апреля 2025 г. / Публикация онлайн: 28 мая 2025 г.

Введение. В последние десятилетия наблюдается интенсивное исследование нелокальных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных [1–4]. Следует отметить, что краевая задача называется нелокальной, если краевые условия задаются в виде комбинаций значений искомого решения и/или его производных в различных граничных или внутренних точках области [4]. Важно подчеркнуть, что задачи с нелокальными краевыми условиями возникают при математическом моделировании физических и химических процессов, демографических исследований и в других прикладных областях.

При моделировании процессов, в которых непосредственное измерение основных параметров невозможно, а известны лишь их средние значения по области, возникают интегральные условия. Исследованию задач для уравнений гиперболического типа с интегральными условиями посвящены многочисленные работы [5–18]. В указанных работах преимущественно изучены вопросы разрешимости краевых задач как в классическом, так и в обобщенном смысле.

1. Постановка задачи. Рассмотрим функцию $y = y(t, x)$, определяемую как решение уравнения

$$y_{tx} = f(t, x, y(t, x), y_t(t, x), y_x(t, x)), \quad (t, x) \in Q, \quad (1)$$

с интегральными ограничениями вида

$$\begin{aligned} \int_0^T n(t)y(t, x)dt &= \varphi(x), \quad x \in [0, l], \\ \int_0^l m(x)y(t, x)dx &= \psi(t), \quad t \in [0, T], \end{aligned} \quad (2)$$

где $Q = \{(t, x) : 0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq l\}$ — характеристический прямоугольник; $T, l > 0$ — заданные константы; $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ — вектор состояния; $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$, $\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$ — вектор-функции; $n(t)$ и $m(x)$ — заданные матричные функции размерности $n \times n$. Все векторы рассматриваются как вектор-столбцы даже при строковой записи.

Задача (1), (2) была впервые исследована С. В. Жестковым в работе [6], где классическим методом последовательных приближений были доказаны теоремы существования и единственности решения. В дальнейшем Б. Панеяхом и П. Панеяхом [7] при минимальных ограничениях на исходные данные были получены более детальные условия однозначной разрешимости данной задачи. Следует отметить, что в работах [6, 7] исследование существования и единственности классического решения задачи (1), (2) проводилось для одномерного случая.

В дальнейшем будем предполагать выполнение следующих условий:

- а) вектор-функция $f : Q \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывна по совокупности переменных;
 б) матричные функции $n(t) \in L_\infty[0, T]$, $m(x) \in L_\infty[0, l]$ являются перестановочными, то есть удовлетворяют соотношениям

$$n(t)m(x) = m(x)n(t) \quad \text{при} \quad (t, x) \in Q,$$

причем

$$\det \left[\int_0^T n(t) dt \right] \neq 0, \quad \det \left[\int_0^l m(x) dx \right] \neq 0;$$

- в) функции $\varphi(x)$ и $\psi(t)$ дифференцируемы на отрезках $[0, l]$ и $[0, T]$ соответственно, и дополнительно выполняется условие согласования

$$\int_0^l m(x)\varphi(x)dx = \int_0^T n(t)\psi(t)dt = A = \text{const.}$$

Следует подчеркнуть, что условия б) и в) представляют собой необходимые условия разрешимости задачи (1), (2).

Обозначим через $C(Q, \mathbb{R}^n)$ пространство непрерывных на Q вектор-функций $y : Q \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Под решением задачи (1), (2) будем понимать функцию $y(t, x) \in C(Q, \mathbb{R}^n)$, обладающую частными производными

$$y_t(t, x) \in C(Q, \mathbb{R}^n), \quad y_x(t, x) \in C(Q, \mathbb{R}^n), \quad y_{tx}(t, x) \in C(Q, \mathbb{R}^n),$$

удовлетворяющую уравнению (1) и условиям (2). Такие решения принято называть классическими.

2. Приведение задачи (1), (2) к интегральным уравнениям. Для упрощения рассмотрим модельную задачу

$$y_{tx}(t, x) = z(t, x), \quad (t, x) \in Q, \quad (3)$$

с интегральными ограничениями (2), где $z(t, x) \in C(Q, \mathbb{R}^n)$ — заданная непрерывная вектор-функция.

ТЕОРЕМА 1. *Решение задачи (3), (2) представимо в виде*

$$y(t, x) = m^{-1}(l)\psi(t) + n^{-1}(T)\varphi(x) - n^{-1}(T)m^{-1}(l)A + \\ + \int_0^T \int_0^l G(t, x, \tau, s)z(\tau, s) d\tau ds, \quad (4)$$

где функция Грина $G(t, x, \tau, s)$ определяется следующим образом:

$$G(t, x, \tau, s) = \begin{cases} m^{-1}(l)n^{-1}(T) \int_0^s m(r)dr \int_0^\tau n(\alpha)d\alpha, & 0 \leq \tau \leq t, 0 \leq s \leq x, \\ -m^{-1}(l)n^{-1}(T) \int_0^s m(r)dr \int_\tau^T n(\alpha)d\alpha, & 0 \leq s \leq x, t < \tau \leq T, \\ -m^{-1}(l)n^{-1}(T) \int_0^\tau n(\alpha)d\alpha \int_\tau^l m(r)dr, & 0 \leq \tau \leq t, x < s \leq l, \\ m^{-1}(l)n^{-1}(T) \int_s^l m(r)dr \int_\tau^T n(\alpha)d\alpha, & x < s \leq l, t < \tau \leq T, \end{cases}$$

причем

$$m^{-1}(l) = \left[\int_0^l m(x) dx \right]^{-1}, \quad n^{-1}(T) = \left[\int_0^T n(t) dt \right]^{-1}.$$

Доказательство. Решение задачи (3), (2) будем искать в виде

$$y(t, x) = a(t) + b(x) + \int_0^t \int_0^x z(\tau, s) d\tau ds, \quad (t, x) \in Q, \quad (5)$$

где $a(t) \in C^1[0, T]$, $b(x) \in C^1[0, l]$ — неизвестные непрерывно дифференцируемые функции.

Подстановка (5) в условия (2) дает систему:

$$\begin{aligned} \int_0^T n(t) a(t) dt + \int_0^T n(t) b(x) dt + \\ + \int_0^T n(t) \left(\int_0^t \int_0^x z(\tau, s) d\tau ds \right) dt = \varphi(x), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \int_0^l m(x) a(t) dx + \int_0^l m(x) b(x) dx + \\ + \int_0^l m(x) \left(\int_0^t \int_0^x z(\tau, s) d\tau ds \right) dx = \psi(t). \end{aligned} \quad (7)$$

Без ограничения общности предположим, что

$$\int_0^T n(t) a(t) dt = 0 \quad \text{или} \quad \int_0^l m(x) b(x) dx = 0.$$

Выберем первое условие $\int_0^T n(t) a(t) dt = 0$. Тогда из (6) следует

$$b(x) = n^{-1}(T) \varphi(x) - n^{-1}(T) \int_0^T n(t) \left(\int_0^t \int_0^x z(\tau, s) d\tau ds \right) dt, \quad x \in [0, l]. \quad (8)$$

Подставляя (8) в (7), получаем выражение для $a(t)$:

$$\begin{aligned} a(t) = -m^{-1}(l) \psi(t) + \\ + n^{-1}(T) m^{-1}(l) \int_0^T \int_0^l n(t) m(x) \left(\int_0^t \int_0^x z(\tau, s) d\tau ds \right) dt dx - \\ - m^{-1}(l) \int_0^l m(x) \left(\int_0^t \int_0^x z(\tau, s) d\tau ds \right) dx - A, \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Учитывая выражения для функций $a(t)$ и $b(x)$ в равенстве (5), получаем следующее представление для решения:

$$\begin{aligned}
 y(t, x) = & m^{-1}(l)\psi(t) + n^{-1}(T)\varphi(x) - n^{-1}(T)m^{-1}(l)A - \\
 & - m^{-1}(l) \int_0^l m(x) \left(\int_0^t \int_0^x z(\tau, s) d\tau ds \right) dx - \\
 & - n^{-1}(T) \int_0^T n(t) \left(\int_0^t \int_0^x z(\tau, s) d\tau ds \right) dt + \\
 & + m^{-1}(l)n^{-1}(T) \int_0^T \int_0^l m(x)n(t) \left(\int_0^t \int_0^x z(\tau, s) d\tau ds \right) dt dx + \\
 & + \int_0^t \int_0^x z(\tau, s) d\tau ds, \quad (t, x) \in Q. \quad (9)
 \end{aligned}$$

Применяя интегральные преобразования

$$\int_0^l m(x) \left(\int_0^t \int_0^x z(\tau, s) d\tau ds \right) dx = \int_0^l \int_0^t \left(\int_x^l m(s) ds \right) z(\tau, x) d\tau dx,$$

$$\int_0^T n(t) \left(\int_0^t \int_0^x z(\tau, s) d\tau ds \right) dt = \int_0^T \int_0^x \left(\int_t^T n(\tau) d\tau \right) z(t, s) dt ds,$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^T \int_0^l n(t)m(x) \left(\int_0^t \int_0^x z(\tau, s) d\tau ds \right) dt dx = \\
 = \int_0^T \int_0^l \left(\int_t^T n(\tau) d\tau \int_x^l m(s) ds \right) z(t, x) dt dx,
 \end{aligned}$$

к (9), получаем

$$\begin{aligned}
 y(t, x) = & m^{-1}(l)\psi(t) + n^{-1}(T)\varphi(x) - n^{-1}(T)m^{-1}(l)A - \\
 & - m^{-1}(l) \int_0^l \int_0^t \left(\int_x^l m(s) ds \right) z(\tau, x) d\tau dx - \\
 & - n^{-1}(T) \int_0^T \int_0^x \left(\int_t^T n(\tau) d\tau \right) z(\tau, s) dt ds + \\
 & + m^{-1}(l)n^{-1}(T) \int_0^T \int_0^l \left(\int_t^T n(\tau) d\tau \int_x^l m(s) ds \right) z(t, x) dt dx + \\
 & + \int_0^t \int_0^x z(\tau, s) d\tau ds, \quad (t, x) \in Q. \quad (10)
 \end{aligned}$$

Далее, объединяя слагаемые в (10), приходим к окончательному представлению:

$$\begin{aligned}
 y(t, x) = & m^{-1}(l)\psi(t) + n^{-1}(T)\varphi(x) - n^{-1}(T)m^{-1}(l)A + \\
 & + \int_0^t \int_0^x \left[m^{-1}(l)n^{-1}(T) \int_s^l m(r) dr \int_\tau^T n(t) dt + E - \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -m^{-1}(l) \int_s^l m(s)ds - n^{-1}(T) \int_\tau^T n(t)dt \Big] z(\tau, s) d\tau ds + \\
 & + \int_0^t \int_x^l \left[m^{-1}(l)n^{-1}(T) \int_s^l m(r)dr \int_\tau^T n(a)da - \right. \\
 & \quad \left. - m^{-1}(l) \int_s^l m(s)ds \right] z(\tau, s) d\tau ds + \\
 & + \int_t^T \int_0^x \left[m^{-1}(l)n^{-1}(T) \int_s^l m(r)dr \int_\tau^T n(a)da - \right. \\
 & \quad \left. - n^{-1}(T) \int_\tau^T n(a)da \right] z(\tau, s) d\tau ds + \\
 & + \int_t^T \int_x^l \left[m^{-1}(l)n^{-1}(T) \int_s^l m(r)dr \int_\tau^T n(a)da \right] z(\tau, s) d\tau ds, \quad (11)
 \end{aligned}$$

где E — единичная матрица размерности $n \times n$, а $(t, x) \in Q$.

В равенстве (11) проведем некоторые упрощения:

$$\begin{aligned}
 & E + m^{-1}(l)n^{-1}(T) \int_s^l m(r)dr \int_\tau^T n(a)da - \\
 & \quad - m^{-1}(l) \int_s^l m(r)dr - n^{-1}(T) \int_\tau^T n(a)da = \\
 & = m^{-1}(l)n^{-1}(T) \left[m(l)m(T) + \int_s^l m(r)dr \int_\tau^T n(a)da - \right. \\
 & \quad \left. - n(T) \int_s^l m(r)dr - m(l) \int_\tau^T n(a)da \right] = \\
 & = m^{-1}(l)n^{-1}(T) \left[\left(\int_0^s m(r)ds + \int_s^l m(r)dr \right) \left(\int_0^\tau n(a)da + \int_\tau^T n(a)da \right) + \right. \\
 & \quad + \int_s^l m(r)dr \int_\tau^T n(a)da - \left(\int_0^\tau n(a)da + \int_\tau^T n(a)da \right) \int_s^l m(r)dr - \\
 & \quad \left. - \left(\int_0^s m(r)ds + \int_s^l m(r)dr \right) \int_\tau^T n(a)da \right] = \\
 & \quad = m^{-1}(l)n^{-1}(T) \int_0^s m(r)dr \int_0^\tau n(a)da; \quad (12)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & m^{-1}(l)n^{-1}(T) \int_s^l m(r)dr \int_\tau^T n(\alpha)d\alpha - n^{-1}(T) \int_t^T n(\alpha)d\alpha = \\
 & = m^{-1}(l)n^{-1}(T) \left[\int_0^s m(r)ds \int_t^T n(\alpha)d\alpha - \right. \\
 & \quad \left. - \left(\int_0^s m(r)ds + \int_s^l m(r)dr \right) \int_\tau^T n(\alpha)d\alpha \right] =
 \end{aligned}$$

$$= -m^{-1}(l)n^{-1}(T) \int_0^s m(r)dr \int_\tau^T n(\alpha)d\alpha; \quad (13)$$

$$\begin{aligned} m^{-1}(l)n^{-1}(T) \int_s^l m(r)dr \int_\tau^T n(\alpha)d\alpha - m^{-1}(l) \int_s^l m(r)dr = \\ = m^{-1}(l)n^{-1}(T) \left[\int_s^l m(r)ds \int_\tau^T n(\alpha)d\alpha - \right. \\ \left. - \left(\int_\tau^T n(\alpha)d\alpha + \int_\tau^T n(\alpha)d\alpha \right) \int_s^l m(r)dr \right] = \\ = -m^{-1}(l)n^{-1}(T) \int_0^\tau n(\alpha)d\alpha \int_s^l m(r)dr. \quad (14) \end{aligned}$$

Учитывая равенства (12), (13) и (14) в (10), получаем следующее представление решения:

$$\begin{aligned} y(t, x) = m^{-1}(l)\psi(t) + n^{-1}(T)\varphi(x) - m^{-1}(l)n^{-1}(T)A + \\ + \int_0^t \int_0^x \left[m^{-1}(l)n^{-1}(T) \int_0^s m(r)dr \int_0^\tau n(\alpha)d\alpha \right] z(\tau, s) d\tau ds + \\ + \int_0^t \int_x^l \left[-m^{-1}(l)n^{-1}(T) \int_0^s m(r)dr \int_\tau^T n(\alpha)d\alpha \right] z(\tau, s) d\tau ds + \\ + \int_t^T \int_0^x \left[-m^{-1}(l)n^{-1}(T) \int_0^\tau n(\alpha)d\alpha \int_s^l m(r)dr \right] z(\tau, s) d\tau ds + \\ + \int_t^T \int_x^l \left[m^{-1}(l)n^{-1}(T) \int_s^l m(r)dr \int_\tau^T n(\alpha)d\alpha \right] z(\tau, s) d\tau ds. \quad (15) \end{aligned}$$

Введем матричную функцию Грина:

$$G(t, x, \tau, s) = \begin{cases} m^{-1}(l)n^{-1}(T) \int_0^s m(r)dr \int_0^\tau n(\alpha)d\alpha, & 0 \leq \tau \leq t, 0 \leq s \leq x, \\ -m^{-1}(l)n^{-1}(T) \int_0^s m(r)dr \int_\tau^T n(\alpha)d\alpha, & 0 \leq s \leq x, t < \tau \leq T, \\ -m^{-1}(l)n^{-1}(T) \int_0^\tau n(\alpha)d\alpha \int_\tau^l m(r)dr, & 0 \leq \tau \leq t, x < s \leq l, \\ m^{-1}(l)n^{-1}(T) \int_s^l m(r)dr \int_\tau^T n(\alpha)d\alpha, & x < s \leq l, t < \tau \leq T. \end{cases}$$

Тогда равенство (15) можно компактно записать в виде

$$\begin{aligned} y(t, x) = m^{-1}(l)\psi(t) + n^{-1}(T)\varphi(x) - m^{-1}(l)n^{-1}(T)A + \\ + \int_0^T \int_0^l G(t, x, \tau, s) z(\tau, s) d\tau ds. \end{aligned}$$

Отсюда следует справедливость равенства (4).

Пусть функция $y(t, x)$ определяется равенством (15). Докажем, что эта функция удовлетворяет уравнению (3) и краевым условиям (2).

Вычислим смешанную производную функции $y(t, x)$:

$$\begin{aligned}
 y_{tx}(t, x) &= \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \left[m^{-1}(l)\psi(t) + n^{-1}(T)\varphi(x) - m^{-1}(l)n^{-1}(T)A + \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^T \int_0^l G(t, x, \tau, s)z(\tau, s)d\tau ds \right] = \\
 &= \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \left[\int_0^t \int_0^x m^{-1}(l)n^{-1}(T) \left(\int_0^s m(r)dr \int_0^\tau n(\alpha)d\alpha \right) z(\tau, s)d\tau ds \right] + \\
 &+ \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \left[\int_0^t \int_x^l \left(-m^{-1}(l)n^{-1}(T) \int_0^s m(r)dr \int_\tau^T n(\alpha)d\alpha \right) z(\tau, s)d\tau ds \right] + \\
 &+ \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \left[\int_t^T \int_0^x \left(-m^{-1}(l)n^{-1}(T) \int_0^\tau n(\alpha)d\alpha \int_s^l m(r)dr \right) z(\tau, s)d\tau ds \right] + \\
 &+ \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \left[\int_t^T \int_x^l m^{-1}(l)n^{-1}(T) \left(\int_s^l m(r)dr \int_\tau^T n(\alpha)d\alpha \right) z(\tau, s)d\tau ds \right] = \\
 &= m^{-1}(l)n^{-1}(T) \int_0^x m(r)ds \int_0^T n(\alpha)d\alpha z(t, x) + \\
 &\quad + m^{-1}(l)n^{-1}(T) \int_0^x m(r)ds \int_t^T n(\alpha)d\alpha z(t, x) + \\
 &\quad + m^{-1}(l)n^{-1}(T) \int_0^T n(\alpha)d\alpha \int_0^x m(r)dr z(t, x) + \\
 &\quad + m^{-1}(l)n^{-1}(T) \int_x^l m(r)ds \int_t^T n(\alpha)d\alpha z(t, x) = \\
 &= m^{-1}(l)n^{-1}(T) \int_0^x m(r)ds n(T)z(t, x) + \\
 &\quad + m^{-1}(l)n^{-1}(T) \int_x^l n(\alpha)d\alpha n(T)z(t, x) = \\
 &= m^{-1}(l) \int_0^x m(r)dr z(t, x) + m^{-1}(l) \int_x^l m(r)dr z(t, x) = z(t, x).
 \end{aligned}$$

Теперь проверим выполнение краевых условий (2). Так как представления (4) и (10) эквивалентны, умножим представление для $y(t, x)$ на $n(t)$ и проинтегрируем по $[0, T]$:

$$\begin{aligned}
 \int_0^T n(t)y(t, x)dt &= \int_0^T n(t) \left[m^{-1}(l)\psi(t) + n^{-1}(T)\varphi(x) - n^{-1}(T)m^{-1}(l)A - \right. \\
 &\quad - m^{-1}(l) \int_0^l m(x) \left(\int_0^T \int_0^x z(\tau, s)d\tau ds \right) dx - \\
 &\quad \left. - n^{-1}(T) \int_0^T n(t) \left(\int_0^T \int_0^x z(\tau, s)d\tau ds \right) dt + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + n^{-1}(T)m^{-1}(l) \int_0^T \int_0^l m(x)n(t) \left(\int_0^T \int_0^x z(\tau, s) d\tau ds \right) dt dx + \\
 & \quad + \int_0^T \int_0^x z(\tau, s) d\tau ds \Big] dt = \\
 & = m^{-1}(l) \int_0^T n(t)\psi(t)dt + \varphi(x) - m^{-1}(l) \int_0^T n(t)\psi(t)dt - \\
 & \quad - m^{-1}(l) \int_0^T \int_0^l n(t)m(x) \left(\int_0^T \int_0^x z(\tau, s) d\tau ds \right) dt dx - \\
 & \quad - \int_0^T n(t) \left(\int_0^T \int_0^x z(\tau, s) d\tau ds \right) dt + \\
 & \quad + m^{-1}(l) \int_0^T \int_0^l n(t)m(x) \left(\int_0^T \int_0^x z(\tau, s) d\tau ds \right) dt dx + \\
 & \quad + \int_0^T n(t) \left(\int_0^T \int_0^x z(\tau, s) d\tau ds \right) dt = \varphi(x).
 \end{aligned}$$

При выводе последнего равенства учитывалась перестановочность матриц $n(t)$, $m(x)$ и их обратных $n^{-1}(T)$, $m^{-1}(l)$.

Аналогичным образом проверяется выполнение второго условия:

$$\int_0^l m(x)y(t, x)dx = \psi(t).$$

Таким образом, функция $y(t, x)$, заданная в виде (4), действительно является решением задачи (3), (2). Теорема доказана. $\square$

Теорема 1 показывает, что задача (1), (2) эквивалентна интегральному уравнению

$$\begin{aligned}
 y(t, x) = & m^{-1}(l)\psi(t) + n^{-1}(T)\varphi(x) - m^{-1}(l)n^{-1}(T)A + \\
 & + \int_0^T \int_0^l G(t, x, \tau, s)f(\tau, s, y(\tau, s), y_t(\tau, s), y_s(\tau, s))d\tau ds. \quad (16)
 \end{aligned}$$

3. Доказательство существования и единственности. Для доказательства существования и единственности решения задачи (1), (2) будем предполагать, что функция f зависит только от t , x и y :

$$f(t, x, y, y_t, y_x) \equiv f(t, x, y).$$

Определим оператор $P : C(Q; \mathbb{R}^n) \rightarrow C(Q; \mathbb{R}^n)$ равенством

$$\begin{aligned}
 (Pz)(t, x) = & m^{-1}(l)\psi(t) + n^{-1}(T)\varphi(x) - m^{-1}(l)n^{-1}(T)A + \\
 & + \int_0^T \int_0^l G(t, x, \tau, s)f(\tau, s, y(\tau, s))d\tau ds,
 \end{aligned}$$

где $G(t, x, \tau, s)$ — функция Грина, введенная ранее.

Заметим, что разрешимость задачи (1), (2) или интегрального уравнения (16) эквивалентна существованию неподвижной точки оператора P . Таким образом, задача (1), (2) имеет решение тогда и только тогда, когда оператор P имеет неподвижную точку в пространстве $C(Q; \mathbb{R}^n)$.

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что выполнены следующие условия:*

$$|f(t, x, z_2) - f(t, x, z_1)| \leq M|z_2 - z_1| \quad (17)$$

для всех $(t, x) \in Q$, $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^n$, где $M \geq 0$, и

$$L = lTSM < 1, \quad (18)$$

где

$$S = \max_{Q \times Q} \|G(t, x, \tau, s)\|.$$

Тогда задача (1), (2) имеет единственное решение.

Доказательство. Введем обозначения:

$$N = \max_Q |m^{-1}(l)\psi(t) + n^{-1}(T)\varphi(x) - m^{-1}(l)n^{-1}(T)A|, \quad M_f = \max_Q |f(t, x, 0)|.$$

Выберем $r \geq (N + M_f TS)/(1 - L)$, где $S = \max_{Q \times Q} \|G(t, x, \tau, s)\|$, и рассмотрим шар

$$B_r = \{z \in C(Q; \mathbb{R}^n) : \|z\| \leq r\}.$$

Для произвольного $z \in B_r$ оценим норму оператора P :

$$\begin{aligned} \|(Pz)(t, x)\| &\leq N + \int_0^T \int_0^l |G(t, x, \tau, s)| \cdot |f(\tau, s, z(\tau, s)) - f(\tau, s, 0)| d\tau ds + \\ &\quad + \int_0^T \int_0^l |G(t, x, \tau, s)| \cdot |f(\tau, s, 0)| d\tau ds \leq \\ &\leq N + S \int_0^T \int_0^l (M|z(\tau, s)| + M_f) d\tau ds \leq N + SMrTl + M_fTlS \leq \\ &\leq \frac{N + M_fTlS}{1 - L} \leq r. \end{aligned}$$

Для любых $z_1, z_2 \in B_r$ из условия Липшица (17) следует:

$$\begin{aligned} |(Pz_2)(t, x) - (Pz_1)(t, x)| &\leq \\ &\leq \int_0^T \int_0^l |G(t, x, \tau, s)| \cdot |f(\tau, s, z_2(\tau, s)) - f(\tau, s, z_1(\tau, s))| d\tau ds \leq \\ &\leq SM \int_0^T \int_0^l |z_2(\tau, s) - z_1(\tau, s)| d\tau ds \leq \\ &\leq SMTl \max_Q |z_2(t, x) - z_1(t, x)| \leq L\|z_2 - z_1\|. \end{aligned}$$

Таким образом, оператор P является сжимающим на B_r , и по принципу сжимающих отображений задача (1), (2) имеет единственное решение. $\square$

4. Пример применения результатов. В качестве иллюстрации полученных результатов рассмотрим систему гиперболических уравнений

$$\begin{cases} y_{1tx} = 0.1 \sin y_2, \\ y_{2tx} = \frac{|y_1|}{(e + e^{tx})(1 + |y_1|)}, \end{cases} \quad (t, x) \in [0, 1] \times [0, 1] \quad (19)$$

с интегральными условиями следующего вида:

$$\int_0^1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}, \quad \int_0^1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} dx = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Непосредственной проверкой устанавливается выполнение условия согласования. Функция Грина для данной задачи имеет вид

$$G(t, x, \tau, s) = \begin{cases} E \cdot s\tau, & 0 \leq s \leq x, 0 \leq \tau \leq t, \\ -E \cdot s(1 - \tau), & 0 \leq s \leq x, t \leq \tau \leq 1, \\ -E \cdot (1 - s)t, & x < s \leq 1, 0 \leq \tau \leq t, \\ E \cdot (1 - s)(1 - \tau), & t \leq \tau \leq 1, x < s \leq 1, \end{cases}$$

где E — единичная матрица.

Оценим параметры задачи:

- норма функции Грина: $\max |G(t, x, \tau, s)| \leq 1$;
- константа Липшица: $M = 0.1$;
- параметр сжатия: $L = \|G\|MTl \leq 1 \cdot 0.1 \cdot 1 \cdot 1 = 0.1 < 1$.

Таким образом, все условия теоремы 2 выполнены, и задача (19), (20) имеет единственное решение.

Заключение. В данной работе исследована нелокальная краевая задача с интегральными условиями для системы гиперболических уравнений. Основные результаты включают:

- построение функции Грина для рассматриваемого класса задач;
- установление условий однозначной разрешимости в терминах исходных данных;
- доказательство теоремы существования и единственности решения на основе принципа сжимающих отображений;
- демонстрацию полученных результатов на конкретном примере.

Как показано в работе, введенные ограничения на исходные данные (включая условие Липшица (17) и ограничение на норму функции Грина (18)) являются существенными для обеспечения однозначной разрешимости задачи. Приведенный пример демонстрирует эффективность предложенного подхода для нелинейных систем гиперболического типа.

Полученные результаты расширяют существующие методы исследования нелокальных краевых задач и могут быть применены к более широкому классу уравнений математической физики.

Конкурирующие интересы. У нас нет конфликта интересов в отношении авторства и публикации этой статьи.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Самарский А. А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // *Диффер. уравн.*, 1980. Т. 16, № 11. С. 1925–1935.
2. Нахушев А. М. *Задачи со смещением для уравнений в частных производных*. М.: Наука, 2006. 287 с. EDN: [PDBUIH](#).
3. Пташник Б. И. *Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными*. Наукова думка: Киев, 1984. 264 с.
4. Пулькина Л. С. *Задачи с неклассическими условиями для гиперболических уравнений*. Самарский университет: Самара, 2012. 194 с.
5. Byszewski L. Existence and uniqueness of solution of nonlocal problems for hyperbolic equation $u_{xt} = F(x, t, u, u_x)$ // *J. Appl. Math. Stoch. Anal.*, 1990. vol. 3, no. 3. pp. 163–168. <http://eudml.org/doc/46588>.
6. Жестков С. В. О задаче Гурса с интегральными краевыми условиями // *Укр. мат. журн.*, 1990. Т. 42, № 1. С. 132–135.
7. Панеях Б., Панеях П. Некорректные задачи в теории гиперболических дифференциальных уравнений // *Тр. ММО*, 2009. Т. 70. С. 183–234.
8. Асанова А. Т. Нелокальная задача с интегральными условиями для системы гиперболических уравнений в характеристическом прямоугольнике // *Изв. вузов. Матем.*, 2017. № 5. С. 11–25. EDN: [YHMJEX](#).
9. Assanova A. T. A generalized integral problem for a system of hyperbolic equations and its applications // *Hacet. J. Math. Stat.*, 2023. vol. 52, no. 6. pp. 1513–1532. EDN: [OFOULD](#). DOI: <https://doi.org/10.15672/hujms.1094454>.
10. Bouziani A. Solution forte d'un problème mixte avec conditions non locales pour une classe d'équations hyperboliques // *Bulletins de l'Académie Royale de Belgique*, 1997. vol. 8, no. 1–6. pp. 53–70. https://www.persee.fr/doc/barb_0001-4141_1997_num_8_1_27797.
11. Кожанов А. И., Пулькина Л. С. О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // *Диффер. уравн.*, 2006. Т. 42, № 9. С. 1166–1179. EDN: [HVLJOH](#).
12. Assanova A. T., Dzhumabaev D. S. Well-posedness of nonlocal boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations // *J. Math. Anal. Appl.*, 2013. vol. 402, no. 1. pp. 167–178. EDN: [XKUPFV](#). DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2013.01.012>.
13. Assanova A. T. On the solvability of a nonlocal problem for the system of Sobolev-type differential equations with integral condition // *Georgian Math. J.*, 2021. vol. 28, no. 1. pp. 49–57. EDN: [QHOEWV](#). DOI: <https://doi.org/10.1515/gmj-2019-2011>.
14. Асанова А. Т. О нелокальной задаче с интегральными условиями для системы гиперболических уравнений // *Диффер. уравн.*, 2018. Т. 54, № 2. С. 202–214. EDN: [QLHNEX](#). DOI: <https://doi.org/10.1134/S0374064118020073>.
15. Голубева Н. Д., Пулькина Л. С. Об одной нелокальной задаче с интегральными условиями // *Матем. заметки*, 1996. Т. 59, № 3. С. 456–458. EDN: [JAOCYB](#). DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1736>.
16. Пулькина Л. С. О разрешимости в L_2 нелокальной задачи с интегральными условиями для гиперболического уравнения // *Диффер. уравн.*, 2000. Т. 36, № 2. С. 279–280. EDN: [VOKDVA](#).
17. Oussaeif T. E., Bouziani A. Solvability of nonlinear Goursat type problem for hyperbolic equation with integral condition // *Khayyam J. Math.*, 2018. vol. 4, no. 2. pp. 198–213. DOI: <https://doi.org/10.22034/kjm.2018.65161>.
18. Mardanov M. J., Sharifo Y. A. An optimal control problem for the systems with integral boundary conditions // *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series*, 2023. no. 1. pp. 110–123. EDN: [PFRKML](#). DOI: <https://doi.org/10.31489/2023M1/110-123>.

MSC: 35G35, 35G46, 35L53, 35L57

Existence and uniqueness of solutions to the Goursat–Darboux system with integral boundary conditions

*M. J. Mardanov^{1,2}, Ya. A. Sharifov^{1,2,3}*¹ Institute of Mathematics and Mechanics,
Azerbaijan National Academy of Sciences,
9, Bakhtiyar Vahabzade st., Baku, AZ1141, Azerbaijan.² Baku State University,
33, Z. Khalilov st., Baku, AZ1148, Azerbaijan.³ Azerbaijan Technical University,
25, Hussein Javid prosp., Baku, AZ1073, Azerbaijan.

Abstract

Currently, local boundary value problems for hyperbolic-type differential equations have been studied in considerable details. However, mathematical modeling of various real-world processes leads to nonlocal boundary value problems for nonlinear hyperbolic differential equations, which remain insufficiently investigated. This paper is devoted to a general integral boundary value problem in a characteristic rectangle for hyperbolic equations. Under natural conditions on the input data, we construct the Green's function and establish uniqueness criteria for the solution. The proofs of the main results demonstrate the essential nature of the imposed conditions: their violation makes it impossible to construct the Green's function and leads to the loss of required solvability properties. For a special case, by using Banach's contraction mapping principle, we obtain sufficient conditions for the existence and uniqueness of the boundary value problem solution. A specific example is provided to illustrate the obtained results.

Keywords: Goursat–Darboux systems, hyperbolic equations, nonlocal boundary value problems, integral boundary conditions, Green's function, solvability conditions, contraction mapping method, solution uniqueness.

Differential Equations and Mathematical Physics Research Article

© The Author(s), 2025

© Samara State Technical University, 2025 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Mardanov M. J., Sharifov Ya. A. Existence and uniqueness of solutions to the Goursat–Darboux system with integral boundary conditions, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2025, vol. 29, no. 2, pp. 241–255. EDN: [ES0ZQG](https://doi.org/10.14498/vsgtu2147). DOI: [10.14498/vsgtu2147](https://doi.org/10.14498/vsgtu2147) (In Russian).

Authors' Details:

Misir J. Mardanov  <https://orcid.org/0000-0003-3901-0719>Dr. Phys. & Math. Sci., Professor, Corresponding Member of ANAS; Director of Institute¹; Professor; Dept. of Higher Mathematics²; e-mail: misirmardanov@yahoo.com*Yagub A. Sharifov*  <https://orcid.org/0000-0001-5273-6384>Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Leading Researcher; Dept. of Optimal Control¹; Professor; Dept. of Engineering Mathematics and Artificial Intelligence²; Professor; Dept. of Applied Mathematics³; e-mail: sharifov22@rambler.ru

Received: 9th January, 2025 / Revised: 12th April, 2025 /
 Accepted: 28th April, 2025 / First online: 28th May, 2025

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests regarding the authorship and publication of this paper.

Authors' contributions and responsibilities. All authors participated in the conceptualization of the study and manuscript preparation. The authors take full responsibility for submitting the final manuscript. The final version of the manuscript has been approved by all authors.

Funding. This research received no specific grant from any funding agency in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

References

1. Samarskii A. A. Some problems of the theory of differential equations, *Differ. Uravn.*, 1980, vol. 16, no. 11, pp. 1925–1935 (In Russian).
2. Nakhushev A. M. *Zadachi so smeshcheniem dlia uravnenii v chastnykh proizvodnykh* [Boundary Value Problems with Shift for Partial Differential Equations]. Moscow, Nauka, 2006, 287 pp. (In Russian). EDN: PDBUIH.
3. Ptashnik B. I. *Nekorrektnye granichnye zadachi dlia differentsial'nykh uravnenii s chastnymi proizvodnymi* [Ill-Posed Boundary Value Problems for Partial Differential Equations]. Naukova Dumka, Kiev, 1984, 264 pp. (In Russian)
4. Pul'kina L. S. *Zadachi s neklassicheskimi usloviiami dlia giperbolicheskikh uravnenii* [Problems with Nonclassical Conditions for Hyperbolic Equations]. Samara University, Samara, 2012, 194 pp. (In Russian)
5. Byszewski L. Existence and uniqueness of solution of nonlocal problems for hyperbolic equation $u_{xt} = F(x, t, u, u_x)$, *J. Appl. Math. Stoch. Anal.*, 1990, vol. 3, no. 3, pp. 163–168. <http://eudml.org/doc/46588>.
6. Zhestkov S. V. The Goursat problem with integral boundary conditions, *Ukr. Math. J.*, 1990, vol. 42, no. 1, pp. 119–122. EDN: XLTFER. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01066375>.
7. Paneah B., Paneah P. Nonlocal problems in the theory of hyperbolic differential equations, *Trans. Moscow Math. Soc.*, 2009, vol. 70, pp. 135–170. DOI: <https://doi.org/10.1090/S0077-1554-09-00179-4>.
8. Assanova A. T. Nonlocal problem with integral conditions for a system of hyperbolic equations in characteristic rectangle, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2017, vol. 61, no. 5, pp. 7–20. EDN: XNIJGX. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1066369X17050024>.
9. Assanova A. T. A generalized integral problem for a system of hyperbolic equations and its applications, *Hacet. J. Math. Stat.*, 2023, vol. 52, no. 6, pp. 1513–1532. EDN: OFOULD. DOI: <https://doi.org/10.15672/hujms.1094454>.
10. Bouziani A. Solution forte d'un problème mixte avec conditions non locales pour une classe d'équations hyperboliques, *Bulletins de l'Académie Royale de Belgique*, 1997, vol. 8, no. 1–6, pp. 53–70. https://www.persee.fr/doc/barb_0001-4141_1997_num_8_1_27797.
11. Kozhanov A. I., Pul'kina L. S. On the solvability of boundary value problems with a nonlocal boundary condition of integral form for multidimensional hyperbolic equations, *Differ. Equ.*, 2006, vol. 42, no. 9, pp. 1233–1246. EDN: KDUGPW. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0012266106090023>.
12. Assanova A. T., Dzhumabaev D. S. Well-posedness of nonlocal boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations, *J. Math. Anal. Appl.*, 2013, vol. 402, no. 1, pp. 167–178. EDN: XKUPFV. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2013.01.012>.
13. Assanova A. T. On the solvability of a nonlocal problem for the system of Sobolev-type differential equations with integral condition, *Georgian Math. J.*, 2021, vol. 28, no. 1, pp. 49–57. EDN: QHOEWV. DOI: <https://doi.org/10.1515/gmj-2019-2011>.

14. Assanova A. T. On a nonlocal problem with integral conditions for the system of hyperbolic equations, *Differ. Equ.*, 2018, vol. 54, no. 2, pp. 201–214. EDN: YBZFKX. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0012266118020076>.
15. Golubeva N. D., Pul'kina L. S. A nonlocal problem with integral conditions, *Math. Notes*, 1996, vol. 59, no. 3, pp. 326–328. EDN: OKGZPD. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02308548>.
16. Pul'kina L. S. The L_2 solvability of a nonlocal problem with integral conditions for a hyperbolic equation, *Differ. Equ.*, 2000, vol. 36, no. 2, pp. 316–318. EDN: LFVPFH. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02754219>.
17. Oussaeif T. E., Bouziani A. Solvability of nonlinear Goursat type problem for hyperbolic equation with integral condition, *Khayyam J. Math.*, 2018, vol. 4, no. 2, pp. 198–213. DOI: <https://doi.org/10.22034/kjm.2018.65161>.
18. Mardanov M. J., Sharifo Y. A. An optimal control problem for the systems with integral boundary conditions, *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series*, 2023, no. 1, pp. 110–123. EDN: PFRKML. DOI: <https://doi.org/10.31489/2023M1/110-123>.