



УДК 517.958

О скорости стабилизации периодических возмущений положения равновесия для одномерного кинетического уравнения Бродвелла

Г. А. Филиппов

Национальный исследовательский
Московский государственный строительный университет,
Россия, 129337, Москва, Ярославское шоссе, д. 26.

Аннотация

Статья посвящена описанию процедуры построения решения задачи о стабилизации периодического возмущения положения равновесия для одномерной модели Бродвелла. Описывается процедура построения решения: применяется метод Фурье для решения системы уравнений относительно коэффициентов Фурье переменных. В пространстве образов Фурье система сводится к проекции на одну переменную, что позволяет выразить остальные коэффициенты Фурье $u_{k,l}$, $v_{k,l}$, $w_{k,l}$ через $z_{k,l}$ с помощью уравнений состояния.

Существенную роль в исследовании скорости стабилизации играет линеаризация z -проекции, представляющая собой в данном случае интегро-дифференциальный оператор, описываемый в терминах теоремы Пэли–Винера. Рассогласование правой и левой частей одномерной системы приводит в методе Фурье к возникновению препятствий при построении аннуляторов секулярных членов соответствующей проекции. Указанные препятствия не позволяют получить решение задачи для произвольных начальных данных, описывающих периодические возмущения положения равновесия. Установлено, что для различных проекций возникающие препятствия оказываются идентичными.

Ключевые слова: кинетические уравнения Бродвелла, одномерная система Бродвелла, системы уравнений, скорость стабилизации периодических возмущений.

Получение: 16 апреля 2025 г. / Исправление: 9 июня 2025 г. /
Принятие: 10 июня 2025 г. / Публикация онлайн: 30 июня 2025 г.

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ
Научная статья

© Коллектив авторов, 2025

© СамГТУ, 2025 (составление, дизайн, макет)

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Филиппов Г. А. О скорости стабилизации периодических возмущений положения равновесия для одномерного кинетического уравнения Бродвелла // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2025. Т. 29, № 2. С. 363–380. EDN: **NDYKAL**. DOI: [10.14498/vsgtu2186](https://doi.org/10.14498/vsgtu2186).

Сведения об авторе

Георгий Алексеевич Филиппов  <https://orcid.org/0009-0005-0054-1696>
аспирант; каф. высшей математики; e-mail: g.philippov@yandex.ru

Введение. Как известно, кинетическая теория рассматривает газ как совокупность огромного числа хаотически движущихся частиц (например молекул), взаимодействующих между собой тем или иным способом [1–6]. В результате таких взаимодействий частицы обмениваются импульсом и энергией. Взаимодействие может осуществляться как посредством прямых столкновений частиц, так и через различные силовые поля.

Для формального описания подобных явлений в [2] (см. также [6]) рассматриваются так называемые дискретные модели кинетического уравнения Больцмана, где приводится феноменологический вывод уравнения Больцмана для газовой модели с конечным числом различных скоростей частиц и конечным числом типов взаимодействий (модели типа Бродвелла [2]).

Пусть $f_i(t, x)$ — функция распределения частиц в пространстве $x \in \mathbb{R}^d$ в момент времени t , движущихся со скоростью $v_i \in \mathbb{R}^d$. Предположим, что их взаимодействие описывается скоростью изменения функции распределения $F_i(f_1, \dots, f_n)$. Тогда получаем систему дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\partial_t f_i + (v, \partial_x f_i) = F(f_1, \dots, f_n), \quad i = 1, \dots, n,$$

которая называется дискретной моделью уравнения Больцмана, если F_i моделирует интеграл столкновений:

$$F(f_1, \dots, f_n) = \sum_{k,j} \sigma_{k,l}^{ij} (f_k f_l - f_i f_j).$$

Здесь суммирование проводится по всем k, l, j , участвующим в заранее заданных взаимодействиях (столкновениях) вида $(k, l) \rightarrow (i, j)$.

В данной работе разработаны методы исследования проекций системы Фурье на систему коэффициентов Фурье одной независимой переменной. При этом для одномерной модели Бродвелла проекции приводят к появлению секулярных членов. В частности, для u -проекции возникают секулярные члены вида $q_{z,r}^+ e^{ikt}$, $q_{v,r}^+ e^{ikt}$ и $q_{w,r}^- e^{-ikt}$.

Особенностью рассматриваемой системы является рассогласование между левой и правой частями уравнений: правая часть уникальна, поскольку описывает условия упругих столкновений частиц, тогда как левые части попарно идентичны. Это рассогласование создает препятствия для построения аннуляторов секулярных членов. Задача оказывается разрешимой лишь для регулярного процесса при выполнении условий возмущения положения равновесия.

Существенную роль в исследовании скорости стабилизации (в терминах теоремы Пэли–Винера) играет линеаризация u -проекции, представляющая собой в данном случае интегро-дифференциальный оператор (см. раздел 6). При разработке стандартного метода перехода к теореме Пэли–Винера потребовалось детальное описание этого перехода (включая оценки всех его составляющих) для модели Бродвелла в каждой из рассматриваемых проблем.

Важным результатом стало доказательство существования линейной взаимно однозначной замены независимых переменных, преобразующей систему

Фурье в линейную систему относительно переменной u . Данное преобразование существенно упрощает исследование слабой сходимости аппроксимационных решений к слабому решению задачи Коши как для регулярного, так и для нерегулярного процессов.

1. Модель Бродвелла [2, 5]. Широко известна двумерная модель Бродвелла ($d = 2$, $n = 4$):

$$\begin{aligned}\partial_t f_1 + \partial_x f_1 &= \frac{1}{\varepsilon}(f_3 f_4 - f_1 f_2), \\ \partial_t f_2 - \partial_x f_2 &= \frac{1}{\varepsilon}(f_3 f_4 - f_1 f_2), \\ \partial_t f_3 + \partial_y f_3 &= -\frac{1}{\varepsilon}(f_3 f_4 - f_1 f_2), \\ \partial_t f_4 - \partial_y f_4 &= -\frac{1}{\varepsilon}(f_3 f_4 - f_1 f_2).\end{aligned}\tag{1}$$

Модель Бродвелла наглядно демонстрирует сущность уравнения Больцмана, которое, как показано в [6], описывает смесь *двух конкурирующих процессов*: *релаксации и свободного движения*. Релаксационный процесс стремится уравнивать значения f_1 и f_3 , а также f_2 и f_4 (процесс «максвеллизации»), приводя к $Q(f_1, f_2) \rightarrow 0$. Свободное движение, напротив, вызывает расхождение этих функций распределения.

Ситуация быстрой релаксации соответствует случаю, когда f_1 почти равна f_2 . Противоположный предельный случай медленной релаксации (малое число столкновений) известен как кнудсеновский газ и характеризуется большим значением числа Кнудсена ε .

В работе [11] для системы Бродвелла исследованы периодические возмущения состояния равновесия $f_i = n_e^i + \hat{n}_i$, где $n_e^i > 0$ ($i = 1, \dots, 4$) и $n_e^1 n_e^2 = n_e^3 n_e^4$. Возмущения $N(t, x, y) = (\hat{n}_1, \hat{n}_2, \hat{n}_3, \hat{n}_4)$ удовлетворяют пространственно-периодическим граничным условиям $N(t, x, y) = N(t, x + 2\pi, y + 2\pi)$, где (x, y) принадлежат ячейке периодичности. Введем следующее переобозначение:

$$N(t, x, y) = \varepsilon^2(\sqrt{u_e} \hat{u}, \sqrt{v_e} \hat{v}, \sqrt{w_e} \hat{w}, \sqrt{z_e} \hat{z}).$$

Применяя метод Фурье, перейдем к рассмотрению коэффициентов Фурье. Для двумерной системы можно осуществить проекцию на одну переменную (например, $u_{k,l} - u$ -проекция), выражая остальные коэффициенты Фурье $v_{k,l}$, $w_{k,l}$, $z_{k,l}$ через $z_{k,l}$ с помощью уравнений состояния. Ключевую роль в исследовании скорости стабилизации играет линеаризация u -проекции, которая в данном случае представляет собой интегро-дифференциальный оператор, описываемый в терминах теоремы Пэли–Винера.

Переход к проекции сопровождается появлением секулярных членов, которые однозначно аннулируются для регулярного процесса. Проблема построения аннуляторов секулярных членов возникает на так называемом «кресте» — для коэффициентов Фурье с индексами (k, l) , удовлетворяющих условию $(k^2 - l^2)l = 0$. Это создает препятствия для стабилизации соответствующих коэффициентов Фурье. Система для таких коэффициентов аналогична

системе для коэффициентов Фурье одномерной модели Бродвелла:

$$\begin{aligned}\partial_t f_1 + \partial_x f_1 &= \frac{1}{\varepsilon}(f_3 f_4 - f_1 f_2), \\ \partial_t f_2 - \partial_x f_2 &= \frac{1}{\varepsilon}(f_3 f_4 - f_1 f_2), \\ \partial_t f_3 + \partial_x f_3 &= \frac{1}{\varepsilon}(f_1 f_2 - f_3 f_4), \\ \partial_t f_4 - \partial_x f_4 &= \frac{1}{\varepsilon}(f_1 f_2 - f_3 f_4).\end{aligned}\tag{2}$$

В чем заключается проблематичность данной модели? В одномерном случае частицы с одинаковыми скоростями распределены по разным группам (пары f_1, f_3 и f_2, f_4). При этом правая часть моделирует интеграл столкновений, построенный для четырех групп частиц с жестким условием *различия их групповых скоростей*. Таким образом, мы имеем *рассогласование между правой и левой частями модели* (2).

Этот вывод справедлив и для многоскоростных многомерных дискретных моделей кинетики, правая часть которых основана на разбиении частиц по группам с различными групповыми скоростями. Как показано выше, для двумерной модели Бродвелла проблема *рассогласования правой и левой частей* возникает на «кресте». Естественно, аналогичная проблема *рассогласования* возникает и для многоскоростных многомерных дискретных моделей кинетики на аналоге «креста» модели Бродвелла, который мы будем называть «обобщенным крестом».

Отметим, что уравнение Больцмана можно рассматривать как «континуальную сумму» моделей типа Бродвелла. Рассогласование правой и левой частей уравнения Больцмана обсуждается в [12].

Рассогласование в системе (2) приводит к возникновению препятствий при построении аннуляторов секулярных членов соответствующей проекции методом Фурье. Как будет показано далее, для одномерной модели (2) эти препятствия (например, для u -проекции) имеют вид

$$\sqrt{v_e} v_k^0 + \sqrt{z_e} z_k^0 = 0, \quad \sqrt{w_e} w_k^0 + \sqrt{u_e} u_k^0 = 0, \quad k \in \mathbb{Z}_0.\tag{3}$$

Указанные препятствия не позволяют построить решение задачи для произвольных начальных данных, описывающих периодические возмущения положения равновесия (включая распределения Максвелла — бегущие волны):

$$f_1 = f_3 = 1 + \varepsilon^2 \varphi(x - t), \quad f_2 = f_4 = 1 + \varepsilon^2 \psi(t + x),$$

начальные данные которых

$$f_1^0 = f_3^0 = 1 + \varepsilon^2 \varphi(x), \quad f_2^0 = f_4^0 = 1 + \varepsilon^2 \psi(x)$$

представляют собой периодические возмущения положения равновесия, не удовлетворяющие условиям (3).

В отличие от рассмотренной модели, одномерная модель Карлемана (см. [7])

$$\begin{aligned}\partial_t f_1 + \partial_x f_1 &= \frac{1}{\varepsilon}(f_2^2 - f_1^2), \\ \partial_t f_2 - \partial_x f_2 &= -\frac{1}{\varepsilon}(f_2^2 - f_1^2),\end{aligned}$$

не допускает распределений Максвелла, поэтому периодические возмущения положений равновесия $f_1^e > 0$, $f_2^e > 0$, $(f_1^e)^2 = (f_2^e)^2$, стабилизируются экспоненциально быстро [10].

2. Проблемы стабилизации в одномерной модели Бродвелла. Целью данной статьи является исследование проблемы скорости стабилизации периодических возмущений положения равновесия для одномерной модели Бродвелла (2).

Основным рабочим методом является метод Фурье в сочетании с проекцией процесса на одну из компонент (см. [8, 10]), что приводит к возникновению секулярных членов. В двумерном случае возникает проблема аннулирования секулярных членов (проблема «креста», см. [11]) — отсутствие аннуляторов секулярных членов для коэффициентов Фурье решения с индексами (k, l) , удовлетворяющими условию $(k^2 - l^2)l = 0$. Это создает препятствия для стабилизации соответствующих коэффициентов Фурье.

Исследование данной проблемы требует предварительного анализа вопроса стабилизации для одномерной модели Бродвелла. В настоящей работе рассматривается процедура построения решения задачи о стабилизации периодического возмущения положения равновесия для одномерной модели Бродвелла (2).

Для одномерной системы Бродвелла рассмотрим периодическое возмущение состояния равновесия

$$F(t, x) = (f_1, f_2, f_3, f_4) = F_e + \varepsilon^2 U(t, x),$$

где $F_e = (f_e^1, \dots, f_e^4)$, $f_e^i > 0$ ($i = 1, \dots, 4$), $f_e^1 f_e^2 = f_e^3 f_e^4$, причем $U(t, x) = U(t, x + 2\pi)$, т.е. удовлетворяет пространственно-периодическим граничным условиям, $x \in (0, 1)$. Введем переобозначение:

$$N(t, x) = N_e + \varepsilon^2 (\sqrt{u_e} \hat{u}, \sqrt{v_e} \hat{v}, \sqrt{w_e} \hat{w}, \sqrt{z_e} \hat{z}), \quad N_e = (u_e, v_e, w_e, z_e).$$

Применяя метод Фурье, перейдем к рассмотрению коэффициентов Фурье переменных. В пространстве образов Фурье можно осуществить проекцию на одну переменную (например, u_k — u -проекция), выражая остальные коэффициенты Фурье v_k , w_k , z_k через u_k с помощью уравнений состояния.

Ключевую роль в исследовании скорости стабилизации (в терминах теоремы Пэли–Винера [8, 10]) играет линеаризация u -проекции, представляющая собой в данном случае интегро-дифференциальный оператор. Изучение свойств этого оператора совместно с анализом квадратичности правой части в (1) позволило получить следующие результаты.

– Возникает препятствие для стабилизации коэффициентов Фурье:

$$\sqrt{v_e} v_k^0 + \sqrt{z_e} z_k^0 = 0, \quad \sqrt{w_e} w_k^0 + \sqrt{u_e} u_k^0 = 0. \quad (4)$$

– При невыполнении условий согласования препятствия u -проекции возможно подключение второй проекции (например, z -проекции) для построения решения методом Фурье. Однако условия согласования препятствия для z -проекции совпадают с таковыми для u -проекции:

$$\sqrt{w_e} w_k^0 + \sqrt{u_e} u_k^0 = 0, \quad \sqrt{v_e} v_k^0 + \sqrt{z_e} z_k^0 = 0.$$

Это исключает возможность построения каскада решений для произвольных периодических возмущений положения равновесия.

- Для коэффициентов Фурье $u_k^0, v_k^0, w_k^0, z_k^0, k \in \mathbb{Z}_0$, удовлетворяющих условиям согласования (4), процесс стабилизируется к состоянию равновесия экспоненциально быстро. Такой процесс будем называть *u-регулярным*.

3. Система для возмущения. В данном разделе исследуется скорость процесса «максвеллизации» на примере периодических возмущений положения равновесия для одномерной модели Бродвелла (1), где $f_j > 0$. Рассматриваются периодические возмущения положения равновесия:

$$\begin{aligned} f_1 &= u_e + \varepsilon^2 \sqrt{u_e} \hat{u}; & f_2 &= v_e + \varepsilon^2 \sqrt{v_e} \hat{v}; \\ f_3 &= w_e + \varepsilon^2 \sqrt{w_e} \hat{w}; & f_4 &= z_e + \varepsilon^2 \sqrt{z_e} \hat{z}. \end{aligned}$$

Положение равновесия характеризуется значениями $f_1^e = u_e, f_2^e = v_e, f_3^e = w_e, f_4^e = z_e$, удовлетворяющими условию $w_e z_e = u_e v_e$. Основная задача заключается в определении условий существования решения возмущенной системы и анализа его стабилизации.

Система уравнений для возмущений имеет вид

$$\begin{aligned} \partial_t \sqrt{u_e} \hat{u} + \partial_x \sqrt{u_e} \hat{u} - \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{L}_e &= \varepsilon \sqrt{u_e} \sqrt{v_e} (\hat{w} \hat{z} - \hat{u} \hat{v}), \\ \partial_t \sqrt{v_e} \hat{v} - \partial_x \sqrt{v_e} \hat{v} - \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{L}_e &= \varepsilon \sqrt{u_e} \sqrt{v_e} (\hat{w} \hat{z} - \hat{u} \hat{v}), \\ \partial_t \sqrt{w_e} \hat{w} + \partial_x \sqrt{w_e} \hat{w} + \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{L}_e &= -\varepsilon \sqrt{u_e} \sqrt{v_e} (\hat{w} \hat{z} - \hat{u} \hat{v}), \\ \partial_t \sqrt{z_e} \hat{z} - \partial_x \sqrt{z_e} \hat{z} + \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{L}_e &= -\varepsilon \sqrt{u_e} \sqrt{v_e} (\hat{w} \hat{z} - \hat{u} \hat{v}), \\ \mathcal{L}_e &= w_e \sqrt{z_e} \hat{z} + z_e \sqrt{w_e} \hat{w} - u_e \sqrt{v_e} \hat{v} - v_e \sqrt{u_e} \hat{u}, \\ \partial_t \sqrt{u_e} \hat{u} + \partial_x \sqrt{u_e} \hat{u} &= \partial_t \sqrt{v_e} \hat{v} - \partial_x \sqrt{v_e} \hat{v}, \\ \partial_t \sqrt{w_e} \hat{w} + \partial_x \sqrt{w_e} \hat{w} &= \partial_t \sqrt{z_e} \hat{z} - 2 \partial_x \sqrt{z_e} \hat{z}, \\ \partial_t \sqrt{w_e} \hat{w} + \partial_x \sqrt{w_e} \hat{w} &= \partial_t \sqrt{u_e} \hat{u} + \partial_x \sqrt{u_e} \hat{u}. \end{aligned} \tag{5}$$

В пространстве образов Фурье система принимает вид

$$\begin{aligned} \partial_t \sqrt{u_e} u_k + ik \sqrt{u_e} u_k - \frac{1}{\varepsilon} L_k^e &= \varepsilon \sqrt{u_e} \sqrt{v_e} (\hat{w} \hat{z} - \hat{u} \hat{v})_k, \\ \partial_t \sqrt{v_e} v_k - ik \sqrt{v_e} v_k - \frac{1}{\varepsilon} L_k^e &= \varepsilon \sqrt{u_e} \sqrt{v_e} (\hat{w} \hat{z} - \hat{u} \hat{v})_k, \\ \partial_t \sqrt{w_e} w_k + ik \sqrt{w_e} w_k + \frac{1}{\varepsilon} L_k^e &= -\varepsilon \sqrt{u_e} \sqrt{v_e} (\hat{w} \hat{z} - \hat{u} \hat{v})_k, \\ \partial_t \sqrt{z_e} z_k - ik \sqrt{z_e} z_k + \frac{1}{\varepsilon} L_k^e &= -\varepsilon \sqrt{u_e} \sqrt{v_e} (\hat{w} \hat{z} - \hat{u} \hat{v})_k, \\ L_k^e &= w_e \sqrt{z_e} z_k + z_e \sqrt{w_e} w_k - u_e \sqrt{v_e} v_k - v_e \sqrt{u_e} u_k. \\ Q_k &= \sum_{k_1+k_2=k} (w_{k_1} z_{k_2} - u_{k_1} v_{k_2}). \end{aligned} \tag{6}$$

4. u -проекция. Опишем процедуру построения u -проекции. Из системы (6) следуют соотношения

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\sqrt{z_e}z_k - ik\sqrt{z_e}z_k &= -\left(\frac{d}{dt}\sqrt{u_e}u_k + ik\sqrt{u_e}u_k\right), \\ \frac{d}{dt}\sqrt{w_e}w_k + ik\sqrt{w_e}w_k &= -\left(\frac{d}{dt}\sqrt{u_e}u_k + ik\sqrt{u_e}u_k\right), \\ \frac{d}{dt}\sqrt{v_e}v_k - ik\sqrt{v_e}v_k &= \frac{d}{dt}\sqrt{u_e}u_k + ik\sqrt{u_e}u_k.\end{aligned}\quad (7)$$

Интегрирование системы (7) позволяет получить выражения

$$\begin{aligned}\sqrt{v_e}v_k &= \sqrt{v_e}v_k^0 e^{ikt} \int_0^t e^{-2iks} ds (e^{iks} \sqrt{u_e}u_k) ds = \\ &= q_{v,k}^+ e^{ikt} + \sqrt{u_e}u_k + 2ik \int_0^t e^{ik(t-s)} \sqrt{u_e}u_k ds,\end{aligned}\quad (8)$$

где

$$q_{v,k}^+ = \sqrt{v_e}v_k^0 - \sqrt{u_e}u_k^0.$$

Также получим

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(e^{-ikt}\sqrt{z_e}z_k) &= -e^{-2ikt}\frac{d}{dt}(e^{ikt}\sqrt{u_e}u_k), \\ \sqrt{z_e}z_k &= q_{z,k}^+ e^{ikt} - \sqrt{u_e}u_k - 2ik \int_0^t e^{ik(t-s)} \sqrt{u_e}u_k ds,\end{aligned}\quad (9)$$

где

$$q_{z,k}^+ = \sqrt{z_e}z_k^0 + \sqrt{u_e}u_k^0,$$

и

$$\sqrt{w_e}w_k = q_{w,k}^- e^{-ikt} - \sqrt{u_e}u_k,\quad (10)$$

где

$$q_{w,k}^- = \sqrt{w_e}w_k^0 + \sqrt{u_e}u_k^0.$$

Уравнение для компоненты u_k принимает вид

$$\partial_t \sqrt{u_e}u_k + ik\sqrt{u_e}u_k - \frac{1}{\varepsilon}L_k^e = \varepsilon\sqrt{u_e}\sqrt{v_e}(\widehat{wz} - \widehat{uv})_k.$$

После подстановки получаем выражение для L_e :

$$\begin{aligned}L_e &= w_e \left(q_{z,k}^+ e^{ikt} - \sqrt{u_e}u_k - 2ik \int_0^t e^{ik(t-s)} \sqrt{u_e}u_k ds \right) + \\ &\quad + z_e (q_{w,k}^- e^{-ikt} - \sqrt{u_e}u_k) - v_e \sqrt{u_e}u_k - \\ &\quad - u_e \left(q_{v,k}^+ e^{ikt} + \sqrt{u_e}u_k + 2ik \int_0^t e^{ik(t-s)} \sqrt{u_e}u_k ds \right).\end{aligned}$$

Подстановка в первое уравнение системы (5) приводит к интегро-дифференциальному уравнению для компоненты u_k :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\sqrt{u_e}u_k + ik\sqrt{u_e}u_k + \frac{1}{\varepsilon}K_e\sqrt{u_e}u_k + \\ + \frac{1}{\varepsilon}2ik(w_e + u_e) \int_0^t e^{ik(t-s)}\sqrt{u_e}u_k ds = \\ = \frac{1}{\varepsilon}(w_e q_{z,k}^+ + z_e q_{w,k}^- e^{-ikt} - u_e q_{v,k}^+ e^{ikt}) + \varepsilon\sqrt{u_e}\sqrt{v_e}(\widehat{w}\widehat{z} - \widehat{u}\widehat{v})_k, \quad (11) \end{aligned}$$

где $K_e = u_e + v_e + w_e + z_e$.

Введем оператор

$$\begin{aligned} T_{u,k}(\sqrt{u_e}u_k) = \frac{d}{dt}\sqrt{u_e}u_k + ik\sqrt{u_e}u_k + \frac{1}{\varepsilon}K_e\sqrt{u_e}u_k + \\ + \frac{1}{\varepsilon}2ik(w_e + u_e) \int_0^t e^{ik(t-s)}\sqrt{u_e}u_k ds. \end{aligned}$$

Как будет показано далее, данный интегро-дифференциальный оператор играет ключевую роль в построении решения u -проекции.

5. u -регулярный процесс. Процесс будем называть *регулярным*, если выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} \sqrt{v_e}v_k + \sqrt{z_e}z_k = 0; \quad \sqrt{u_e}u_k + \sqrt{w_e}w_k = 0, \quad k \in \mathbb{Z}_0, \quad (12) \\ v_0^0 = z_0^0 = u_0^0 = w_0^0, \end{aligned}$$

где $\mathbb{Z}_0 = \{k \in \mathbb{Z}; k \neq 0\}$.

Далее мы покажем, что регулярный процесс допускает глобальное решение в весовом гильбертовом пространстве $W_{2,\gamma}^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}\sigma)$ последовательностей $U = \{u_k, k \in \mathbb{Z}_0\}$ с квадратом нормы

$$\|U\|^2 = \sup_{k \in \mathbb{Z}_0} |k|^{2\sigma} \int_0^\infty e^{2\gamma t} \left(\left| \frac{d}{dt} u_k \right|^2 + |k|^2 |u_k|^2 \right) dt, \quad \gamma > 0.$$

Дополнительно определим пространство числовых последовательностей $S = \{S_k, k \in \mathbb{Z}_0\}$ с квадратом нормы

$$\|S\|_{\mathcal{H}\sigma}^2 = \sup_{k \in \mathbb{Z}_0} |k|^{2\sigma} |S_k|^2.$$

В дальнейшем также будет использоваться весовое гильбертово пространство $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}\sigma)$ последовательностей $Y = \{Y_k, k \in \mathbb{Z}_0\}$ с квадратом нормы

$$\|Y\|^2 = \sup_{k \in \mathbb{Z}_0} |k|^{2\sigma} \int_0^\infty e^{2\gamma t} |Y_k|^2 dt, \quad \gamma > 0.$$

6. Интегро-дифференциальный оператор $T_{u,k}$. Как было установлено ранее (см. также [7–9]), *существенную роль* в исследовании проблемы

стабилизации решений задачи Коши для системы (11), (8)–(10) играют свойства интегро-дифференциального оператора $T_{u,k}$.

Его символ (преобразование Лапласа по переменной t) имеет вид

$$\sigma(T_{u,k})(p) = p + ik + \frac{1}{\varepsilon}K_e + \frac{1}{\varepsilon}2ik(w_e + u_e)\frac{1}{p - ik}.$$

Заметим, что в разложении символа

$$\Sigma(T_{u,k})(p) = \frac{\sigma(T_{u,k})(p)}{p + ik} = 1 + \frac{1}{\varepsilon}\left((K_e - w_e - u_e)\frac{1}{p + ik} + (w_e + u_e)\frac{1}{p - ik}\right)$$

все коэффициенты *положительны*. Это свойство будет играть ключевую роль при анализе символов операторов $T_{u,k}$, $k \in \mathbb{Z}_0$.

В данном случае

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \Sigma(T_{u,k})(p) = 1 + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{Re} p \left((v_e + z_e) \frac{1}{(\operatorname{Re} p)^2 + (\operatorname{Im} p + k)^2} + \right. \\ \left. + (u_e + w_e) \frac{1}{(\operatorname{Re} p)^2 + (\operatorname{Im} p - k)^2} \right) \geq 1 \end{aligned}$$

для всех $p \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} p \geq 0$. Следовательно, функция $(p + ik)/\sigma(T_{u,k})(p)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geq 0$.

Это позволяет предположить, что функция $1/\sigma(T_{u,k})(p)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} p > -\varepsilon\gamma$ для достаточно малого $\gamma > 0$. Данное свойство дает возможность применить теорему Пэли–Винера и построить обратный оператор $T_{u,k}^{-1}$.

7. Оценки оператора $T_{u,k}$, $k \in \mathbb{Z}_0$. Положим

$$A_k(\sqrt{u_e}u_k) = \frac{1}{\varepsilon}2ik(w_e + u_e) \int_0^t e^{ik(t-s)} \sqrt{u_e}u_k ds.$$

Для получения оценок решения задачи Коши для уравнения

$$L(f) = T_{u,k}(f) = g, \quad f|_{t=0} = 0 \quad (13)$$

в соболевских нормах приведем известные факты, которые будут использованы в дальнейшем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Пространством Харди $H_2(\operatorname{Re} p > \gamma, H)$ назовем класс вектор-функций $\widetilde{f(p)}$ со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве H , голоморфных в полуплоскости $\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p > \gamma \geq 0\}$, для которых*

$$\sup_{x > \gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} \|\widetilde{f(x + iy)}\|_H^2 dy < \infty, \quad p = x + iy.$$

Сформулируем теорему Пэли–Винера для пространств Харди.

ТЕОРЕМА ПЭЛИ–ВИНЕРА.

1. Пространство $H_2(\operatorname{Re} p > \gamma, H)$ совпадает с множеством вектор-функций (преобразований Лапласа), допускающих представление

$$\widetilde{f(p)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{pt} f(t) dt \quad (14)$$

для $f(t) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, $p \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} p > \gamma \geq 0$.

2. Для любой вектор-функции $\widetilde{f(p)} \in H_2(\operatorname{Re} p > \gamma, H)$ существует единственное представление (14), где вектор-функция $f(t) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, причем справедлива формула обращения

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{(\gamma+iy)t} \widetilde{f(\gamma+iy)} dy, \quad t \in \mathbb{R}_+, \gamma \geq 0.$$

3. Для вектор-функций $\widetilde{f(p)} \in H_2(\operatorname{Re} p > \gamma, H)$ и $f(t) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, связанных соотношением (14), справедливо равенство

$$\begin{aligned} \|\widetilde{f}\|_{H_2(\operatorname{Re} p > \gamma, H)}^2 &\equiv \sup_{x > \gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} \|\widetilde{f(x+iy)}\|_H^2 dy = \\ &= \int_0^\infty e^{-2\gamma t} \|f(t)\|_H^2 dt \equiv \|f\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)}^2. \end{aligned}$$

Если установлено, что преобразование Лапласа функции $L(f)$ таково, что $pL(f)(p)$, $L(f)$ и $L(A_k f)$ принадлежат пространству Харди $\widetilde{f(p)} \in H_2(\operatorname{Re} p > \gamma)$ при некотором $\gamma \in \mathbb{R}$, то по теореме Пэли–Винера функции $\frac{d}{dt}f$, f и $A_k f$ принадлежат пространству $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$ и, следовательно, $f \in W_{2,\gamma}^1(\mathbb{R}_+)$ для любого $g \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$.

Отсюда следует разрешимость уравнения (13) в пространстве $W_{2,\gamma}^1(\mathbb{R}_+)$. Покажем, что

$$\|f\|_{W_{2,\gamma}^1(\mathbb{R}_+)} + \|A_k f\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)} \leq a_0 \|g\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)}.$$

Для этого необходима оценка символа $\sigma(T_{u,k})(p)$ снизу. Далее приведем результаты, касающиеся свойств символа $\sigma(T_{u,k})(p)$ оператора $T_{u,k}$ и прежде всего условия его строгой устойчивости, когда корни $\sigma(T_{u,k})(p) = 0$ находятся в левой полуплоскости $\operatorname{Re} p < -\varepsilon\gamma$ параметра $p \in \mathbb{C}$ для некоторого $\gamma \in (0, 1)$.

8. Оценки символов $\sigma(T_{u,k})(p)$ и $\Sigma(T_{u,k})(p)$. Приведем оценки символов $\sigma(T_{u,k})(p)$ и $\Sigma(T_{u,k})(p)$, следующие из результатов работ [7, 9, 10].

$$\text{Положим } \Sigma(T_{u,k})(p) = \frac{\sigma(T_{u,k})(p)}{p + ik}.$$

ЛЕММА 1. Пусть $k \in \mathbb{Z}_0$. Для $\operatorname{Re} p > -\varepsilon\gamma$, где $\gamma = (1-\alpha)\mu^2/K_e$, $0 < \alpha < 1$, $0 < \mu < 1$, и при дополнительном условии $|\operatorname{Im} p \pm k| \geq \mu|k|$ справедлива равномерная по $k \in \mathbb{Z}_0$ оценка

$$|\Sigma_{u,k}(p)| \geq \alpha.$$

ЛЕММА 2. Равномерно по $k \in \mathbb{Z}_0$ в полуплоскости $\operatorname{Re} p > -\gamma\varepsilon$, $\gamma = \mu^2/K_e$, для достаточно малого $0 < \mu < 1$ справедлива оценка

$$|\sigma(T_{u,k})(p)| > c(\mu),$$

где $c(\mu) > 0$. Следовательно, по теореме Пэли–Винера, для любой функции $g(t) \in L_{2,\varepsilon\gamma}(\mathbb{R}_+)$ задача Коши (13) имеет решение

$$f = T_{u,k}^{-1}g \in L_{2,\varepsilon\gamma}(\mathbb{R}_+), \quad f|_{t=0} = 0,$$

удовлетворяющее оценке

$$\|T_{u,k}^{-1}g\|_{L_{2,\varepsilon\gamma}(\mathbb{R}_+)} \leq c(\mu)\|g\|_{L_{2,\varepsilon\gamma}(\mathbb{R}_+)}. \quad (15)$$

ЛЕММА 3. Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда существует постоянная $c(\mu) > 0$ такая, что равномерно по $k \in \mathbb{Z}_0$ для любой функции $g \in L_{2,\varepsilon\gamma}(\mathbb{R}_+)$ выполняется

$$\left(\frac{d}{dt} + ik\right)T_{u,k}^{-1}g \in L_{2,\varepsilon\gamma}(\mathbb{R}_+),$$

причем справедлива оценка

$$\left\|\left(\frac{d}{dt} + ik\right)T_{u,k}^{-1}g\right\|_{L_{2,\varepsilon\gamma}(\mathbb{R}_+)} \leq \max(\alpha^{-1}, \varepsilon\mu c(\mu)|k|)\|g\|_{L_{2,\varepsilon\gamma}(\mathbb{R}_+)}.$$

ЛЕММА 4. В условиях леммы 2 для интегрального члена в $T_{u,k}$ справедлива оценка

$$\|A_k T_{u,k}^{-1}g\|_{L_{2,\varepsilon\gamma}} \leq \frac{1}{\varepsilon} c_2 \|g\|_{L_{2,\varepsilon\gamma}}.$$

ТЕОРЕМА 1. Для параметра $\gamma = (1 - \alpha)\mu^2/K_e$, $\alpha \in (0, 1)$, и достаточно малого $\mu \in (0, 1)$ функция $((p - ik)\sigma(T_{u,k})(p))^{-1}$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geq -\varepsilon\gamma$. Кроме того, существует постоянная $c(\mu) > 0$ такая, что равномерно по $k \in \mathbb{Z}_0$ выполняются оценки

$$\sup_{\operatorname{Re} p \geq -\varepsilon\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|p|^2}{|(p - ik)\sigma(T_{u,k})(p)|^2} d\operatorname{Im} p \leq c(\mu) \max(1, \varepsilon^2(|k| - K_e))$$

и

$$\sup_{\operatorname{Re} p \geq -\varepsilon\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|(p - ik)\sigma(T_{u,k})(p)|^2} d\operatorname{Im} p \leq c(\mu).$$

9. Переход к однородным начальным данным. Выполним замену переменных:

$$\sqrt{u_e}u_k = \sqrt{u_e}u_k^0 e^{-K_e t/\varepsilon} + \sqrt{u_e}\mathcal{X}_k,$$

где $\mathcal{X}_k$ — новая переменная с нулевыми начальными условиями.

При этом интегральный член преобразуется следующим образом:

$$2ik \int_0^t e^{ik(t-s)} \sqrt{u_e} u_k^0 e^{-K_e s/\varepsilon} ds = -\frac{2ik}{K_e/\varepsilon + ik} \sqrt{u_e} u_k^0 (e^{-K_e t/\varepsilon} - e^{ikt}).$$

Получаем выражения для остальных переменных:

$$\begin{aligned} \sqrt{z_e} z_k = Q_{z,k}^+ e^{ikt} - \frac{K_e/\varepsilon}{K_e/\varepsilon + ik} \sqrt{u_e} u_k^0 e^{-K_e t/\varepsilon} - \\ - \sqrt{u_e} \mathcal{X}_k - 2ik \int_0^t e^{ik(t-s)} \sqrt{u_e} \mathcal{X}_k ds, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{v_e} v_k = Q_{v,k}^+ e^{ikt} + \frac{K_e/\varepsilon}{K_e/\varepsilon + ik} \sqrt{u_e} u_k^0 e^{-K_e t/\varepsilon} + \\ + \sqrt{u_e} \mathcal{X}_k + 2ik \int_0^t e^{ik(t-s)} \sqrt{u_e} \mathcal{X}_k ds, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$Q_{z,k}^+ = q_{z,k}^+ - \frac{2ik}{K_e/\varepsilon + ik} u_k^0, \quad Q_{v,k}^+ = q_{v,k}^+ + \frac{2ik}{K_e/\varepsilon + ik} u_k^0.$$

Для переменной w_k имеем

$$\sqrt{w_e} w_k = -\sqrt{u_e} u_k^0 e^{-K_e t/\varepsilon} + \sqrt{u_e} \mathcal{X}_k,$$

поскольку для регулярного процесса выполняется $q_{w,k}^- = \sqrt{u_e} u_k + \sqrt{w_e} w_k = 0$, $k \in \mathbb{Z}_0$.

Уравнение для новой переменной $\mathcal{X}_k$ принимает вид

$$\begin{aligned} \partial_t \sqrt{u_e} \mathcal{X}_k + (K_e/\varepsilon + ik) \sqrt{u_e} \mathcal{X}_k + \\ + \frac{1}{\varepsilon} 2ik (w_e + u_e) \int_0^t e^{ik(t-s)} \sqrt{u_e} \mathcal{X}_k ds = \\ = \mathcal{F}_k + \frac{1}{\varepsilon} (w_e Q_{z,k}^+ - u_e Q_{v,k}^+) e^{ikt} + \varepsilon Q_k^{(1)}(\mathcal{X}, \mathcal{X}), \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$\mathcal{F}_k = \left(\frac{1}{\varepsilon} (w_e + u_e) \frac{2ik}{K_e/\varepsilon + ik} - ik \right) \sqrt{u_e} u_k^0 e^{-K_e t/\varepsilon}$$

с начальным условием

$$\mathcal{X}_k|_{t=0} = 0, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Здесь

$$\frac{1}{\varepsilon} \left(w_e q_{z,k}^+ - u_e q_{v,k}^+ - (w_e + u_e) \frac{2ik}{K_e/\varepsilon + ik} \sqrt{u_e} u_k^0 \right) = \frac{1}{\varepsilon} (w_e Q_{z,k}^+ - u_e Q_{v,k}^+).$$

Нелинейный член $Q_k^{(1)}$ выражается так:

$$\begin{aligned}
 Q_k^{(1)}(\mathcal{X}, \mathcal{X}) &= \sum_{k_1+k_2=k} (z_{k_1} w_{k_2} - v_{k_1} u_{k_2}) = \\
 &= - \sum_{k_1+k_2=k} (\sqrt{u_e} u_{k_2}^0 e^{-K_e t/\varepsilon} + \sqrt{u_e} \mathcal{X}_{k_2}) (Q_{z,k_1}^+ + Q_{v,k_1}^+) e^{ik_1 t}. \quad (19)
 \end{aligned}$$

10. Условия стабилизации уравнений состояния. Для устранения секулярных членов $Q_{z,k}^+ e^{ikt}$ и $Q_{v,k}^+ e^{ikt}$ в уравнениях состояния (16), (17) введем замену переменных для регулярного процесса:

$$\sqrt{u_e} \mathcal{X}_k = S_k^+ T_{u,k}^{-1}(e^{ikt}) + \sqrt{u_e} T_{u,k}^{-1}(Y_k), \quad (20)$$

где $S_k^+ T_{u,k}^{-1}(e^{ikt}) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$ — аннулятор, что следует из оценки теоремы 1, а согласно оценке (15), $T_{u,k}^{-1}(Y_k) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$ для любой $Y_k \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$.

Воспользуемся приемом выделения секулярности из интеграла

$$2ik \int_0^t e^{ik(t-s)} (S_k^+ T_{u,k}^{-1}(e^{iks}) ds,$$

который использовался в [10] в силу определения оператора $T_{u,k}$:

$$\begin{aligned}
 2ik \int_0^t e^{ik(t-s)} S_k^+ T_{u,k}^{-1}(e^{iks}) ds &= \\
 &= \frac{\varepsilon}{w_e + u_e} \{S_k^+ e^{iks} - \partial_t S_k^+ T_{u,k}^{-1}(e^{iks}) + (K_e/\varepsilon + ik) S_k^+ T_{u,k}^{-1}(e^{iks})\}.
 \end{aligned}$$

Подстановка в (16) и (17) дает

$$\begin{aligned}
 \sqrt{z_e} z_k &= \left(Q_{z,k}^+ - \frac{\varepsilon}{w_e + u_e} S_k^+ \right) e^{ikt} + F_{z,k} - \\
 &- \sqrt{u_e} T_{u,k}^{-1}(Y_k) - 2ik \int_0^t e^{ik(t-s)} \sqrt{u_e} T_{u,k}^{-1}(Y_k) ds,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sqrt{v_e} v_k &= \left(Q_{v,k}^+ + \frac{\varepsilon}{w_e + u_e} S_k^+ \right) e^{ikt} + F_{v,k} + \\
 &+ \sqrt{u_e} T_{u,k}^{-1}(Y_k) + 2ik \int_0^t e^{ik(t-s)} \sqrt{u_e} T_{u,k}^{-1}(Y_k) ds,
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 F_{z,k} &= -\frac{K_e/\varepsilon}{K_e/\varepsilon + ik} \sqrt{u_e} X_k^0 e^{-K_e t/\varepsilon} - S_k^+ T_{X,k}^{-1}(e^{ikt}) - \\
 &- \frac{\varepsilon}{w_e + u_e} ((K_e/\varepsilon + ik) S_k^+ T_{X,k}^{-1}(e^{iks}) - \partial_t S_k^+ T_{X,k}^{-1}(e^{iks})) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+),
 \end{aligned}$$

$$F_{v,k} = \frac{K_e/\varepsilon}{K_e/\varepsilon + ik} \sqrt{u_e} X_k^0 e^{-K_e t/\varepsilon} + S_k^+ T_{X,k}^{-1}(e^{ikt}) - \\ - \frac{\varepsilon}{w_e + u_e} (\partial_t S_k^+ T_{X,k}^{-1}(e^{iks}) - (K_e/\varepsilon + ik) S_k^+ T_{X,k}^{-1}(e^{iks})) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$$

в силу оценок раздела 6.

Определим амплитуду S_k^+ из уравнений

$$Q_{z,k}^+ - \frac{\varepsilon}{w_e + u_e} S_k^+ = 0; \quad Q_{v,k}^+ + \frac{\varepsilon}{w_e + u_e} S_k^+ = 0, \quad (21)$$

что приводит к *препятствию* для аннуляции секулярных членов:

$$Q_{z,k}^+ + Q_{v,k}^+ = 0 \Rightarrow \widehat{q}_{z,k}^+ + \widehat{q}_{v,k}^+ = 0 \Rightarrow \sqrt{z_e} z_k^0 + \sqrt{v_e} v_k^0 = 0. \quad (22)$$

Окончательные выражения принимают вид

$$\sqrt{z_e} z_k = F_{z,k} - \sqrt{u_e} T_{u,k}^{-1}(Y_k) - 2ik \int_0^t e^{ik(t-s)} \sqrt{u_e} T_{u,k}^{-1}(Y_k) ds, \\ \sqrt{v_e} v_k = F_{v,k} + \sqrt{u_e} T_{u,k}^{-1}(Y_k) + 2ik \int_0^t e^{ik(t-s)} \sqrt{u_e} T_{u,k}^{-1}(Y_k) ds, \quad (23)$$

где правые части (23) стабилизируются к нулю для любого $Y_k \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$.

11. Сведение к уравнению в $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия регулярности (12), $\sigma > 3/2$ и $\gamma = \varepsilon \mu^2 / K_e$. Тогда для достаточно малого $\mu \in (0, 1)$ существует единственное глобальное решение

$$\mathcal{X} = \{\mathcal{X}_k(t)\}_{k \in \mathbb{Z}} \in W_{2,\gamma}^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma)$$

задачи Коши для системы (18).

Доказательство. Подстановка (20) в уравнение (18) приводит к

$$Y_k + (\partial_t + ik + K_e/\varepsilon) S_k^+ T_{X,k}^{-1}(e^{ikt}) + \\ + \frac{1}{\varepsilon} 2ik(w_e + u_e) \int_0^t e^{ik(t-s)} S_k^+ T_{X,k}^{-1}(e^{iks}) ds = \\ = \mathcal{F}_{\mathcal{X},k} + \frac{1}{\varepsilon} (w_e + u_e) Q_{z,k}^+ e^{ikt},$$

где $Q_k^{(1)}(X, X) = 0$ согласно (19) и (22).

Осталось выделить секулярный член из интеграла

$$\frac{1}{\varepsilon} 2ik(w_e + u_e) \int_0^t e^{ik(t-s)} S_k^+ T_{u,k}^{-1}(e^{ikt}) ds = \\ = S_k^+ e^{iks} - \partial_t S_k^+ T_{u,k}^{-1}(e^{iks}) + (ik + K_e/\varepsilon) S_k^+ T_{u,k}^{-1}(e^{iks}).$$

Учитывая (21), получаем

$$Y_k = F_{Y,k},$$

где

$$F_{Y,k} = \mathcal{F}_{\mathcal{X},k} - 2(K_e/\varepsilon + ik)S_k^+ T_{X,k}^{-1}(e^{iks}) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$$

при $\sigma > 3/2$.

Стандартные методы оценок [10] вместе с результатами раздела 6 об интегро-дифференциальном операторе $T_{u,k}$ завершают доказательство теоремы. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. Переход к переменной Y_k существенно упрощает задачу по сравнению с двумерной моделью Бродвелла, где исходная задача для коэффициентов Фурье сводится к нелинейному интегральному уравнению для последовательности функций $Y = \{Y_{k,l}, (k,l) \in \mathbb{Z}^2\}$ при ненулевых k и l (см. [11]).

12. Аппроксимационное решение. Введем последовательность аппроксимационных решений следующим образом:

$$\begin{aligned} \sqrt{u_e}u^{(m)}(x,t) &= \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}_0 \\ |k| \leq m}} (\sqrt{u_e}u_k^0 e^{-K_e t/\varepsilon} + S_k^+ T_{u,k}^{-1}(e^{ikt}) + T_{u,k}^{-1}(\sqrt{u_e}Y_k)) e^{ikx}; \\ \sqrt{v_e}v^{(m)}(x,t) &= \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}_0 \\ |k| \leq m}} \left(F_{v,k} + T_{u,k}^{-1}(\sqrt{u_e}Y_k) + 2ik \int_0^t e^{ik(t-s)} T_{u,k}^{-1}(\sqrt{u_e}Y_k) ds \right) e^{ikx}; \\ \sqrt{w_e}w^{(m)}(x,t) &= - \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}_0 \\ |k| \leq m}} (\sqrt{u_e}u_k^0 e^{-K_e t/\varepsilon} + S_k^+ T_{u,k}^{-1}(e^{ikt}) + T_{u,k}^{-1}(\sqrt{u_e}Y_k)) e^{ikx}; \\ \sqrt{z_e}z^{(m)}(x,t) &= \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}_0 \\ |k| \leq m}} \left(F_{z,k} - T_{u,k}^{-1}(\sqrt{u_e}Y_k) - 2ik \int_0^t e^{ik(t-s)} T_{u,k}^{-1}(\sqrt{u_e}Y_k) ds \right) e^{ikx}. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда аппроксимационное решение при $m \rightarrow \infty$ слабо сходится к слабому решению задачи Коши для одномерной модели Бродвелла.

Доказательство представляет собой существенное упрощение соответствующего доказательства из работы [10].

Заключение. Проведенное исследование позволяет сформулировать следующие основные выводы.

1. Установлено, что рассогласование правой и левой частей в системе (2) создает принципиальные препятствия для построения аннуляторов секкулярных членов в рамках метода Фурье.
2. Для одномерной модели (2) обнаружены универсальные условия согласования:

$$\sqrt{v_e}v_k^0 + \sqrt{z_e}z_k^0 = 0, \quad \sqrt{w_e}w_k^0 + \sqrt{u_e}u_k^0 = 0, \quad k \in \mathbb{Z}_0, \quad (24)$$

которые должны выполняться для всех проекций системы.

3. Доказано, что наличие условий (24) существенно ограничивает класс допустимых начальных данных, описывающих периодические возмущения положения равновесия.

4. Разработанный метод позволяет построить решение задачи только для регулярного процесса, когда начальные условия удовлетворяют ограничениям (24).
5. Для преодоления выявленных ограничений требуется разработка специальной процедуры регуляризации, которая будет представлена в одной из следующих публикаций.

Таким образом, в данной работе установлены фундаментальные ограничения, связанные с особенностями структуры одномерной модели Бродвелла, и намечены пути их преодоления в рамках дальнейших исследований.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнено без финансовой поддержки.

Благодарность. Автор глубоко признателен профессору Е. В. Радкевичу за ценные обсуждения, критические замечания и постоянную поддержку на всех этапах выполнения данного исследования. Конструктивные советы и экспертные рекомендации профессора Е. В. Радкевича существенно способствовали совершенствованию результатов, представленных в данной работе.

Библиографический список

1. Больцман Л. *Лекции по теории газов*. М.: Гостехиздат, 1956. 554 с.
2. Годунов С. К., Султангазин У. М. О дискретных моделях кинетического уравнения Больцмана // *УМН*, 1971. Т. 26, № 3(159). С. 3–51.
3. Султангазин У. М. *Дискретные нелинейные модели уравнения Больцмана*. Алма-Ата: Наука, 1985. 192 с.
4. Euler N., Steeb W.-H. Painlevé test and discrete Boltzmann equations // *Australian J. Phys.*, 1989. vol. 42, no. 1. pp. 1–10. DOI: <https://doi.org/10.1071/PH89000>.
5. Broadwell J. E. 401–414 // *J. Fluid Mech.*, 1964. vol. 19, no. 3. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112064000817>.
6. Веденяпин В. В. *Кинетические уравнения Больцмана и Власова*. М.: Физматлит, 2001. 112 с.
7. Васильева О. А., Духновский С. А., Радкевич Е. В. О локальном равновесии уравнения Карлемана // *Пробл. мат. анализа*, 2015. Т. 78. С. 165–190. EDN: **XRDZZV**.
8. Радкевич Е. В. О существовании глобальных решений задачи Коши для дискретных кинетических уравнений // *Пробл. мат. анализа*, 2011. Т. 62. С. 109–151.
9. Радкевич Е. В. О существовании глобальных решений задачи Коши для дискретных кинетических уравнений. II // *Пробл. мат. анализа*, 2012. Т. 63. С. 145–188.
10. Васильева О. А., Духновский С. А., Радкевич Е. В. О природе локального равновесия уравнений Карлемана и Годунова–Султангазина / *Труды Седьмой Международной конференции по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям* (Москва, 22–29 августа, 2014). Часть 3 / СМФН, Т. 60. М.: РУДН, 2016. С. 23–81. EDN: **PGBIKG**.
11. Radkevich E. V., Vasil'eva O. A., Filippov G. A. On stabilization rate of solutions of the Cauchy problem for the two-dimensional kinetic Broadwell equation with periodic initial data (a regular process) // *Eurasian J. Math. Comp. Appl.*, 2025 (to appear).
12. Платонова К. С., Боровских А. В. Групповой анализ одномерного уравнения Больцмана. Инварианты и проблема замыкания моментной системы // *ТМФ*, 2021. Т. 208, № 3. С. 367–386. EDN: **ERFSOE**. DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf10098>.

MSC: 35Q70, 35B35, 35L65

On the stabilization rate of periodic perturbations of equilibrium states for the one-dimensional Broadwell kinetic equation

G. A. Filippov

Moscow State University of Civil Engineering

(National Research University),

26, Yaroslavskoye sh., Moscow, 129337, Russian Federation.

Abstract

The paper deals with a procedure for constructing solutions to the problem of stabilizing periodic perturbations of equilibrium states in the one-dimensional Broadwell model. The solution procedure employs the Fourier method to solve the system of equations for the Fourier coefficients of the variables. In the Fourier transform space, the system reduces to a projection onto a single variable, enabling expression of the remaining Fourier coefficients $u_{k,l}$, $v_{k,l}$, $w_{k,l}$ through $z_{k,l}$ by using state equations.

The linearization of the z -projection plays a crucial role in studying the stabilization rate, representing in this case an integro-differential operator described in terms of the Paley–Wiener theorem. The discrepancy between the right and left sides of the one-dimensional system creates obstacles in the Fourier method when constructing annihilators of secular terms for the corresponding projection. These obstacles prevent obtaining solutions for arbitrary initial data describing periodic perturbations of the equilibrium position. It is established that the arising obstacles are identical for different projections.

Keywords: Broadwell kinetic equations, one-dimensional Broadwell system, systems of equations, stabilization rate of periodic perturbations.

Received: 16th April, 2025 / Revised: 9th June, 2025 /Accepted: 10th June, 2025 / First online: 30th June, 2025

Competing interests. The author declares no competing interests.

Authors' contributions. I take full responsibility for submitting the final manuscript version for publication. The final version of the manuscript has been approved by me.

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes
Research Article

© The Author(s), 2025

© Samara State Technical University, 2025 (Compilation, Design, and Layout)

   The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Filippov G. A. On the stabilization rate of periodic perturbations of equilibrium states for the one-dimensional Broadwell kinetic equation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2025, vol. 29, no. 2, pp. 363–380. EDN: NDYKAL. DOI: [10.14498/vsgtu2186](https://doi.org/10.14498/vsgtu2186) (In Russian).

Author's Details:

Georgiy A. Filippov  <https://orcid.org/0009-0005-0054-1696>

Postgraduate Student; Dept. of Higher Mathematics; e-mail: g.philippov@yandex.ru

Funding. The research received no specific grant from funding agencies in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

Acknowledgments. The author is deeply grateful to Professor E. V. Radkevich for valuable discussions, critical comments, and continuous support throughout all stages of this research. Professor Radkevich's constructive advice and expert recommendations significantly contributed to improving the results presented in this work.

References

1. Boltzmann L. *Lektsii po teorii gazov* [Lectures on the Theory of Gases]. M., Gostekhizdat, 1956, 554 pp. (In Russian)
2. Godunov S. K., Sultangazin U. M. On discrete models of the kinetic Boltzmann equation, *Russian Math. Surveys*, 1971, vol. 26, no. 3, pp. 1–56. DOI: <https://doi.org/10.1070/RM1971v026n03ABEH003822>.
3. Sultanagazin U. M. *Diskretnyye nelineynyye modeli uravneniya Bol'tsmana* [Discrete Non-linear Models of the Boltzmann Equation]. Alma-Ata, Nauka, 1985, 192 pp. (In Russian)
4. Euler N., Steeb W.-H. Painlevé test and discrete Boltzmann equations, *Australian J. Phys.*, 1989, vol. 42, no. 1, pp. 1–10. DOI: <https://doi.org/10.1071/PH89000>.
5. Broadwell J. E. 401–414, *J. Fluid Mech.*, 1964, vol. 19, no. 3. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112064000817>.
6. Vedenyapin V. V. *Kineticheskiye uravneniya Bol'tsmana i Vlasova* [Kinetic Boltzmann and Vlasov Equations]. Moscow, Fizmatlit, 2001, 112 pp. (In Russian)
7. Radkevich E. V., Vasil'eva O. A., Dukhnovskii S. A. Local equilibrium of the Carleman equation, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2015, vol. 207, no. 2, pp. 296–323. EDN: WOEYSR. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-015-2373-x>.
8. Radkevich E. V. The existence of global solutions to the Cauchy problem for discrete kinetic equations, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2012, vol. 181, no. 2, pp. 232–280. EDN: PDKBIR. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-012-0683-9>.
9. Radkevich E. V. The existence of global solutions to the Cauchy problem for discrete kinetic equations. II, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2012, vol. 181, no. 5, pp. 701–750. EDN: PDLYGZ. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-012-0711-9>.
10. Vasil'eva O. A., Dukhnovskii S. A., Radkevich E. V. On the nature of local equilibrium in the Carleman and Godunov–Sultangazin equations, In: *Proceedings of the Seventh International Conference on Differential and Functional-Differential Equations* (Moscow, August 22–29, 2014). Part 3, CMFD, 60. Moscow, PFUR, 2016, pp. 23–81 (In Russian). EDN: PGBIKG.
11. Radkevich E. V., Vasil'eva O. A., Filippov G. A. On stabilization rate of solutions of the Cauchy problem for the two-dimensional kinetic Broadwell equation with periodic initial data (a regular process), *Eurasian J. Math. Comp. Appl.*, 2025 (to appear).
12. Platonova K. S., Borovskih A. V. Group analysis of the one-dimensional Boltzmann equation. Invariants and the problem of moment system closure, *Theoret. and Math. Phys.*, 2021, vol. 208, no. 3, pp. 1165–1181. EDN: KNHКСI. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0040577921090014>.