



УДК 517.958:[531.391+521.93+521.172]

Моделирование чандлеровского и годичного колебаний земного полюса с учетом прецессии лунной орбиты

С. С. Крылов, З. А. Мьо, В. В. Перепелкин

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)
Россия, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, 4.

Аннотация

Исследовано влияние прецессии лунной орбиты (с периодом 18.6 года) на параметры основных составляющих движения земного полюса — чандлеровского и годичного колебаний. Разработана модифицированная модель движения полюса, включающая дополнительные слагаемые, учитывающие долгопериодическое лунное возмущение. Численные эксперименты демонстрируют, что учет данных возмущений в автономной модели без коррекции параметров позволяет повысить точность определения положения полюса в среднем на 5 см.

Ключевые слова: моделирование вращения Земли, движение полюса, лунное возмущение, чандлеровское колебание.

Получение: 1 марта 2025 г. / Исправление: 27 мая 2025 г. /
Принятие: 4 июня 2025 г. / Публикация онлайн: 14 июля 2025 г.

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ Краткое сообщение

© Коллектив авторов, 2025

© СамГТУ, 2025 (составление, дизайн, макет)

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Крылов С. С., Мьо З. А., Перепелкин В. В. Моделирование чандлеровского и годичного колебаний земного полюса с учетом прецессии лунной орбиты // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2025. Т. 29, № 3. С. 591–602. EDN: SPHAXK. DOI: [10.14498/vsgtu2168](https://doi.org/10.14498/vsgtu2168).

Сведения об авторах

Сергей Сергеевич Крылов  <https://orcid.org/0000-0003-3267-6411>

кандидат физико-математических наук, доцент; заведующий кафедрой; каф. 806 вычислительной математики и программирования; e-mail: compgra@yandex.ru

Зо Аунг Мьо  <https://orcid.org/0009-0009-8557-5965>

аспирант; e-mail: myozawaung53@gmail.com

Вадим Владимирович Перепелкин  <https://orcid.org/0000-0002-9061-4991>

доктор физико-математических наук; профессор; каф. 802 мехатроники и теоретической механики; e-mail: vadim802@gmail.com

Методы моделирования движения полюса. Задача моделирования движения земных полюсов (под которыми понимаются точки пересечения мгновенной оси вращения Земли с ее поверхностью) представляет значительный научный интерес в области теоретической и небесной механики, геофизики и астрономии. Исследование движения северного полюса имеет как фундаментальное значение для решения задач геофизики и небесной механики, так и практическую важность. Координаты земного полюса используются, прежде всего, для вычисления матрицы перехода между земной и небесной системами координат [1, 2].

Данный переход в упрощенном виде реализуется посредством композиции пяти поворотов на угловые величины — параметры ориентации Земли. Два из этих поворотов осуществляются вокруг экваториальных осей (оси, пересекающей гринвичский меридиан, и ортогональной ей оси) на координаты земного полюса, традиционно измеряемые в угловых миллисекундах. Особую актуальность приобретает проблема прогнозирования параметров ориентации Земли, включающая задачу предсказания движения земного полюса.

Для решения указанной задачи применяются различные методы математического моделирования. Сложный процесс колебаний полюса характеризуется составляющими с существенно различающимися частотными и амплитудными характеристиками. Математическое описание колебаний земного полюса осуществляется как с помощью детерминированных, так и стохастических или комбинированных подходов [2–17].

Детерминированные модели движения земного полюса основываются, как правило, на теоретических исследованиях Л. Эйлера, определившего 305-суточный период свободной нутации для недеформируемой Земли, и модели С. Чандлера (1891 г.), выявившего по результатам многочисленных наблюдений вариации широт обсерваторий с двумя периодическими компонентами движения полюса — 365 и 430–440 суток [3, 4].

Расхождение между чандлеровским периодом и периодом прецессии Эйлера (305 суток для недеформируемой фигуры Земли) исследовалось в работах С. Ньюкома, А. Пуанкаре, Г. Джеффриса, А. Лява, У. Манка, Г. Макдональда, Ф. А. Слудского, М. С. Молоденского (см. обзоры в [3, 4]). В исторической традиции движение земного полюса с периодом 430–440 суток принято называть свободной нутацией деформируемой Земли, или чандлеровскими колебаниями полюса.

Для описания свободной нутации деформируемой Земли также применяются методы аналитической механики движения деформируемого твердого тела относительно центра масс в переменных Андуайе, или в переменных «действие – угол» [5, 6].

Обзор ранних исследований влияния аддитивных стохастических возмущений, зависящих от времени, на колебания земного полюса представлен в [7]. В работе [8] содержится детальный анализ построения комбинированных стохастических моделей движения земного полюса. В частности, в [9, 10] на основе детерминированной модели движения земного полюса и данных Международной службы вращения Земли¹ (МСВЗ) разработана комбинированная небесномеханическая стохастическая корреляционная модель движения Земли относительно центра масс.

¹<https://www.iers.org/>

Сложная динамика гидросферы, включающая мелко- и крупномасштабные движения, а также широкий спектр турбулентных флуктуаций, свидетельствует о нелинейном характере момента сил диссипации. В [11] исследовано влияние нелинейных флуктуационно-диссипативных моментов сил на устойчивость режимов чандлеровских колебаний.

Однако в ранее разработанных моделях как период, так и амплитуда обоих колебаний (чандлеровского и годичного) предполагаются постоянными, несмотря на их известную изменчивость в определенных пределах [12, 13]. Современная проблема переменности параметров основных компонент колебаний земного полюса остается актуальной и недостаточно изученной [14].

С практической точки зрения решение данной задачи возможно по двум направлениям: повышение точности прогноза модели и увеличение ее автономности. Последнее связано с необходимостью увеличения времени автономной работы, например, при функционировании на борту космического аппарата [15].

Настоящая работа посвящена уточнению модели, функционирующей в автономном режиме без коррекции параметров. Повышение точности модели движения полюса в данном случае может быть достигнуто либо путем уточнения средних значений параметров модели, что, как показывают эксперименты, не дает значительного эффекта, либо за счет учета новых физических или эмпирических закономерностей.

1. Математическая модель и перспективы ее развития. Как известно, простейшая модель движения земного полюса описывает двухчастотный колебательный процесс [16, 17]:

$$x_p = c_x + a_{ch} \cos w_{ch} + a_h \cos w_h, \quad y_p = c_y + a_{ch} \sin w_{ch} + a_h \sin w_h. \quad (1)$$

Здесь c_x, c_y — координаты тренда, содержащие колебания с периодами свыше 6.45 лет; a_{ch}, a_h и w_{ch}, w_h — амплитуды и фазы чандлеровского и годичного колебаний соответственно.

При этом модель является двухчастотной в приближенном смысле — когда амплитуды и фазы основных составляющих постоянны. Применение такой двухчастотной модели имеет ограничения как по точности прогноза, так и по времени ее автономного использования. Как показано в [14, 18], на основании анализа длительных рядов наблюдений, амплитуды и фазы основных составляющих можно считать постоянными лишь на относительно небольших временных интервалах (до 20 лет). На таких интервалах параметры могут рассматриваться как квазипостоянные, определяемые на промежутках аппроксимации движения полюса, непосредственно предшествующих интервалам прогнозирования. В этом случае значения амплитуд и фаз основных составляющих колебаний полюса следует интерпретировать как средние величины, поскольку помимо медленных изменений на временных масштабах 40 лет и более эти параметры подвержены также незначительным вариациям с меньшими периодами.

Как было установлено в [14], в движении полюса можно выявить влияние долгопериодического лунного воздействия, а именно — связанного с изменением угла наклона плоскости лунной орбиты к земному экватору, происходящим с периодом 18.6 года. Колебания угла наклона лунной орбиты к экватору Земли обусловлены ее прецессией вокруг нормали к плоскости эклиптики.

Для повышения точности модели в автономном режиме предлагается учесть указанное влияние в уравнениях движения полюса, оценить значения параметров дополнительных слагаемых расширенной модели и провести численный эксперимент по оценке точности такой модели.

2. Вариации параметров движения земного полюса с частотой прецессии орбиты Луны. В работе [14] предложено преобразование координат земного полюса, позволяющее выявить синфазность вариаций его движения с прецессией лунной орбиты. Переход от исходной земной системы координат (x_p, y_p) к новой системе (ξ_p, η_p) , в которой полюс совершает колебания, синфазные с прецессионным движением лунной орбиты, в матричной форме описывается выражением

$$\begin{pmatrix} \xi_p \\ \eta_p \end{pmatrix} = \Pi(w_2 - w_1) \left[\Pi(w_1) \begin{pmatrix} x_p - c_x \\ y_p - c_y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_0 \\ 0 \end{pmatrix} \right], \quad (2)$$

$$w_2 = \begin{cases} w_h, & \text{если } a_h < a_{ch}, \\ w_{ch}, & \text{если } a_{ch} < a_h; \end{cases} \quad w_1 = \begin{cases} w_{ch}, & \text{если } a_h < a_{ch}, \\ w_h, & \text{если } a_{ch} < a_h; \end{cases}$$

$$\dot{w}_h = \nu\omega_*, \quad \dot{w}_{ch} = N\omega_*.$$

Здесь $\Pi(\alpha)$ — матрица плоского поворота на угол α ; a_0 — среднее значение амплитуды колебаний полюса при его движении вокруг «средней точки» за 6-летний цикл (без учета трендовой составляющей); c_x, c_y определяют положение «средней точки» полюса и содержат константы, вековые слагаемые и вариации с периодами более шести лет; a_{ch}, a_h — амплитуды чандлеровской и годичной гармоник с фазами w_{ch}, w_h соответственно; $N \cong 0.843$, $\nu = 1$ — чандлеровская и годичная частоты, измеряемые в циклах/год; ω_* — среднее движение барицентра системы «Земля — Луна» по орбите вокруг Солнца; $\dot{w}_2 - \dot{w}_1 = \pm\nu_T\omega_*$ — частота шестилетней цикличности движения полюса.

Отметим, что преобразование (2) представляет собой композицию преобразований «поворот» и «сдвиг», определяемую исключительно средними параметрами чандлеровской и годичной компонент. Как показано в [14], в системе координат (ξ_p, η_p) полюс совершает колебания, синфазные с колебаниями угла наклона плоскости лунной орбиты к земному экватору. При этом колебания координаты ξ_p синфазны с колебаниями угла наклона плоскости орбиты Луны к земному экватору, а фаза колебаний координаты η_p сдвинута на $\pi/2$.

В настоящей работе ставится задача учета выявленных ранее вариаций параметров колебательного движения земного полюса с периодом 18.6 года (соответствующим периоду прецессии лунной орбиты и устанавливаемых посредством преобразования (2)) в модели вида (1). Кроме того, требуется оценить точность полученной расширенной модели с учетом дополнительных слагаемых, обусловленных долгопериодическим влиянием Луны.

3. Вариации амплитуд и фаз чандлеровской и годичной компонент в колебательном процессе земного полюса. Примем следующие допущения: положим $\dot{a}_{ch} = 0$, $\dot{a}_h = 0$, $w_{ch} = Nt + \alpha_{ch}$, $w_h = \nu t + \alpha_h$, где α_{ch}, α_h — постоянные фазы. Таким образом, амплитуды a_{ch}, a_h будем считать квазипостоянными, а фазы w_{ch}, w_h — линейными функциями времени. Данные упрощения означают, что колебательный процесс земного полюса разделяется на тренд, чандлеровское и годичное колебания с квазипостоянными

амплитудами и линейными фазами, при этом менее значимые гармоники исключаются из рассмотрения.

Подставляя (1) в (2), преобразуем компоненты вектора

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \Pi(w_1) \begin{pmatrix} x_p - c_x \\ y_p - c_y \end{pmatrix}$$

к следующему виду:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{a_h + a_{ch}}{2} + \operatorname{sgn}\left(\frac{a_h}{a_{ch}}\right) \frac{a_h - a_{ch}}{2} + \\ &\quad + \left[\frac{a_h + a_{ch}}{2} - \operatorname{sgn}\left(\frac{a_h}{a_{ch}}\right) \frac{a_h - a_{ch}}{2} \right] \cos(w_h - w_{ch}), \\ y_1 &= \left[\frac{a_h - a_{ch}}{2} - \operatorname{sgn}\left(\frac{a_h}{a_{ch}}\right) \frac{a_h + a_{ch}}{2} \right] \sin(w_h - w_{ch}). \end{aligned}$$

Приняв

$$a_0 = \frac{a_h + a_{ch}}{2} + \operatorname{sgn}\left(\frac{a_h}{a_{ch}}\right) \frac{a_h - a_{ch}}{2},$$

из (2) получаем

$$\begin{pmatrix} \xi_p \\ \eta_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_h + a_{ch}}{2} - \operatorname{sgn}\left(\frac{a_h}{a_{ch}}\right) \frac{a_h - a_{ch}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Из (3) следует, что $\xi_p = a_h$ при $a_h < a_{ch}$ и $\xi_p = a_{ch}$ при $a_h > a_{ch}$.

Отметим, что для построения ряда ξ_p по данным x_p, y_p не требуется разделения колебаний на чандлеровскую и годичную компоненты, что также продемонстрировано в работе [14].

На основании приведенных выкладок можно построить преобразование вида (2) следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \xi'_p \\ \eta'_p \end{pmatrix} = \Pi(w_1 - w_2) \left[\Pi(w_2) \begin{pmatrix} x_p - c_x \\ y_p - c_y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_0 \\ 0 \end{pmatrix} \right], \quad (4)$$

при этом $\xi'_p = a_{ch}$ при $a_h < a_{ch}$ и $\xi'_p = a_h$ при $a_h > a_{ch}$.

Используя данные ряда C01 МСВЗ² о движении земного полюса за период 1900–2020 гг., построим ряд $\xi_p + \xi'_p$ с помощью (2) и (4). На рис. 1 представлен амплитудный спектр этого ряда. Значительная продолжительность интервала наблюдений позволяет выделить низкочастотные гармоники в окрестности рассматриваемой частоты. Наличие в спектре гармоники с периодом 18.6 года свидетельствует о том, что по крайней мере одна из амплитуд a_{ch}, a_h чандлеровской и годичной компонент содержит гармонику с периодом 18.6 года. Для точного установления этого факта необходимо выделить чандлеровское и годичное колебания в движении полюса.

Разделим спектр колебаний земного полюса на области. Для чандлеровской компоненты по каждой из координат выделим окрестность частоты 0.843 циклов/год с границами $0.843 \pm 0.157/2$ циклов/год. Аналогично, для годичной компоненты определим окрестность частоты 1 цикл/год с границами

²<https://datacenter.iers.org/products/eop/long-term/c01/>

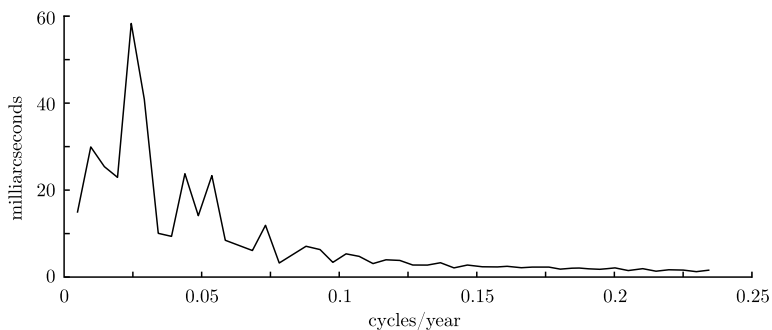


Рис. 1. Амплитудный спектр ряда $\xi_p + \xi'_p$
[Figure 1. The amplitude spectrum of the series $\xi_p + \xi'_p$]

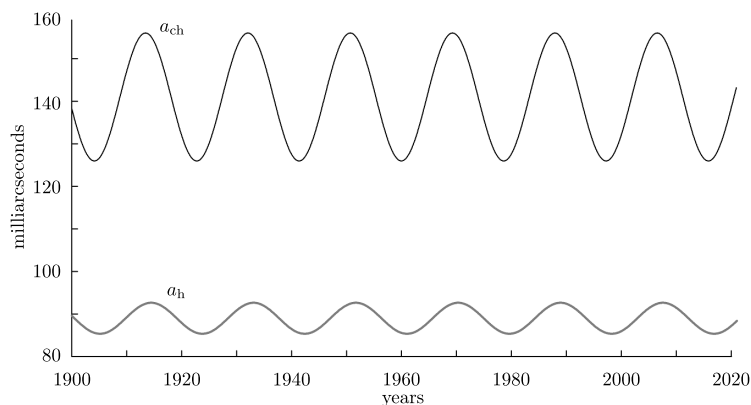


Рис. 2. Вариации амплитуд чандлеровской и годичной компонент с периодом 18.6 года прецессии лунной орбиты (в угловых миллисекундах); по оси абсцисс — время (годы)
[Figure 2. Variations in the amplitudes of the Chandler and annual wobbles with the 18.6-year lunar orbital precession period (in milliarcseconds); the x-axis is time (years)]

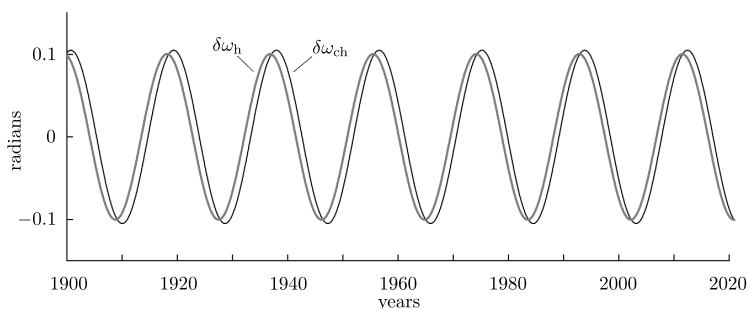


Рис. 3. Вариации фаз чандлеровской и годичной компонент с периодом 18.6 года прецессии лунной орбиты (в радианах); по оси абсцисс — время (годы)
[Figure 3. Variations in the phases of the Chandler and annual wobbles with the 18.6-year lunar orbital precession period (in radians); the x-axis is time (years)]

$1 \pm 0.157/2$ циклов/год. Совокупность чандлеровской и годичной компонент будет содержать все колебания из спектрального интервала $0.765 \div 1.0785$ циклов/год. Хотя такое разделение носит формальный характер, оно оправдано тем, что дополнительные гармоники, вызывающие 18-летнюю модуляцию основных компонент с частотой прецессии лунной орбиты, попадают в соответствующие области.

Для каждой компоненты можно построить ряды их амплитуд a_{ch} , a_h и вариаций фаз δw_{ch} , δw_h (в отличие от рассмотренного выше упрощенного случая линейных фаз, наблюдаемые фазы подвержены изменениям). Применение различных методов выделения гармоник приводит к согласующимся оценкам фаз и относительно небольшому разбросу в оценке средних амплитуд. Это позволяет аппроксимировать рассматриваемые 18-летние колебания параметров чандлеровской и годичной компонент стационарными гармониками, которые можно интерпретировать как гармоники со средними амплитудами.

На рис. 2 и 3 представлены стационарные гармоники со средними амплитудами, выделенные из спектров указанных параметров. Вариации амплитуд a_{ch} , a_h чандлеровской и годичной компонент синфазны, но различаются по величине, тогда как вариации полярных углов w_{ch} , w_h совпадают как по фазе, так и по амплитуде.

4. Численное моделирование колебаний земного полюса с учетом вариаций параметров чандлеровской и годичной компонент. Исследуем влияние учета обнаруженных гармоник на точность аппроксимации траектории полюса, уделяя особое внимание оценке точности экстраполяции.

Для этого необходимо аппроксимировать 18-летнюю цикличность параметров a_{ch} , w_{ch} , a_h , w_h гармониками $\cos \Omega$ и $-\sin \Omega$, где выражение для Ω имеет вид [1, р. 67]

$$\Omega \approx 125.04455501^\circ - 6962890.5431''t + 7.4722''t^2.$$

Здесь t — время в столетиях, отсчитываемое от 12 ч. 1 января 2000 года. После определения амплитуд этих гармоник выполним обратное преобразование для получения дополнительных слагаемых к модели (1) движения земного полюса:

$$\begin{pmatrix} \Delta x_{ch} \\ \Delta y_{ch} \end{pmatrix} = \Pi^{-1}(w_{ch}) \begin{pmatrix} a_{ch} \cos \delta w_{ch} - a_{ch}^0 \\ a_{ch} \sin \delta w_{ch} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \Delta x_h \\ \Delta y_h \end{pmatrix} = \Pi^{-1}(w_h) \begin{pmatrix} a_h \cos \delta w_h - a_h^0 \\ a_h \sin \delta w_h \end{pmatrix},$$

где a_{ch}^0 , a_h^0 — средние значения амплитуд чандлеровской и годичной компонент соответственно. Их оценки могут быть получены, например, методом наименьших квадратов при аппроксимации (1) на длительном интервале наблюдений (с 1900 по 2020 гг.).

Модель колебаний полюса с учетом дополнительных слагаемых представляется в виде

$$\tilde{x}_p = x_p + \Delta x_{ch} + \Delta x_h, \quad \tilde{y}_p = y_p + \Delta y_{ch} + \Delta y_h. \quad (5)$$

Поскольку в результате обратного преобразования 18-летние колебания трансформируются в колебания с частотами, близкими к чандлеровской и годичной, наибольший эффект от их учета проявляется в автономной модели без коррекции параметров или при долгосрочном прогнозировании движения полюса.

Сравним точность экстраполяций моделей (1) и (5) с дополнительными слагаемыми. Верификация модели проводилась в автономном режиме без коррекции параметров.

В численном эксперименте параметры чандлеровской и годичной компонент определялись на заранее выбранном тестовом интервале с использованием двухчастотной модели (1).

Была проведена серия расчетов со сдвигом тестового интервала по временной шкале. Для определения параметров двухчастотной модели использовался фиксированный тестовый интервал длительностью 15 лет. Расчеты выполнялись итерационно со сдвигом начала тестового интервала с 1900 года до 2005 года с шагом 2 года. Как показали результаты, изменение длительности тестового интервала и увеличение шага не приводят к качественным различиям в результатах.

При оценке точности модели следует учитывать, что до 1962 года точность измерений была существенно ниже. Поэтому экстраполяции строились начиная с 1962 года. При этом низкая точность измерений до 1962 года не является критическим фактором при выборе тестового интервала, поскольку основной интерес представляет поведение среднеквадратического отклонения (СКО) экстраполяций при значительном разбросе возможных значений параметров чандлеровской и годичной компонент.

В численном эксперименте рассчитывались СКО двухлетних экстраполяций. Двухлетний интервал экстраполяции сдвигался с шагом 1 год от 1962 года до 2018 года. Каждому тестовому интервалу соответствовало среднее значение СКО двухлетних экстраполяций за указанный период. На рис. 4 представлена разность δ_σ средних СКО экстраполяций для моделей (1) и (5). Каждое значение среднего СКО отнесено к началу соответствующего тестового интервала.

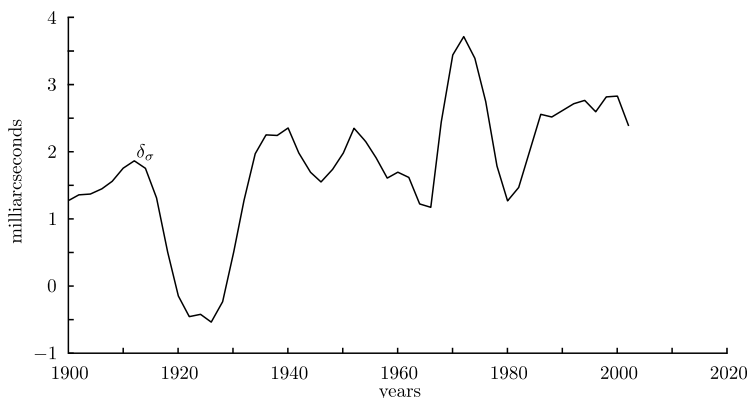


Рис. 4. Разность δ_σ средних квадратических отклонений экстраполяций для моделей (1) и (5) (в угловых миллисекундах); по оси абсцисс — время (годы)

[Figure 4. The difference δ_σ between the root-mean-square errors of extrapolations using models (1) and (5) (in milliarcseconds); the x-axis is time (years)]

Для тестовых интервалов после 1920 года, когда произошло изменение фазы чандлеровского колебания, точность определения положения полюса с помощью расширенной модели (5) повышается в среднем на 5 см при учете 18-летней цикличности.

Заключение. Проведенные исследования демонстрируют наличие квазистационарного колебательного процесса с устойчивыми частотными и фазовыми характеристиками в чандлеровской и годичной составляющих движения земного полюса. Установлена однозначная связь данного процесса с прецессионным движением лунной орбиты. Численный анализ подтверждает полученные результаты, показывая повышение точности аппроксимации траектории движения полюса в среднем на 5 см при учете выявленных закономерностей.

Конкурирующие интересы. У нас нет конфликта интересов в отношении авторства и публикации этой статьи.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. *IERS Conventions*: IERS Technical Note; no. 36 / eds. G. Petit, B. Luzum. Frankfurt am Main: Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie, 2010. 179 pp.
2. Жаров В. Е. *Сферическая астрономия*. Фрязино: Век-2, 2006. 480 с. EDN: [QJRJSZ](#).
3. Munk W. H., MacDonald G. J. F. *The Rotation of the Earth. A Geophysical Discussion* / Cambridge Monographs on Mechanics. Cambridge: Cambridge Univ., 2009. xix+323 pp.
4. Moritz H., Müller I. I. *Earth Rotation: Theory and Observation*. New York: Ungar, 1987. xx+617 pp.
5. Марков Ю. Г., Миняев И. С. Пространственный вариант задачи «деформируемая планета – спутник» в поле притягивающего центра // *Косм. исслед.*, 1994. Т. 32, № 6. С. 89–98.
6. Перепелкин В. В., Скоробогатых И. В., Мью З. А. Динамический анализ установившегося колебательного процесса Земного полюса // *Изв. РАН. МТТ*, 2021. № 5. С. 141–151. EDN: [RSUHG](#). DOI: <https://doi.org/10.31857/S0572329921050081>.
7. Arató M. *Linear Stochastic Systems with Constant Coefficients. A Statistical Approach* / Lecture Notes in Control and Information Sciences. vol. 45. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1982. ix+309 pp.
8. Марков Ю. Г., Рыхлова Л. В., Сеницын И. Н. Развитие методов построения моделей движения полюса Земли // *Астрон. ж.*, 2010. Т. 87, № 9. С. 935–944. EDN: [MUJYIV](#).
9. Марков Ю. Г., Сеницын И. Н. Стохастическая модель движения полюса деформируемой Земли // *ДАН*, 2002. Т. 385, № 2. С. 189–192. EDN: [JITOLY](#).
10. Марков Ю. Г., Сеницын И. Н. Влияние параметрических флуктуационно-диссипативных сил на движении полюса Земли // *ДАН*, 2004. Т. 395, № 1. С. 51–54. EDN: [OQODVV](#).
11. Марков Ю. Г., Сеницын И. Н. Нелинейные стохастические корреляционные модели движения полюса деформируемой Земли // *Астрон. ж.*, 2003. Т. 80, № 2. С. 186–192. EDN: [ONUULD](#).
12. Сидоренков Н. С. Природа амплитудной модуляции чандлеровского движения полюса // *Изв. Гл. астрон. observ. Пулково*, 2013. № 220. С. 143–148.
13. Сидоренков Н. С. Соизмеримости между частотами земных процессов и частотами системы Земля—Луна—Солнце // *Процессы в геосредах*, 2015. № 3. С. 88–99. EDN: [VDGXWT](#).

14. Перепелкин В. В., Рыхлова Л. В., Сое В. Я. О синфазности вариаций параметров движения земного полюса и прецессии орбиты Луны // *Астрон. ж.*, 2022. Т. 99, № 1. С. 75–87. EDN: **EHSYWI**. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0004629922020086>.
15. Марков Ю. Г., Михайлов М. В., Перепелкин В. В. [и др.] Анализ влияния различных возмущающих факторов на высокоточный прогноз орбит космических аппаратов // *Косм. исслед.*, 2016. Т. 54, № 2. С. 164–172. EDN: **VRXZIP**. DOI: <https://doi.org/10.7868/S0023420615060023>.
16. Акуленко Л. Д., Климов Д. М., Кумакшев С. А. Основные свойства и особенности движения Земли относительно центра масс // *ДАН*, 2014. Т. 458, № 5. С. 547–550. EDN: **SNWVYL**. DOI: <https://doi.org/10.7868/S0869565214290131>.
17. Акуленко Л. Д., Перепелкин В. В. Движение земного полюса при нестационарных возмущениях // *Изв. РАН. МТТ*, 2019. № 5. С. 142–149. EDN: **BKTVMR**. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0572329919050039>.
18. Акуленко Л. Д., Климов Д. М., Марков Ю. Г. [и др.] Численно-аналитическое моделирование возмущенных колебательных движений полюса Земли // *Изв. РАН. МТТ*, 2014. № 6. С. 105–119. EDN: **TEFOVB**.

MSC: 70F15, 70K40

Modeling Chandler and annual polar motion with account for lunar orbit precession

S. S. Krylov, Z. A. Myu, V. V. Perepelkin

Moscow Aviation Institute (National Research University),
4, Volokolamskoe Shosse, Moscow, 125993, Russian Federation.

Abstract

This study examines the effect of lunar orbit precession (18.6-year period) on the principal components of Earth's polar motion—the Chandler wobble and annual wobble. We develop an enhanced polar motion model incorporating additional terms to represent long-period lunar disturbances. Numerical simulations show that accounting for these perturbations in an autonomous, uncorrected model enhances polar position determination accuracy by approximately 5 cm on average.

Keywords: Earth rotation modeling, polar motion, lunar perturbation, Chandler wobble.

Received: 1st March, 2025 / Revised: 27th May, 2025 /

Accepted: 4th June, 2025 / First online: 14th July, 2025

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests regarding the authorship and publication of this paper.

Authors' contributions and responsibilities. All authors participated in the conceptualization of the study and manuscript preparation. The authors take full responsibility for submitting the final manuscript. The final version of the manuscript has been approved by all authors.

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes Short Communication

© The Author(s), 2025

© Samara State Technical University, 2025 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Krylov S. S., Myu Z. A., Perepelkin V. V. Modeling Chandler and annual polar motion with account for lunar orbit precession, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2025, vol. 29, no. 3, pp. 591–602. EDN: SPHAXK. DOI: [10.14498/vsgtu2168](https://doi.org/10.14498/vsgtu2168) (In Russian).

Authors' Details:

Sergey S. Krylov  <https://orcid.org/0000-0003-3267-6411>

Cand. Phys. & Math. Sci., Associate Professor; Head of Department; Dept. of Computational Mathematics and Programming; e-mail: compgra@yandex.ru

Zo Aung Myo  <https://orcid.org/0009-0009-8557-5965>

Postgraduate Student; e-mail: myozawaung53@gmail.com

Vadim V. Perepelkin  <https://orcid.org/0000-0002-9061-4991>

Dr. Phys. & Math. Sci.; Professor; Dept. of Mechatronics and Theoretical Mechanics; e-mail: vadim802@gmail.com

Funding. This research received no specific grant from any funding agency in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

References

1. *IERS Conventions*, IERS Technical Note; no. 36, eds. G. Petit, B. Luzum. Frankfurt am Main, Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie, 2010, 179 pp.
2. Zharov V. E. *Sfericheskaya astronomiya* [Spherical Astronomy]. Fryazino, Vek-2, 2006, 480 pp. (In Russian). EDN: [QJRJSZ](#).
3. Munk W. H., MacDonald G. J. F. *The Rotation of the Earth. A Geophysical Discussion*, Cambridge Monographs on Mechanics. Cambridge, Cambridge Univ., 2009, xix+323 pp.
4. Moritz H., Müller I. I. *Earth Rotation: Theory and Observation*. New York, Ungar, 1987, xx+617 pp.
5. Markov Yu. G., Minyaev I. S. Spatial version of the “deformable planet – satellite” problem in the field of an attracting center, *Kosm. Issled.*, 1994, vol. 32, no. 6, pp. 89–98 (In Russian).
6. Perepelkin V. V., Skorobogatykh I. V., Myu Z. A. Dynamic analysis of the steady state oscillations of the Earth’s pole, *Mech. Solids*, 2021, vol. 56, no. 5, pp. 727–736. EDN: [MUWZNU](#). DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654421050162>.
7. Arató M. *Linear Stochastic Systems with Constant Coefficients. A Statistical Approach*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, vol. 45. Berlin, Heidelberg, New York, Springer, 1982, ix+309 pp.
8. Markov Yu. G., Rykhlova L. V., Sinitsyn I. N. Some improved methods for modeling the Earth’s polar motion, *Astron. Rep.*, 2010, vol. 54, no. 9, pp. 861–870. EDN: [MXPCTX](#). DOI: <https://doi.org/10.1134/S1063772910090106>.
9. Markov Yu. G., Sinitsyn I. N. Stochastic model of the motion of the deformable-earth pole, *Dokl. Phys.*, 2002, vol. 47, no. 7, pp. 531–534. EDN: [LHFMOZ](#). DOI: <https://doi.org/10.1134/1.1499194>.
10. Markov Yu. G., Sinitsyn I. N. Effect of parametric dissipative fluctuation forces on the motion of the Earth’s pole, *Dokl. Phys.*, 2004, vol. 49, no. 3, pp. 179–182. EDN: [LILRBB](#). DOI: <https://doi.org/10.1134/1.1710685>.
11. Markov Yu. G., Sinitsyn I. N. Nonlinear stochastic correlation models for the pole’s motion of a deformable earth, *Astron. Rep.*, 2003, vol. 47, no. 2, pp. 161–167. EDN: [KENVRX](#). DOI: <https://doi.org/10.1134/1.1554519>.
12. Sidorenkov N. S. Nature of the amplitude modulation of Chandler polar motion, *Izv. Gl. Astron. Observ. Pulkovo*, 2013, no. 220, pp. 143–148 (In Russian).
13. Sidorenkov N. S. Synchronization of atmospheric processes with frequencies of the Earth–Moon–Sun system, *Processes in Geomedia*, 2015, no. 3, pp. 88–99 (In Russian). EDN: [VDGXWT](#).
14. Perepelkin V. V., Soe W. Y., Rykhlova L. V. In-phase variations in the parameters of the Earth’s pole motion and the Lunar orbit precession, *Astron. Rep.*, 2022, vol. 66, no. 1, pp. 80–91. EDN: [WADBCR](#). DOI: <https://doi.org/10.1134/S1063772922020081>.
15. Markov Yu. G., Perepelkin V. V., Mikhailov M. V., et al. Analysis of the effect of various disturbing factors on high-precision forecasts of spacecraft orbits, *Cosmic Res.*, 2016, vol. 54, no. 2, pp. 155–163. EDN: [WSPYJL](#). DOI: <https://doi.org/10.1134/S0010952515060015>.
16. Klimov D. M., Akulenko L. D., Kumakshev S. A. The main properties and peculiarities of the Earth’s motion relative to the center of mass, *Dokl. Phys.*, 2014, vol. 59, no. 10, pp. 472–475. EDN: [UCKIOF](#). DOI: <https://doi.org/10.1134/S1028335814100073>.
17. Akulenko L. D., Perepelkin A. A. Earth pole motion due to nonstationary perturbations, *Mech. Solids*, 2019, vol. 54, no. 7, pp. 1108–1114. EDN: [JFRNFJ](#). DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654419070112>.
18. Akulenko L. D., Klimov D. M., Markov Yu. G., et al. Numerical-analytic modeling of perturbed oscillatory motions of the Earth pole, *Mech. Solids*, 2014, vol. 49, no. 6, pp. 690–702. EDN: [UZXDMB](#). DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654414060119>.