Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2025. Т. 29, № 3. С. 554–565
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2155
EDN: KNQSLO

УДК 517.958:536.24

Начально-краевая задача для нестационарного уравнения теплопроводности в ограниченной области без тепловой изоляции боковой поверхности

***В. Д. Бейбалаев*[1,2], *Т. И. Ибавов*[1]**

[1] Дагестанский государственный университет,
Россия, 367000, Махачкала, ул. Магомета Гаджиева, 43а.
[2] Институт проблем геотермии и возобновляемых источников энергии – филиал ОИВТ РАН в г. Махачкале,
Россия, 367030, Махачкала, пр-т Имама Шамиля, 39а.

Аннотация

Исследована начально-краевая задача для ограниченной области, находящейся в тепловом взаимодействии с внешней средой, учитывающая эффекты памяти посредством дробной производной Капуто по времени. Теплообмен через боковую поверхность тела с окружающей средой учтен в дифференциальном уравнении в виде отрицательного источника тепла. Получена априорная оценка решения начально-краевой задачи. Решение найдено операционным методом с использованием преобразования Лапласа по времени.

Ключевые слова: эффект памяти, преобразование Лапласа, нестационарное уравнение теплопроводности.

Получение: 17 февраля 2025 г. / Исправление: 10 июня 2025 г. / Принятие: 17 июня 2025 г. / Публикация онлайн: 7 августа 2025 г.

Дифференциальные уравнения и математическая физика
Краткое сообщение

Образец для цитирования
Бейбалаев В. Д., Ибавов Т. И. Начально-краевая задача для нестационарного уравнения теплопроводности в ограниченной области без тепловой изоляции боковой поверхности // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2025. Т. 29, № 3. С. 554–565. EDN: KNQSLO. DOI: 10.14498/vsgtu2155.

Сведения об авторах

Ветлугин Джабраилович Бейбалаев https://orcid.org/0000-0002-4881-9264
кандидат физико-математических наук; доцент; каф. прикладной математики[1]; старший научный сотрудник; лаб. геотермомеханики[2]; e-mail: kaspij_03@mail.rul.ru

Темирлан Ильмутдинович Ибавов https://orcid.org/0009-0006-8743-4304
старший преподаватель; каф. дискретной математики и информатики[1]; e-mail: ibavov94@mail.ru

Введение. В настоящее время математические методы, основанные на интегро-дифференцировании дробного порядка, широко применяются при исследовании физических и химических процессов в средах с эффектами памяти и пространственными корреляциями. Как показано в работах [1–6], анализ процессов теплопереноса в средах с фрактальной структурой требует учета эффектов памяти. Их учет в рамках классических подходов приводит к появлению в дифференциальных уравнениях интегрального оператора, ядро которого отражает природу нелокальности. В подобных системах физические величины, как правило, обладают дробной размерностью. В работе [7] рассмотрены различные модели, основанные на дифференциальных уравнениях с дробными производными, а в исследовании [8] изучены процессы промерзания грунта с учетом эффектов памяти. Работы [9, 10] посвящены анализу третьей начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности с дробной производной Капуто по времени на полуоси.

В данной работе исследуется начально-краевая задача для уравнения теплопроводности в ограниченной области с учетом эффектов памяти при отсутствии тепловой изоляции боковой поверхности, то есть в случае теплообмена между поверхностью тела и окружающей средой по закону Ньютона. При этом температура окружающей среды предполагается постоянной и равной начальной температуре.

1. Вспомогательные утверждения.

Определение [12]. Функция, задаваемая рядом

$$W(\alpha, \beta, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!\Gamma(\alpha k + \beta)},$$

где α, $\beta > 0$, называется функцией Райта.

Теорема 1 [12]. *Пусть функции $F(p)$ и $G(p)$ аналитичны в полуплоскости $\mathrm{Re}(p) > p_0$ и являются образами Лапласа функций $f(t)$ и $g(t)$ соответственно. Пусть также известно, что $F(\varphi(p)) = G(p)$. Тогда*

$$G(p) = F\big(\varphi(p)\big) = \int_0^{+\infty} f(\tau) \exp\big(-\varphi(p)\tau\big) d\tau$$

и выполняется равенство

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} F\big(\varphi(p)\big) \exp(tp) dp.$$

2. Постановка задачи. Рассмотрим ограниченную область с эффектами памяти, находящуюся в тепловом равновесии с окружающей средой при температуре $T_0(x)$. Таким образом, начальная температура области постоянна во всех точках и совпадает с температурой окружающей среды. В начальный момент времени границы области приводятся в контакт с окружающей средой, температура которой равна $T_c > T_0(x)$. Через боковую поверхность области происходит теплообмен со средой при температуре $T_0(x)$. Требуется определить распределение температуры в области в произвольный момент времени. Теплообмен между областью и окружающей средой подчиняется закону Ньютона.

При расположении начала координат в центре области, т.е. для области $D = \{(x,t) : -R < x < R, 0 < t \leqslant T\}$, рассматриваемый процесс описывается дифференциальным уравнением с дробной производной Капуто:

$$\partial_{0t}^{\alpha} T(x,t) = a\frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x,t) - \frac{\beta}{\lambda h}\big[T(x,t) - T_0\big], \quad -R < x < R,\ t > 0, \tag{1}$$

где $\partial_{0t}^{\alpha} T(x,t) = \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\displaystyle\int_0^t \frac{T'(x,s)}{(t-s)^{\alpha}}ds$ — частная дробная производная Капуто порядка $0 < \alpha \leqslant 1$; $T(x,t)$ — температура; a — коэффициент температуропроводности; β — коэффициент теплообмена; λ — коэффициент теплопроводности материала; h — отношение площади сечения тела к его периметру. Отметим, что отношение β/λ характеризует относительную интенсивность теплообмена на границе.

Вводя безразмерное время $\tau = t/t_0$, производную Капуто можно представить в виде [17]

$$\partial_{0\tau}^{\alpha} T(x,\tau) = \frac{1}{t_0^{\alpha}}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{\tau} \frac{T'(x,s)}{(\tau-s)^{\alpha}}ds.$$

Тогда уравнение (1) преобразуется к виду

$$\partial_{0\tau}^{\alpha} T(x,\tau) = \bar{a}\frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x,\tau) - \frac{\beta}{\lambda h}\big[T(x,\tau) - T_0(x)\big], \quad -R < x < R,\ \tau > 0, \tag{2}$$

где $\bar{a} = a t_0^{\alpha}$.

Отметим, что переход к безразмерному времени влияет только на временную переменную. Однако, учитывая отсутствие характерного масштаба длины в полубесконечной среде, можно воспользоваться результатами работ [10], где масштаб длины для уравнения дробной диффузии определяется как $x_0 = \sqrt{at^{\alpha}}$ с размерностью длины [м]. При значении параметра $\alpha = 1$ данный масштаб длины переходит в классический случай уравнения диффузии. На этой основе вводится безразмерная переменная подобия $\eta_{\alpha} = x/\sqrt{at^{\alpha}}$, которая при $\alpha = 1$ соответствует переменной подобия Больцмана $\eta = x/\sqrt{at}$.

Для полной постановки задачи дополним систему начальными и граничными условиями:

$$T(x,0) = T_0(x), \quad T(0,\tau) = T_c,$$

$$-\lambda\frac{\partial T(x,\tau)}{\partial x}\Big|_{x=R} + \beta\big[T_c - T(R,\tau)\big] = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial T(x,\tau)}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0. \tag{4}$$

3. Априорная оценка решения начально-краевой задачи.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия*

$$T(x,\tau) \in C^{2,0}(D) \cap C^{1,0}(\bar{D}), \quad \partial_{0\tau}^{\alpha} T(x,\tau) \in C(\bar{D}).$$

Тогда для решения задачи (2)–(4) *справедлива априорная оценка*

$$\|T(x,\tau)\|_0^2 + D_{0\tau}^{-\alpha}\|T_x(x,\tau)\|_0^2 \leqslant M\|T_0(x)\|_0^2, \tag{5}$$

где M — постоянная, зависящая от входных данных задачи.

Доказательство. Поскольку $\bar{a} = \mathrm{const}$, то без ограничения общности положим $\bar{a} = 1$. Умножая уравнение (2) скалярно на $T(x,\tau)$, получим

$$\big(\partial_{0\tau}^{\alpha}T(x,\tau), T(x,\tau)\big) = \big(T_{xx}(x,\tau), T(x,\tau)\big) - \frac{\beta}{\lambda h}\big((T(x,\tau) - T_0(x)), T(x,\tau)\big), \tag{6}$$

где $(g,h) = \displaystyle\int_0^R ghdx$, $\|g\|_0^2 = (g,g)$ для функций, заданных на $[0,R)$.

Используя монотонность дробного интегрирования и тождество $2TT_\tau = \frac{\partial}{\partial\tau}(T^2)$, получаем

$$(\partial_{0\tau}^{\alpha}T(x,\tau), T(x,\tau)) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^R T(x,\tau)\,dx\int_0^t T_\tau(x,t-\tau)^{-\alpha}d\tau \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2}(1, \partial_{0\tau}^{\alpha}T^2(x,\tau)) = \frac{1}{2}\partial_{0\tau}^{\alpha}\|T(x,\tau)\|_0^2.$$

Применяя интегрирование по частям и учитывая граничные условия, получаем

$$\big(T_{xx}(x,\tau), T(x,\tau)\big) = \int_0^R T_{xx}(x,\tau)T(x,\tau)dx =$$
$$= T(x,\tau)T_x(x,\tau)\Big|_0^R - \int_0^R T_x^2(x,\tau)dx =$$
$$= \frac{\beta}{\lambda}T(R,\tau)\big[T_c - T(R,\tau)\big] - \|T_x(x,\tau)\|_0^2. \tag{7}$$

Для оценки первого слагаемого правой части равенства (7) применим неравенство Коши с ε [13]:

$$\frac{\beta}{\lambda}T(R,\tau)[T_c - T(R,\tau)] = \frac{\beta}{\lambda}\big((T_c - T(R,\tau)), T(R,\tau)\big) =$$
$$= -\frac{\beta}{\lambda}\int_0^R T^2(x,\tau)dx + \frac{\beta}{\lambda}\int_0^R T(x,0)T(x,\tau)dx \leqslant$$
$$\leqslant M_1^{\epsilon}\|T_0(x)\|_0^2 + M_2^{\epsilon}\|T_0(x)\|_0^2,$$

где $M_1^{\epsilon} = \dfrac{\beta}{\lambda}(1+\epsilon)$, $M_2^{\epsilon} = \dfrac{\beta}{\lambda}\Big(1 + \dfrac{1}{\epsilon}\Big)$. Таким образом,

$$(T_{xx}(x,\tau), T(x,\tau)) \leqslant M_1^{\epsilon}\|T_0(x)\|_0^2 + M_2^{\epsilon}\|T_0(x)\|_0^2 = M\|T_0(x)\|_0^2.$$

Подставляя полученные оценки в равенство (6), получаем

$$\frac{1}{2}\partial_{0\tau}^{\alpha}\|T(x,\tau)\|_0^2 + \|T_x(x,\tau)\|_0^2 \leqslant M\|T_0(x)\|_0^2. \tag{8}$$

Применяя к обеим частям неравенства (8) оператор дробного интегрирования $D_{0\tau}^{-\alpha}$ и используя лемму 2 из [13], получаем искомую оценку (5):

$$\|T(x,\tau)\|_0^2 + D_{0\tau}^{-\alpha}\|T_x(x,\tau)\|_0^2 \leqslant M\|T_0(x)\|_0^2. \qquad \square$$

4. Решение задачи. Рассмотрим случай, когда начальное распределение температуры постоянно: $T_0(x) = T_0 = \mathrm{const}$.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия*

$$T(x,\tau) \in C^{2,0}(D) \cap C^{1,0}(\bar{D}), \quad \partial_{0\tau}^{\alpha} T(x,\tau) \in C(\bar{D}), \quad \beta/\lambda \to \infty,$$

тогда решение задачи (2)–(4) *имеет вид*

$$T(x,\tau) = T_0 + (T_c - T_0)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \times$$
$$\times\left(\frac{(2n-1)R - x}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{1}{s^{3/2}}W\Big(-\alpha,1,-\frac{st^{-\alpha}}{\bar{a}}\Big)\exp\Big(-\frac{\big((2n-1)R-x\big)^2}{4s} - \frac{s\beta}{\lambda h}\Big)ds + \right.$$
$$\left. + \frac{(2n-1)R + x}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{1}{s^{3/2}}W\Big(-\alpha,1,-\frac{st^{-\alpha}}{\bar{a}}\Big)\exp\Big(-\frac{\big((2n-1)R+x\big)^2}{4s} - \frac{s\beta}{\lambda h}\Big)ds\right).$$

Доказательство. Решение начально-краевой задачи (2)–(4) найдем методом интегральных преобразований. Применим преобразование Лапласа по временной переменной τ к уравнению (2). Тогда после приведения подобных членов для изображения Лапласа получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$T_L''(x,p) - \Big(\frac{p^{\alpha}}{\bar{a}} + \frac{\beta}{\lambda h}\Big)T_L(x,p) + \Big(\frac{p^{\alpha}}{\bar{a}} + \frac{\beta}{\lambda h}\Big)\frac{T_0}{p} = 0 \tag{9}$$

с граничными условиями

$$-T_L'(R,p) + \frac{\beta}{\lambda}\Big(\frac{T_c}{p} - T_L(R,p)\Big) = 0, \quad T_L(0,p) = 0.$$

Характеристическое уравнение для (9) имеет вид

$$\mu^2 - q^2(p) = 0$$

с корнями $\mu_{1,2} = \pm q(p) = \pm\sqrt{\dfrac{p^{\alpha}}{\bar{a}} + \dfrac{\beta}{\lambda h}}$.

Тогда общее решение уравнения (9) записывается так:

$$T_L(x,p) = \frac{T_0}{p} + C_1\,\mathrm{ch}\big(q(p)x\big) + C_2\,\mathrm{sh}\big(q(p)x\big),$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий.

Используя условие симметрии (4), получаем $C_2 = 0$. Для определения постоянной C_1 воспользуемся граничным условием (3):

$$-C_1 q(p)\,\mathrm{sh}\big(q(p)R\big) + \frac{\beta T_c}{\lambda p} - \frac{\beta}{\lambda}\Big(\frac{T_0}{p} + C_1\,\mathrm{ch}\big(q(p)R\big)\Big) = 0,$$

что приводит к выражению

$$C_1 = \frac{T_c - T_0}{p\Big[\mathrm{ch}\big(q(p)R\big) + \dfrac{\lambda}{\beta} q(p)\,\mathrm{sh}\big(q(p)R\big)\Big]}.$$

Таким образом, решение в пространстве изображений Лапласа принимает вид

$$T_L(x,p) = \frac{T_0}{p} + \frac{(T_c - T_0)\,\mathrm{ch}\big(q(p)x\big)}{p\Big[\mathrm{ch}\big(q(p)R\big) + \dfrac{\lambda}{\beta} q(p)\,\mathrm{sh}\big(q(p)R\big)\Big]}.$$

Рассмотрим предельный случай идеального теплового контакта, когда $\beta/\lambda \to \infty$. Тогда

$$T_L(x,p) = \frac{T_0}{p} + \frac{(T_c - T_0)\,\mathrm{ch}\big(q(p)x\big)}{p\,\mathrm{ch}\big(q(p)R\big)} = \frac{T_0}{p} + \frac{\varphi(p)}{\psi(p)}. \tag{10}$$

Разложим $\mathrm{ch}^{-1}\big(q(p)R\big)$ в ряд:

$$\mathrm{ch}^{-1}\big(q(p)R\big) = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\exp\big(-(2n-1)q(p)R\big). \tag{11}$$

Подставляя разложение (11) в (10), получаем

$$T_L(x,p) = \frac{T_0}{p} + \frac{T_c - T_0}{p}\big[\exp\big(q(p)x\big) + \exp\big(-q(p)x\big)\big] \times \\ \times \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\exp\big(-(2n-1)q(p)R\big),$$

т.е.

$$T_L(x,p) = \frac{T_0}{p} + \frac{T_c - T_0}{p}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\big[\exp\big(-q(p)\big((2n-1)R - x\big)\big) + \\ + \exp\big(-q(p)\big((2n-1)R + x\big)\big)\big]. \tag{12}$$

Применим обратное преобразование Лапласа к выражению (12):

$$T(x,\tau) = T_0 + (T_c - T_0)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}L^{-1}\Big[\frac{1}{p}\exp\big(-q(p)\big((2n-1)R - x\big)\big)\Big] +$$

$$+\,(T_c-T_0)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}L^{-1}\Big[\frac{1}{p}\exp\big(-q(p)\big((2n-1)R+x\big)\big)\Big]. \quad (13)$$

Для нахождения оригинала решения воспользуемся теоремой 1 и свойством свертки преобразования Лапласа. В условиях теоремы 1 положим, что

$$\varphi(p)=q(p),\quad F(p)=\exp\Big(-2\sqrt{\frac{p\big((2n-1)R-x\big)^2}{4}}\Big).$$

Учитывая, что

$$L^{-1}\Big[\sqrt{\frac{\pi}{k}}\exp\big(-2\sqrt{kp}\big)\Big]=\frac{1}{s^{3/2}}\exp\left(-k/s\right),$$

найдем

$$\begin{aligned}
&L^{-1}\Big[\frac{1}{p}\exp\big(-q(p)\big((2n-1)R-x\big)\big)\Big]=\\
&=L^{-1}\Big[\frac{(2n-1)R-x}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{1}{s^{3/2}}\exp\Big(\frac{-\big((2n-1)R-x\big)^2}{4s}\Big)\cdot\frac{1}{p}\exp\big(q(p)s\big)ds\Big]=\\
&=\frac{(2n-1)R-x}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{1}{s^{3/2}}\exp\Big(\frac{-\big((2n-1)R-x\big)^2}{4s}\Big)\cdot L^{-1}\Big[\frac{1}{p}\exp\big(q(p)s\big)\Big]ds=\\
&=\frac{(2n-1)R-x}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{1}{s^{3/2}}\exp\Big(\frac{-\big((2n-1)R-x\big)^2}{4s}\Big)\times\\
&\qquad\times\exp\Big(-\frac{s\beta}{\lambda h}\Big)L^{-1}\Big[\frac{1}{p}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-sp^{\alpha})^n}{\bar{a}^n n!}\Big]ds=\\
&=\frac{(2n-1)R-x}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{1}{s^{3/2}}\exp\Big(\frac{-\big((2n-1)R-x\big)^2}{4s}\Big)\times\\
&\qquad\times\exp\Big(-\frac{s\beta}{\lambda h}\Big)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-s)^n}{\bar{a}^n n!}L^{-1}\big[p^{\alpha n-1}\big]ds=\\
&=\frac{(2n-1)R-x}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{1}{s^{3/2}}\exp\Big(\frac{-\big((2n-1)R-x\big)^2}{4s}\Big)\times\\
&\qquad\times\exp\Big(-\frac{s\beta}{\lambda h}\Big)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-s)^n t^{-\alpha n}}{\bar{a}^n n!\Gamma(-\alpha n+1)}ds=\\
&=\frac{(2n-1)R-x}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{1}{s^{3/2}}\exp\Big(\frac{-\big((2n-1)R-x\big)^2}{4s}\Big)\times\\
&\qquad\times\exp\Big(-\frac{s\beta}{\lambda h}\Big)W\Big(-\alpha,1,-\frac{st^{-\alpha}}{\bar{a}}\Big)ds.
\end{aligned}$$

Аналогичным образом найдем, что

$$L^{-1}\Big[\exp\big(-q(p)\big((2n-1)R+x\big)\big)\Big] =$$
$$= \frac{(2n-1)R+x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{s^{3/2}} \exp\left(\frac{-\big((2n-1)R+x\big)^2}{4s}\right) \times$$
$$\times \exp\left(-\frac{s\beta}{\lambda h}\right) W\left(-\alpha, 1, -\frac{st^{-\alpha}}{\bar{a}}\right) ds.$$

Подставляя полученные выражения в (13), получаем окончательный вид функции $T(x,\tau)$. □

5. Выводы. В работе исследована начально-краевая задача для уравнения теплопроводности с дробной производной Капуто порядка $\alpha \in (0,1]$ в ограниченной области, учитывающая теплообмен с внешней средой через боковую поверхность по закону Ньютона. Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Построена математическая модель процесса теплопереноса, включающая эффекты памяти через дробную производную Капуто и учитывающая теплоотдачу через боковую поверхность в виде отрицательного источника тепла. Доказана корректность поставленной задачи — получена априорная оценка решения, устанавливающая его устойчивость по начальным данным и граничным условиям в соответствующих функциональных пространствах.
2. Операционным методом с использованием преобразования Лапласа получено аналитическое решение задачи для предельного случая идеального теплового контакта ($\beta/\lambda \to \infty$). Решение выражается через специальные функции (функции Райта) и позволяет исследовать особенности формирования температурных полей в средах с памятью.

Перспективными направлениями дальнейших исследований являются построение решения для произвольных значений отношения β/λ, проведение вычислительных экспериментов по анализу влияния дробного параметра α на динамику температурного поля, а также обобщение результатов на случай анизотропных сред и нелинейных задач.

Полученные результаты открывают возможности для разработки новых эффективных методов анализа краевых задач дробного порядка с учетом сложных граничных условий.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Работа выполнена без привлечения финансирования.

Библиографический список

1. Oldham K. B., Spanier J. *The Fractional Calculus: Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order* / Mathematics in Science and Engineering. vol. 111. N.Y.: Academic Press, 1974. xiii+234 pp. DOI: https://doi.org/10.1016/s0076-5392(09)x6012-1.

2. Miller K. S., Ross B. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations.* N.Y.: Wiley, 1993. xiii+366 pp.
3. Podlubny I. *Fractional Differential Equations. An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications* / Mathematics in Science and Engineering. vol. 198. San Diego, CA: Academic Press, 1999. xxiv+340 pp. EDN: YYTYZD.
4. Учайкин В. В. *Метод дробных производных.* Ульяновск: Артишок, 2008. 512 с. EDN: QJVANP.
5. Тарасов В. Е. Дробные интегро-дифференциальные уравнения для электромагнитных волн в диэлектрических средах // *ТМФ*, 2009. Т. 158, № 3. С. 419–424. EDN: RLRQKD. DOI: https://doi.org/10.4213/tmf6324.
6. Hristov J. The fading memory formalism with Mittag–Leffler-type kernels as a generator of non-local operators // *Appl. Sci.*, 2023. vol. 13, no. 5, 3065. DOI: https://doi.org/10.3390/app13053065.
7. Жмакин А. И. Теплопроводность за пределами закона Фурье // *ЖТФ*, 2021. Т. 91, № 1. С. 5–25. EDN: CEWAFW. DOI: https://doi.org/10.21883/jtf.2021.01.50267.207-20.
8. Бейбалаев В. Д., Аливердиев А. А., Магомедов Р. А., Мейланов Р. Р., Ахмедов Э. Н. Моделирование процессов промерзания одномерным уравнением теплопроводности с операторами дробного дифференцирования // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2017. Т. 21, № 2. С. 376–387. EDN: ZHJLST. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1492.
9. Бейбалаев В. Д., Ибавов Т. И., Аливердиев А. А. Об одной краевой задаче для нестационарного уравнения теплопроводности, включающей эффекты памяти через производную дробного порядка Капуто / *Математическое моделирование и краевые задачи*: Матер. XII Всерос. науч. конф. с междунар. участием (г. Самара, 17–19 сентября 2024 г.), 2024. С. 199–201.
10. Beybalaev V. D., Aliverdiev A. A., Hristov J. Transient heat conduction in a semi-infinite domain with a memory effect: Analytical solutions with a Robin boundary condition // *Fractal Fract.*, 2023. vol. 7, no. 10, 770. EDN: SDKRZX. DOI: https://doi.org/10.3390/fractalfract7100770.
11. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
12. Duffy D. G. *Transform Methods for Solving Partial Differential Equations.* Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC, 2004. xvii+708 pp.
13. Алиханов А. А. Априорные оценки решений краевых задач для уравнений дробного порядка // *Дифф. уравн.*, 2010. Т. 46, № 5. С. 658–664. EDN: MSQVJX.
14. Псху А. В. *Уравнения в частных производных дробного порядка.* М.: Наука, 2005. 199 с. EDN: QJPLZX.
15. Мамчуев М. О. *Краевые задачи для уравнений и систем уравнений с частными производными дробного порядка.* Нальчик: КБНЦ РАН, 2013. 200 с. EDN: RPBPVP.
16. Лыков А. В. *Теория теплопроводности.* М.: Высш. шк., 1967. 600 с.
17. Hristov J. Linear viscoelastic responses and constitutive equations in terms of fractional operators with non-singular kernels // *Eur. Phys. J. Plus*, 2019. vol. 134, 283. DOI: https://doi.org/10.1140/epjp/i2019-12697-7.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2025, vol. 29, no. 3, pp. 554–565
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu2155

MSC: 35R11, 35K05

Initial-boundary value problem for nonstationary heat conduction equation in a bounded domain with non-insulated lateral surface

V. D. Beybalaev[1,2]**, *T. I. Ibavov***[1]

[1] Daghestan State University,
43a, Magomet Gadzhiev st., Makhachkala, 367000, Russian Federation.
[2] Institute of Geothermal Problems and Renewable Energy Sources,
Branch of the Joint Institute for High Temperatures
of the Russian Academy of Sciences in Makhachkala,
39a, Imam Shamil Avenue, Makhachkala 367030, Russian Federation.

Abstract

This study investigates an initial-boundary value problem for a bounded domain in thermal interaction with an external medium, incorporating memory effects through the Caputo time-fractional derivative. Heat transfer through the lateral surface is modeled as a negative heat source in the governing differential equation. An a priori estimate for the solution is established. The solution is derived by using an operational method based on the Laplace transform in time.

Keywords: memory effect, Laplace transform, nonstationary heat equationt.

Received: 17th February, 2025 / Revised: 10th June, 2025 /
Accepted: 17th June, 2025 / First online: 7th August, 2025

Competing interests. We declare no conflicts of interest regarding the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. All authors contributed to the conception and design of the article, and to manuscript preparation. The authors are responsible

---

Differential Equations and Mathematical Physics
Short Communication

Please cite this article in press as:
B e y b a l a e v V. D., I b a v o v T. I. Initial-boundary value problem for nonstationary heat conduction equation in a bounded domain with non-insulated lateral surface, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2025, vol. 29, no. 3, pp. 554–565. EDN: KNQSLO. DOI: 10.14498/vsgtu2155 (In Russian).

Authors' Details:

Vetlugin D. Beybalaev https://orcid.org/0000-0002-4881-9264
Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Applied Mathematics[1]; Senior Researcher; Lab. of Geothermomechanics[2]; e-mail: kaspij_03@mail.rul.ru

Temirlan I. Ibavov https://orcid.org/0009-0006-8743-4304
Senior Lecturer; Dept. of Discrete Mathematics and Computer Science[1];
e-mail: ibavov94@mail.ru

for submitting the final manuscript for publication. The final version of the manuscript was approved by all authors.

Funding. This study received no external funding.

References

1. Oldham K. B., Spanier J. *The Fractional Calculus: Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*, Mathematics in Science and Engineering, vol. 111. N.Y., Academic Press, 1974, xiii+234 pp. DOI: https://doi.org/10.1016/s0076-5392(09)x6012-1.
2. Miller K. S., Ross B. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. N.Y., Wiley, 1993, xiii+366 pp.
3. Podlubny I. *Fractional Differential Equations. An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications*, Mathematics in Science and Engineering, vol. 198. San Diego, CA, Academic Press, 1999, xxiv+340 pp. EDN: YYTYZD.
4. Uchaykin V. V. *Metod drobnykh proizvodnykh* [Method of Fractional Derivatives]. Ul'yanovsk, Artishok, 2008, 512 pp. (In Russian). EDN: QJVANP.
5. Tarasov V. E. Fractional integro-differential equations for electromagnetic waves in dielectric media, *Theoret. Math. Phys.*, 2009, vol. 158, no. 3, pp. 355–359. EDN: LLPFCP. DOI: https://doi.org/10.1007/s11232-009-0029-z.
6. Hristov J. The fading memory formalism with Mittag–Leffler-type kernels as a generator of non-local operators, *Appl. Sci.*, 2023, vol. 13, no. 5, 3065. DOI: https://doi.org/10.3390/app13053065.
7. Zhmakin A. I. Heat conduction beyond the Fourier law, *Tech. Phys.*, 2021, vol. 66, no. 1, pp. 1–22. EDN: HWWCAD. DOI: https://doi.org/10.1134/S1063784221010242.
8. Beybalaev V. D., Aliverdiev A. A., Magomedov R. A., Meilanov R. R., Akhmedov E. N. Modeling of freezing processes by an one-dimensional thermal conductivity equation with fractional differentiation operators, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 2, pp. 376–387 (In Russian). EDN: ZHJLST. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1492.
9. Beybalaev V. D., Ibavov T. I., Aliverdiev A. A. On a boundary value problem for non-stationary heat equation with memory effects via Caputo fractional derivative, In: *Mathematical Modeling and Boundary Value Problems*, Proc. XII All-Russ. Sci. Conf. with Int. Part. (Samara, September 17–19, 2024), 2024, pp. 199–201 (In Russian).
10. Beybalaev V. D., Aliverdiev A. A., Hristov J. Transient heat conduction in a semi-infinite domain with a memory effect: Analytical solutions with a Robin boundary condition, *Fractal Fract.*, 2023, vol. 7, no. 10, 770. EDN: SDKRZX. DOI: https://doi.org/10.3390/fractalfract7100770.
11. Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. *Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya* [Integrals and Derivatives of Fractional Order and Some of Their Applications]. Minsk, Nauka i Tekhnika, 1987, 688 pp. (In Russian)
12. Duffy D. G. *Transform Methods for Solving Partial Differential Equations*. Boca Raton, FL, Chapman & Hall/CRC, 2004, xvii+708 pp.
13. Alikhanov A. A. A priori estimates for solutions of boundary value problems for fractional-order equations, *Differ. Equ.*, 2010, vol. 46, no. 5, pp. 660–666. EDN: MXDCPJ. DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266110050058.
14. Pskhu A. V. *Uravneniya v chastnykh proizvodnykh drobnogo poryadka* [Partial Differential Equations of Fractional Order]. Moscow, Nauka, 2005, 199 pp. (In Russian). EDN: QJPLZX.
15. Mamchuev M. O. *Kraevyye zadachi dlya uravneniy i sistem uravneniy s chastnymi proizvodnymi drobnogo poryadka* [Boundary Value Problems for Equations and Systems of Partial Differential Equations of Fractional Order]. Nal'chik, KBSC RAS, 2013, 200 pp. (In Russian). EDN: RPBPVP.

16. Lykov A. V. *Teoriya teploprovodnosti* [Theory of Heat Conduction]. Moscow, Vyssh. shk., 1967, 600 pp. (In Russian)
17. Hristov J. Linear viscoelastic responses and constitutive equations in terms of fractional operators with non-singular kernels, *Eur. Phys. J. Plus*, 2019, vol. 134, 283. DOI: https://doi.org/10.1140/epjp/i2019-12697-7.