



УДК 539.374

## Структурно-механическая модель для описания эффекта Портевена–Ле Шателье

К. А. Мехоношин, П. В. Трусев

Пермский национальный исследовательский политехнический университет,  
факультет прикладной математики и механики,  
Россия, 614013, Пермь, ул. пр. Поздеева, 11.

### Аннотация

Несмотря на почти 200-летнюю историю с момента открытия возникновения в определенных режимах деформирования большинства сплавов эффекта прерывистой пластичности, последний продолжает оставаться привлекательным объектом исследования механиков и физиков. Развиваются как экспериментальные, так и теоретические исследования, на основе которых разрабатываются различные математические модели, краткий обзор которых приведен в настоящей работе. С учетом стохастического характера проявления эффекта Портевена–Ле Шателье, включая пространственно-временное распределение полос сдвига, изменение отклика при монотонном деформировании, обнаруживаемые в натурных и численных экспериментах по деформированию образцов из различных сплавов, значительный интерес представляют также методы математического описания и анализа получаемых результатов.

На стадии разработки структуры формулируемой модели проанализированы физические механизмы, ответственные за возникновение эффекта Портевена–Ле Шателье. В качестве основных приняты два механизма: 1) формирование скоплений атомов примесей в окрестностях временно остановленных на препятствиях дислокаций; 2) захват атомов легирующих элементов медленно движущимися дислокациями. Для описания эффекта предложена модель одноосного растяжения стержня при кинематическом нагружении, основанная на структурно-механическом подходе. Сформулированы основные определяющие и эволюционные соотношения, базирующиеся на описании физических механизмов взаимодействия дислокаций с примесными атомами.

Механика деформируемого твердого тела

Научная статья

© Коллектив авторов, 2025

© СамГТУ, 2025 (составление, дизайн, макет)

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Мехоношин К. А., Трусев П. В. Структурно-механическая модель для описания эффекта Портевена–Ле Шателье // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2025. Т. 29, № 3. С. 448–471. EDN: [XMFRLQ](#). DOI: [10.14498/vsgtu2229](https://doi.org/10.14498/vsgtu2229).

Сведения об авторах

*Кирилл Алексеевич Мехоношин*  <https://orcid.org/0009-0002-8549-3141>

бакалавр; лаборант-исследователь; лаб. многоуровневого моделирования конструкционных и функциональных материалов; e-mail: [ctrl1111@vk.com](mailto:ctrl1111@vk.com)

*Петр Валентинович Трусев*  <https://orcid.org/0000-0001-8997-5493>

доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой; каф. математического моделирования систем и процессов; e-mail: [tpv@pstu.ru](mailto:tpv@pstu.ru)

Приведена двухэтапная процедура идентификации модели, основанная на методах статистического анализа и вейвлет-преобразования. Представлены результаты применения идентифицированной модели для описания рассматриваемого эффекта при деформировании образцов из сплава Al–Mg.

**Ключевые слова:** эффект Портевена–Ле Шателье, гипотеза Коттрелла, структурно-механический подход, определяющие соотношения, идентификация и верификация моделей, статистический анализ, вейвлет-анализ.

Получение: 22 мая 2025 г. / Исправление: 4 июня 2025 г. /

Принятие: 10 июня 2025 г. / Публикация онлайн: 15 июля 2025 г.

---

**Введение.** Металлические сплавы, из которых большинство изделий изготавливаются методами термомеханической обработки, служат основными конструкционными материалами в большинстве отраслей промышленности. Необходимость решения многочисленных прикладных задач обусловлена постоянными требованиями к совершенствованию существующих и разработке новых технологий обработки сплавов для создания изделий с заданными эксплуатационными характеристиками. Особую актуальность представляет построение физически обоснованных конститутивных моделей (КМ) для исследования процессов термомеханической обработки многофазных сплавов, включая материалы, проявляющие эффект прерывистой пластичности при определенных температурно-скоростных условиях деформирования.

Фундаментальная часть решения данной проблемы включает детальный анализ и описание физических механизмов, реализующихся при термомеханической обработке сплавов, в частности, взаимодействия дислокаций с атомами примесей. В окрестностях дислокаций, временно остановленных у препятствий различной природы, формируются так называемые «атмосферы» примесных атомов [1], создающие дополнительное сопротивление их движению. Этот механизм является основной причиной возникновения эффекта прерывистой пластичности (эффекта Портевена–Ле Шателье [2], ЭПЛШ) в определенных диапазонах скоростей деформирования и температур, математическому моделированию которого посвящено настоящее исследование.

Внешнее проявление ЭПЛШ при деформировании сплавов характеризуется образованием полос сдвига — областей локализованных деформаций. Наличие таких полос на поверхности готовых изделий существенно увеличивает их шероховатость, снижает усталостную прочность, коррозионную стойкость и аэродинамические характеристики. Поэтому исследование возникновения ЭПЛШ, особенно на завершающих стадиях технологических процессов обработки сплавов, имеет важное практическое значение.

Целью данной работы является разработка конститутивной модели неупругого деформирования сплавов, учитывающей эффект Портевена–Ле Шателье на основе физических механизмов его возникновения. Математическая модель создана в рамках структурно-механического подхода и учитывает два основных механизма, обуславливающих ЭПЛШ:

- диффузию атомов примесей (как решеточную, так и туннельную), применяемую к временно остановленным дислокациям;

– захват примесных атомов медленно движущимися дислокациями.

В силу нелинейности и жесткости полученной системы уравнений особое внимание уделено алгоритму решения, основанному на пошаговой процедуре с итерациями на каждом шаге, реализуемой с использованием схем неявных методов Рунге—Кутты. Разработана процедура повышения эффективности вычислений при идентификации и верификации моделей прерывистой пластичности, основанная на принципе разделения параметров модели по рассматриваемым физическим механизмам неупругого деформирования. Для анализа результатов применены методы статистического и вейвлет-анализа, позволяющие адекватно описывать стохастическую природу скачков напряжений. Приведены результаты применения идентифицированной модели для описания одноосного кинематического нагружения стержня из сплава Al–Mg с учетом ЭПЛШ.

**1. Краткий обзор работ по исследованию прерывистой пластичности.** Большинство существующих моделей ЭПЛШ и методов их идентификации основано на результатах экспериментальных исследований. Значительная часть экспериментальных данных получена в ходе опытов по одноосному нагружению образцов различных сплавов [3–7]. Многочисленные исследования посвящены анализу возникновения и распространения полос локализованной деформации вдоль образцов с использованием оптических методов [8–11].

В литературе принято выделять три основных типа проявления ЭПЛШ: А, В и С [12]. Для большинства сплавов наблюдается последовательное изменение типа эволюции полос сдвига от А к В и затем к С при уменьшении скорости деформации и/или повышении температуры. Более подробное описание указанных и других экспериментальных методов исследования ЭПЛШ, а также их результатов представлено в обзорной статье [13]. В настоящей работе основное внимание уделено анализу существующих моделей описания прерывистой пластичности.

**1.1. Некоторые существующие модели для описания ЭПЛШ.** В данном обзоре кратко приведены основные идеи и соотношения наиболее известных работ по моделированию эффекта Портевена—Ле Шателье, модификация которых продолжается до настоящего времени. С более подробным анализом публикаций по данной тематике можно ознакомиться в обзорных работах [14, 15].

**Модель Пеннинга.** Модель Пеннинга [16] занимает особое место среди первых математических моделей, основанных на постулировании участка отрицательной скоростной чувствительности. В данной модели процессы на микроструктурном уровне не рассматриваются, что позволяет отнести ее к классу макрофеноменологических конститутивных моделей. Основу модели составляют два ключевых соотношения: уравнение, связывающее характеристики напряженно-деформированного состояния (НДС) образца с внешней жесткой нагрузкой, и определяющее соотношение (ОС):

$$\sigma = h\varepsilon + F(\dot{\varepsilon}),$$

где  $h$  — коэффициент деформационного упрочнения;  $\sigma$ ,  $\varepsilon$ ,  $\dot{\varepsilon}$  — соответственно одноосные напряжение, деформация и скорость деформации;  $F(\dot{\varepsilon})$  — слагаемое, характеризующее скоростную чувствительность материала.

Анализ модели показывает, что при монотонном возрастании функции  $F$  по мере увеличения скорости деформации деформация сохраняет однородный характер. Однако в случае, когда зависимость  $F(\dot{\epsilon})$  с ростом скорости проходит через свой максимум и минимум, локальная скорость деформации начинает проявлять скачкообразное поведение, что соответствует неоднородности деформации при ЭПЛШ. В рамках данного исследования была предложена  $N$ -образная зависимость компоненты напряжения течения  $F(\dot{\epsilon})$  от скорости деформации  $\dot{\epsilon}$ . Модель позволила получить качественно удовлетворительные результаты для частных случаев единичной скачущей и непрерывно движущейся полосы деформации. Впоследствии функция Пеннинга, постулирующая участок отрицательной скоростной чувствительности, нашла широкое применение в различных модификациях у других исследователей ЭПЛШ, поскольку эта модель одной из первых обеспечила математически строгое и достаточно простое описание возникновения прерывистости деформаций. Однако следует отметить, что в модели Пеннинга физические механизмы эффекта Портевена–Ле Шателье не получили должного внимания.

**Модель Коттрелла–Билби.** Физическое обоснование возникновения прерывистой пластичности было заложено в моделях, учитывающих взаимодействие дислокаций с примесными атомами в рамках концепции динамического деформационного старения, предложенной Коттреллом. В работах [1, 17] с энергетических позиций рассмотрено формирование атмосферы примесных атомов в окрестности одиночной краевой дислокации. В основе модели лежит предположение о пропорциональности скорости примесных атомов градиенту энергии взаимодействия атома примеси с дислокацией. Было получено соотношение для концентрации примесных атомов вблизи медленно движущейся краевой дислокации, основанное на уравнении неразрывности и разложении скорости группы атомов примесей на две компоненты: обусловленную взаимодействием с полем напряжений дислокации и диффузионную.

Анализ данного соотношения показал, что при медленном движении дислокаций атомы примесей смещаются в тыльную часть области атмосферы, создавая силу сопротивления, которая тормозит движение дислокаций и пропорциональна скорости их скольжения. Дальнейшее развитие теории Коттреллом в 1958 году привело к получению оценок критических скоростей движения и напряжений, при достижении которых атмосферы могут перемещаться вместе с дислокациями. Эти идеи и результаты легли в основу большинства последующих физически обоснованных моделей ЭПЛШ. Однако следует отметить, что модель Коттрелла–Билби в исходной формулировке дает приемлемую точность только на начальной стадии процесса старения, что стимулировало разработку различных модификаций данного подхода с учетом дополнительных механизмов взаимодействия примесных атомов с дислокациями.

**КЕМС-модель.** Наиболее известной моделью описания ЭПЛШ, основанной на гипотезе Коттрелла, по праву считается модель Кубина–Эстрина–Маккормика (КЕМС-модель) [18–21]. В 1985 году Эстрин и Кубин выдвинули идею использования модели нижнего структурного уровня для определения функции Пеннинга  $F(\dot{\epsilon})$ . Реализация этой идеи была осуществлена в 1990 году, когда авторами была предложена двухуровневая модель одно-

осного нагружения, учитывающая динамическое деформационное старение и эволюцию плотностей мобильных и иммобильных дислокаций (дислокаций леса).

Следует отметить, что ранее дислокационная модель, учитывающая взаимодействие нескольких типов дислокаций, была предложена Анантакришной [22]. Однако в отличие от КЕМС-модели она формулировалась в терминах средних по образцу значений НДС без учета неоднородности деформаций, характерной для ЭПЛШ. В модели Эстрина и Кубина изменение напряжения течения определяется суммой двух вкладов: первый описывает взаимодействие дислокаций с дислокациями леса, а второй, называемый «напряжением трения»  $f$ , отражает взаимодействие мобильных дислокаций с примесными атомами.

Процесс формирования атмосфер моделируется через диффузию примесей к мобильным дислокациям, временно остановленным на иммобильных дислокациях. Время остановки  $t_w$  связано с плотностью дислокаций леса и скоростью деформации соотношением, вывод которого основан на уравнении Орована. Используя введенное время  $t_w$ , авторы предложили соотношение для напряжения трения  $f$ , развивающее идеи Коттрелла—Билби.

Дальнейшее развитие подход Кубина и Эстрина получил в работах Маккормика (1988–1995 гг.), где напряжение течения представлено как аддитивная величина, включающая три компоненты: сопротивление кристаллической решетки, вклад от скорости деформации и вклад от концентрации примесных атомов в атмосферах Коттрелла  $c_d$ . Концентрация  $c_d$  определяется эволюционным уравнением, основанным на модели Коттрелла—Билби и содержащим параметр эффективного времени старения  $t_a$ . В случае квазистационарного деформирования предполагается равенство  $t_a = t_w$ . Авторами также предложена зависимость для скоростного упрочнения как функции накопленной деформации, скорости деформации и концентрации  $c_d$ .

Представленные работы стали основой для многочисленных последующих моделей и их модификаций в области исследования ЭПЛШ [23–28]. КЕМС-модель была успешно интегрирована в известные пакеты метода конечных элементов и широко используется для анализа ЭПЛШ.

**Модель Лебедкина.** Особый интерес с точки зрения полученных результатов представляет нелинейная механическая модель М. А. Лебедкина [29, 30], рассматривающая одноосно деформируемый кристаллический образец как одномерную связанную цепочку элементов, пластическое течение которых описывается локальным нелинейным определяющим соотношением. В основе модели лежит модифицированное уравнение Пеннинга. Для учета неоднородности пластического течения образец моделируется в виде одномерной цепочки из  $N$  блоков, представляющих элементарные области с квазиоднородной деформацией.

Упругое взаимодействие между элементами характеризуется коэффициентом  $K$ . На основе этих предположений автор ввел модифицированное определяющее соотношение для  $i$ -го блока:

$$\sigma = h\varepsilon_i + F(\dot{\varepsilon}_i) + K((\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}) + (\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1})),$$

где  $\varepsilon_i$  — локальная деформация  $i$ -го блока, а добавочный член  $K((\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}) + (\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}))$  описывает упругое взаимодействие между элементами. Замыка-

ние системы уравнений осуществляется путем добавления соотношения, описывающего условие деформации: задаваемая испытательной машиной скорость деформирования представляется как сумма скорости упругой деформации системы «машина – образец» и средней скорости пластического течения образца. Неоднородность свойств при решении системы учитывается через случайный выбор начальных значений локальных скоростей деформации.

По утверждению автора, предложенная модель адекватно описывает пространственную картину локализации деформации и статистическое распределение амплитуд скачков напряжений. Однако использование функции Пеннинга приводит к потере физической интерпретации процесса, которая могла бы быть учтена через дополнительные законы без введения отдельного дислокационного уровня для описания взаимодействия дислокаций с примесями.

**Современные подходы.** Помимо моделей, основанных на взаимодействии дислокаций с примесными атомами, следует упомянуть модели, учитывающие другие типы взаимодействий, например, чисто дислокационные. Модель для чистых монокристаллов, предложенная Мигелем, Вейсом и Грассо [31], учитывает дальнотянствующие взаимодействия дислокаций, движущихся в вязкой среде. В этой модели со временем происходит самоорганизация дислокаций в структуры, разделяющие их на три популяции: остановившиеся, медленно движущиеся и быстрые.

Примечательно, что данная модель способна качественно описать ЭПЛШ без учета динамического деформационного старения. Однако полученные результаты противоречат экспериментальным данным, согласно которым в чистых металлах эффект не наблюдается. Существуют также модели, учитывающие взаимодействия дислокаций с включениями вторичных фаз [32], однако они не получили такого развития, как модели, основанные на гипотезе Коттрелла.

За последнее десятилетие в рамках макрофеноменологического подхода к моделированию ЭПЛШ появилось лишь небольшое количество работ, предлагающих новые подходы. Среди них можно выделить модели для описания одноосного деформирования алюминиевых сплавов [33,34], основанные на модификации модели MTS [35], а также модель пластического деформирования вольфрамовых сплавов с использованием кинетического метода Монте–Карло для описания эволюции атомарной структуры в условиях ЭПЛШ [36–38].

Однако все указанные модели ориентированы на описание поведения конкретных сплавов в узком диапазоне воздействий. Для создания более универсальных моделей ЭПЛШ необходимо явное описание эволюции структуры материалов на различных масштабных уровнях. В этом контексте наиболее перспективным представляется применение физически обоснованных многоуровневых моделей [39]. В настоящее время существует лишь ограниченное число моделей описания ЭПЛШ в рамках многоуровневого подхода, с которыми можно ознакомиться в обзоре [40]. Большинство из них относятся к классу прямых упруговязкопластических моделей.

Подводя итоги краткого обзора существующих моделей для рассмотрения ЭПЛШ, отметим, что модель, представленная в данной работе, развивает идеи стержневых моделей и формулируется в рамках структурно-механического подхода с учетом ключевых физических механизмов. В отличие от многих рассмотренных подходов, в нашей модели не используется искусственно



вводимая отрицательная скоростная чувствительность материала через различные модификации уравнения Пеннинга. Вместо этого эволюция напряжения течения основывается на качественном анализе физических процессов, обуславливающих возникновение прерывистой пластичности.

**1.2. Работы по статистическому анализу ЭПЛШ и использованию вейвлет-преобразования.** При построении моделей для описания ЭПЛШ особое значение приобретают вопросы их идентификации и верификации, непосредственно влияющие на корректность и точность предлагаемых моделей. Основная сложность при решении этих задач обусловлена стохастическим характером реакции материала на монотонные воздействия, проявляющимся в скачкообразных изменениях напряжений или деформаций при кинематическом или силовом нагружении соответственно. В связи с этим возникает необходимость применения методов статистического анализа для исследования распределения амплитуд характерных скачков напряжений и/или деформаций, возникающих при ЭПЛШ [30, 41].

В указанных работах представлены результаты экспериментов по одноосному растяжению моно- и поликристаллов сплавов Al-Mg с постоянной скоростью перемещения захватов жесткой испытательной машины при повышенных температурах. Для каждого фиксированного набора параметров нагружения объем случайной выборки составлял от 100 до 300 скачков напряжений. Основная тенденция изменения статистических характеристик скачков напряжений заключается в постепенном переходе от колоколообразных распределений, близких к нормальному, к асимметричным монотонно убывающим распределениям, аналогичным степенным законам, при увеличении скорости деформации (см. рис. 1) и/или снижении температуры (при переходе между режимами  $C \rightarrow B \rightarrow A$ ).

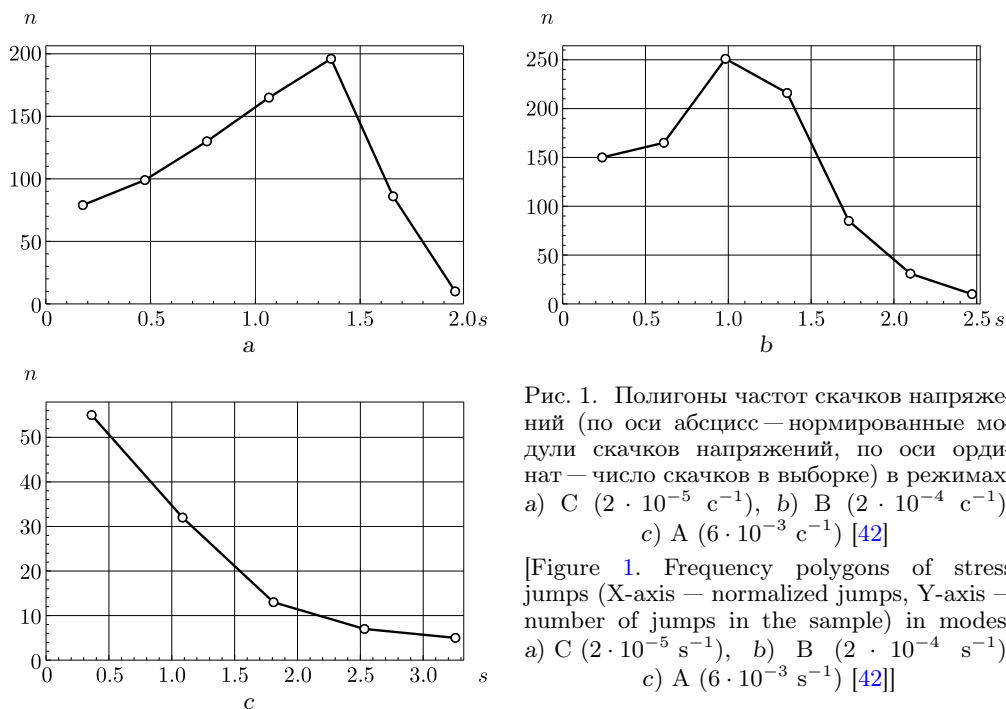


Рис. 1. Полигоны частот скачков напряжений (по оси абсцисс — нормированные модули скачков напряжений, по оси ординат — число скачков в выборке) в режимах: а) С ( $2 \cdot 10^{-5} \text{ c}^{-1}$ ), б) В ( $2 \cdot 10^{-4} \text{ c}^{-1}$ ), в) А ( $6 \cdot 10^{-3} \text{ c}^{-1}$ ) [42]

[Figure 1. Frequency polygons of stress jumps (X-axis — normalized jumps, Y-axis — number of jumps in the sample) in modes: а) С ( $2 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ ), б) В ( $2 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ ), в) А ( $6 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ ) [42]]

Ключевым аспектом анализируемых работ, определяющим все последующие выводы о статистических свойствах ЭПЛШ, является процедура нормировки выборки скачков напряжений. Экспериментальные данные свидетельствуют о систематической зависимости средней амплитуды скачков напряжений от накопленной деформации, что позволяет рассматривать модули скачков напряжений  $\Delta\sigma(\varepsilon)$  как случайный процесс, зависящий от параметра  $\varepsilon$ .

Предложенная авторами нормировка может быть интерпретирована как представление данного случайного процесса в виде произведения случайной и детерминированной составляющих:

$$\Delta\sigma(\varepsilon) = f(\varepsilon) \cdot s,$$

где  $s$  — случайные нормированные модули скачков напряжений, а  $f(\varepsilon)$  — детерминированная функция, зависящая от накопленной деформации  $\varepsilon$  и характеризующая деформационное упрочнение материала. В качестве  $f(\varepsilon)$  могут использоваться различные аппроксимации: линейная регрессия зависимости скачков напряжений от накопленной деформации (использована на рис. 1), сглаженная экспериментальная кривая напряженно-деформированного состояния и другие.

Нормировка скачков напряжений существенно упрощает и ускоряет формирование репрезентативной выборки, поскольку позволяет перейти от анализа случайного процесса к исследованию случайной величины. Выборку нормированных скачков можно получить по данным одного эксперимента, тогда как для анализа исходных скачков требуется проведение сотен однотипных испытаний для получения сечений случайного процесса, что значительно увеличивает временные и материальные затраты. В связи с этим в настоящей работе анализ амплитуд скачков напряжений также основан на их нормировке.

Важным аспектом анализа данных ЭПЛШ является исследование частотных характеристик скачков напряжений, существенно влияющих на вид кривой НДС. В данном контексте частота понимается как количество скачков напряжений, возникающих на единицу накопленной деформации.

Для учета эволюции частотных характеристик скачков напряжений в процессе неупругого деформирования в работе [43] предложено использовать вейвлет-преобразование исходной кривой НДС [44]. Выбрав оптимальный для решаемой задачи материнский вейвлет, можно получить значения дискретного вейвлет-преобразования  $W(a, \Delta\varepsilon)$  для анализируемого прерывистого графика, где  $a$  — масштабный коэффициент (обратный определенной частоте),  $\Delta\varepsilon$  — сдвиг по деформации. Величина  $W(a, \Delta\varepsilon)$  достаточно точно характеризует частотный спектр скачков напряжений, локализованный в конкретный момент неупругого деформирования.

**2. Постановка задачи.** Математическая модель для описания ЭПЛШ создана в рамках структурно-механического подхода. Рассматривается случай одноосного растяжения стержневого образца при кинематическом нагружении. Образец представляется совокупностью одноосно нагружаемых вязкопластических элементов (в количестве  $N$  шт.) и тремя упругими элементами, которые соединены последовательно между собой (см. рис. 2).



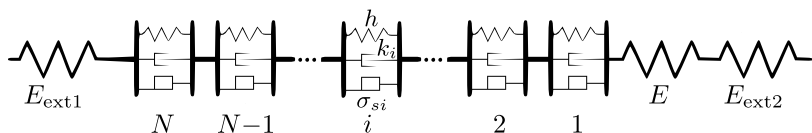


Рис. 2. Структурная схема модели [Figure 2. Structural scheme of the model]

Два внешних упругих элемента моделируют поведение нагружающей системы, а третий элемент — «пружина» с жесткостью  $E$  — описывает упругие свойства самого стержня. Каждый из вязкопластических элементов имитирует процессы, сопровождающие пластическое деформирование: деформационное упрочнение и механизмы взаимодействия дислокаций с примесными атомами.

Данные элементы характеризуются пределом текучести  $\sigma_s$ , до достижения которого они ведут себя как абсолютно жесткое тело. Пределы текучести элементов отличаются друг от друга и в отсчетной конфигурации распределены по некоторому случайному закону, учитывающему неоднородность физических характеристик исследуемого образца.

После достижения  $\sigma_s$  при последующем неупругом деформировании напряжение течения в элементе изменяется в зависимости от накопленных деформаций и скорости деформации. Первый процесс эволюции напряжения течения описывает механизм монотонного деформационного упрочнения. Второй процесс, связанный со скоростными эффектами, непосредственно относится к моделируемому эффекту прерывистой пластичности и характеризуется описанной далее немонотонной зависимостью. Законы изменения напряжения течения в каждом упруговязкопластическом элементе одинаковы, однако их значения в различные моменты деформирования могут заметно отличаться, что характеризует неоднородность деформации исследуемого образца.

Для вывода соотношений модели использовались гипотеза аддитивности упругой и неупругой составляющих одноосных деформации  $\varepsilon$  и скорости деформации  $d$  ( $d = \dot{\varepsilon}$ ), условия активации и согласования пластического деформирования, правила структурно-механического подхода, гипотеза Коттрелла для описания ЭПЛШ, отраженная в эволюции напряжения течения структурного элемента.

В качестве основных механизмов ЭПЛШ приняты:

- 1) формирование «атмосфер Коттрелла» в окрестностях временно остановленных на препятствиях дислокаций [1];
- 2) захват атомов легирующих элементов медленно движущимися дислокациями [45].

В качестве основного определяющего соотношения выступает закон Гука в скоростной форме:

$$\dot{\sigma} = E^*(d - d^{\text{in}}), \quad \sigma(0) = 0,$$

$$d^{\text{in}} = \sum_{i=1}^N d_i^{\text{in}}, \quad E^* = \frac{EE_0}{E + E_0},$$

где  $E^*$  — общий модуль Юнга системы «машина ( $E_0$ ) — образец ( $E$ )»;  $d^{\text{in}}$  — неупругая составляющая скорости деформации;  $N$  — число вязкопластиче-

ских элементов;  $d_i^{\text{in}}$  — неупругая составляющая скорости деформации  $i$ -го элемента. Поведение  $i$ -го элемента подчиняется вязкопластическому ОС типа

$$\dot{d}_i^{\text{in}} = H(\sigma - \sigma_{\text{cr}i})H(\dot{\sigma} - \dot{\sigma}_{\text{cr}i})d_0\left(\frac{\sigma}{\sigma_{\text{cr}i}}\right)^m, \quad (1)$$

где  $\sigma_{\text{cr}i}$  — напряжение течения  $i$ -го элемента;  $d_0$  — скорость неупругой деформации при  $\sigma = \sigma_{\text{cr}i}$ ;  $m$  — параметр скоростной чувствительности;  $H(x)$  — функция Хэвисайда, использованная для учета условий активации и согласования пластического деформирования.

Закон эволюции критического напряжения  $i$ -го элемента с применением гипотезы аддитивности вкладов в изменение напряжения течения от деформационного упрочнения и динамического деформационного старения имеет вид

$$\dot{\sigma}_{\text{cr}i} = \left(h_1 + \frac{h_2}{2\sqrt{\varepsilon_i^{\text{in}}}}\right)\dot{d}_i^{\text{in}} + \dot{k}_i(t, d_i^{\text{in}}, \varepsilon_i^{\text{in}}, c, \theta), \quad \sigma_{\text{cr}i}(0) = \sigma_{si}, \quad (2)$$

где  $\sigma_{si}$  — начальный предел текучести  $i$ -го элемента;  $h_1, h_2$  — параметры деформационного упрочнения (Па);  $k_i(t, d_i^{\text{in}}, \varepsilon_i^{\text{in}}, c, \theta)$  — функционал, описывающий изменения напряжения течения за счет взаимодействия дислокаций с атмосферами Коттрелла;  $c$  — концентрация примесей;  $\theta$  — температура.

Эволюция второго слагаемого напряжения течения  $k_i$  описывается на основе принципа аддитивности вкладов физических механизмов ЭПЛШ. При локальных скоростях деформации элементов, не превышающих пороговое значение  $d_{\text{cr}}$  (связанное со скоростью диффузии примесных атомов  $v_{\text{dif}}$ ), проявляются два механизма увеличения напряжения: диффузия и захват атомов примеси движущимися дислокациями.

В этих механизмах, отвечающих за рост концентрации захваченных атомов, необходимо также учитывать, что для дислокаций и примесных атомов в зависимости от их собственных характеристик (вектора Бюргерса, атомного радиуса) есть предельная концентрация насыщения облаков  $c_s$ , а следовательно — есть ограничение  $k_{\text{max}}(c_s)$  по величине напряжения сопротивления.

Также интенсивность захвата легирующих элементов должна зависеть от количества уже осевших на дислокациях примесных атомов, так как силы их взаимодействия убывают по мере насыщения атмосфер Коттрелла. После достижения в элементе критической скорости деформации  $d_{\text{cr}}$  напряжение течения убывает за счет отрыва дислокаций от образовавшихся атмосфер Коттрелла.

При отрыве примесей от дислокаций их концентрация в атмосферах не может стать меньше средней концентрации примесных атомов в образце. Данное условие описывается следующим ограничением:  $k_i$  не должно принимать отрицательных значений. Таким образом, для определения скорости изменения дополнительного напряжения течения принимается следующий вид соотношения:

$$\begin{aligned} \dot{k}_i(t, d_i^{\text{in}}, \varepsilon_i^{\text{in}}, c, \theta) = & \left(1 - \left[\frac{k_i}{k_{\text{max}}(c_s)}\right]^q\right)H(d_{\text{cr}}(v_{\text{dif}}) - d_i^{\text{in}})[C_{\text{dif}} + C_{\text{cap}}] - \\ & - H(k_i)H(d_i^{\text{in}} - d_{\text{cr}}(v_{\text{dif}}))C_{\text{sep}}, \quad k_i(0, 0, 0, c, \theta) = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $C_{\text{dif}}$  — слагаемое, отражающее упрочнение за счет механизмов диффузии примесных атомов к медленно движущимся или временно остановленным дислокациям;  $C_{\text{cap}}$  — слагаемое, описывающее упрочнение по механизму сбора атомов движущимися дислокациями;  $C_{\text{sep}}$  — слагаемое, отражающее разупрочнение при реализации механизма отрыва дислокаций от атмосфер Коттрелла;  $q$  — параметр модели.

Накопленные пластические деформации коррелируют с плотностью дислокаций, возрастание которой ведет к увеличению роли туннельной диффузии в процессах неупругого деформирования. Поэтому принимается, что диффузия примесных атомов возрастает с накоплением неупругих деформаций  $\varepsilon_i^{\text{in}}$  в  $i$ -ом элементе.

Наращение диффузии за счет туннельного механизма происходит до определенного стационарного значения, приближение к которому становится ощутимым при преодолении неупругой деформации порогового значения  $\varepsilon_{\text{cr}}$ , характеризующего известное из экспериментальных данных явление насыщения плотности дислокаций.

Рассматриваемый вклад диффузионного механизма в изменение критического напряжения явно зависит от концентрации примесных атомов в сплаве  $c$  и их коэффициента диффузии  $D$  ( $\text{м}^2/\text{с}$ ), связанного с температурой  $\theta$  законом Аррениуса.

Исходя из всех рассмотренных физических зависимостей можно предложить следующий вид слагаемого  $C_{\text{dif}}$  из (3):

$$C_{\text{dif}} = c_{\text{dif}} \frac{c}{c_s} \frac{D_0}{l^2} \left[ \exp \left( -\frac{E_a}{\kappa \theta} \right) + \zeta \exp \left( -\frac{\varepsilon_{\text{cr}}}{\varepsilon_i^{\text{in}}} \right) \right], \quad (4)$$

где  $D_0$  — решеточный коэффициент диффузии ( $\text{м}^2/\text{с}$ );  $E_a$  — энергия активации диффузии;  $\kappa$  — постоянная Больцмана;  $l$  — характерное расстояние между дислокациями;  $\zeta$  — параметр, характеризующий скорость возрастания коэффициента диффузии с ростом деформации;  $c_{\text{dif}}$  — параметр упрочнения за счет механизма диффузии (Па).

Дополнительное изменение напряжения течения за счет сбора свободных атомов примеси медленно движущимися дислокациями зависит от пройденного ими пути, отражением которого на макроуровне являются накопленные неупругие деформации. На этом основании предполагается, что скорость возрастания  $k_i$  за счет этого механизма зависит от скорости неупругой деформации рассматриваемого элемента.

Данный способ увеличения количества примесных атомов в атмосферах Коттрелла напрямую зависит от концентрации примесей в материале  $c$  и потенциальной энергии взаимодействия дислокаций с атомами  $U$ .

Рассматриваемый механизм также зависит от температуры, при повышении которой увеличивается кинетическая энергия атомов примесей и возрастает амплитуда колебаний атомов основного материала.

Данные изменения ведут к «размытию» энергетического барьера, который легирующие элементы должны преодолеть, чтобы оторваться от дислокаций.

Представленные зависимости отражены в слагаемом  $C_{\text{cap}}$  из (3):

$$C_{\text{cap}} = c_{\text{cap}} \frac{c}{c_s} \frac{U}{\kappa \theta} d_i^{\text{in}}, \quad (5)$$

где  $c_{\text{сеп}}$  — параметр упрочнения за счет механизма сбора примесей (Па).

Механизм отрыва дислокаций от примесей приводит к уменьшению  $k_i$  тем стремительнее, чем больше скорость деформации элемента. Его воздействие явным образом зависит от температуры по тем же соображениям, что и для предыдущего механизма (5).

Слагаемое  $C_{\text{сеп}}$ , входящее в (3), принимает следующий вид:

$$C_{\text{сеп}} = c_{\text{сеп}} \frac{\theta}{\theta_{\text{melt}}} \left( \frac{d_i^{\text{in}}}{d_{\text{cr}}} \right)^{\beta} d_i^{\text{in}}, \quad (6)$$

где  $\theta_{\text{melt}}$  — температура плавления материала;  $c_{\text{сеп}}$  — параметр разупрочнения за счет механизма отрыва дислокаций (Па);  $\beta$  — параметр модели.

Все введенные в описанных соотношениях параметры модели определяются по экспериментальным данным в процедуре идентификации модели.

В силу нелинейности соотношений в полученной системе уравнений и ее существенной жесткости численный алгоритм решения задачи основан на пошаговой процедуре, реализуемой с использованием схем неявных методов Рунге–Кутты (трехстадийный метод Гаусса–Лежандра) [46]. Подбор шага интегрирования осуществляется с учетом активации (при упрочнении) и деактивации (при разупрочнении) вязкопластических элементов на рассматриваемом шаге.

**3. Метод идентификации модели.** Идентификация разработанной модели для описания ЭПЛШ выполнена в соответствии со следующей процедурой. Экспериментальные и модельные кривые  $\sigma$ – $\varepsilon$ , отражающие проявление рассматриваемого эффекта, могут быть представлены в виде суперпозиции двух составляющих: осредненной (гладкой), характеризующей механизмы деформационного упрочнения, и немонотонной, описывающей взаимодействие атомов примеси с дислокациями, включая возникновение отрицательной скоростной чувствительности материала.

Для повышения эффективности минимизации расхождений между экспериментальными и модельными данными рекомендуется двухэтапная процедура:

- 1) идентификация параметров модели без учета механизмов ЭПЛШ;
- 2) идентификация параметров, описывающих ЭПЛШ, с использованием параметров, определенных на первом этапе.

Для реализации этого подхода диаграмму НДС следует разделить на два набора данных: осредненную гладкую кривую и характеристики скачков напряжения.

Гладкую составляющую экспериментальной и модельной кривых  $\sigma$ – $\varepsilon$  в области неупругого деформирования можно аппроксимировать функцией

$$\bar{\sigma}(\varepsilon) = b_0 \sqrt{\varepsilon} + b_1 \varepsilon + b_2, \quad \varepsilon \geq \sigma_s / E, \quad (7)$$

где  $b_i$  — коэффициенты, определяемые методом наименьших квадратов,  $i = 0, 1, 2$ .

Второй набор данных, характеризующий скачки напряжения, может быть получен путем их статистического анализа и вейвлет-анализа локальных частотных характеристик. Рассматривая модули скачков напряжения  $\Delta\sigma$  как выборку случайной величины, распределенной по заданному закону, можно

получить их достаточную статистику  $T(s)$  методом максимального правдоподобия:

$$T(s) = \{\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_p\}, \quad s = \Delta\sigma / \Delta\bar{\sigma}, \quad (8)$$

где  $\hat{\theta}_i$  — оценки параметров выбранного  $p$ -параметрического распределения,  $i = \overline{1, p}$ ;  $s$  — нормированная на величину линейной регрессии скачков напряжения  $\Delta\bar{\sigma}$  выборка модулей скачков напряжения  $\Delta\sigma$ .

Таким образом, экспериментальные и модельные данные могут быть представлены следующими параметрами:  $b_0, b_1, b_2$  — коэффициенты для построения осредненной кривой  $\sigma$ – $\varepsilon$ ;  $T(s)$  — достаточная статистика нормированных скачков напряжения  $s$ ;  $W(a, \Delta\varepsilon)$  — вейвлет-преобразование прерывистой кривой НДС.

Целевая функция  $J_1$  первого этапа идентификации параметров  $d_0, m, h_1, h_2$  из уравнений (1) и (2) представляет собой норму разности между результатами численного моделирования (с «отключенными» членами, отвечающими за ЭПЛШ) и гладкой аппроксимацией экспериментальных данных, полученной по формуле (7):

$$J_1(d_0, m, h_1, h_2) = \|\bar{\sigma}_{\text{exp}}(\varepsilon) - \sigma_{\text{num}}(\varepsilon; d_0, m, h_1, h_2)\| \rightarrow \min. \quad (9)$$

На втором этапе идентификации, направленном на определение параметров, связанных с описанием прерывистой пластичности ( $d_{\text{cr}}, k_{\text{max}}, c_{\text{dif}}, c_{\text{cap}}, c_{\text{sep}}, \beta, \zeta, \varepsilon_{\text{cr}}$  из уравнений (3), (4), (5) и (6)), в качестве целевых функций предлагается использовать векторную норму разности между достаточными статистиками скачков напряжения и чебышевскую норму разности вейвлет-функций экспериментальных данных и численного решения с учетом механизмов ЭПЛШ:

$$\begin{aligned} J_{2.1}(d_{\text{cr}}, k_{\text{max}}, c_{\text{dif}}, c_{\text{cap}}, c_{\text{sep}}, \beta, \zeta, \varepsilon_{\text{cr}}) &= \\ &= \|T_{\text{exp}}(s) - T_{\text{num}}(s; d_{\text{cr}}, k_{\text{max}}, c_{\text{dif}}, c_{\text{cap}}, c_{\text{sep}}, \beta, \zeta, \varepsilon_{\text{cr}})\| \rightarrow \min, \\ J_{2.2}(d_{\text{cr}}, k_{\text{max}}, c_{\text{dif}}, c_{\text{cap}}, c_{\text{sep}}, \beta, \zeta, \varepsilon_{\text{cr}}) &= \\ &= \max_D |W_{\text{exp}}(a, \Delta\varepsilon) - W_{\text{num}}(a, \Delta\varepsilon; d_{\text{cr}}, k_{\text{max}}, c_{\text{dif}}, c_{\text{cap}}, c_{\text{sep}}, \beta, \zeta, \varepsilon_{\text{cr}})| \rightarrow \min, \end{aligned} \quad (10)$$

$$D = \left\{ (a, \Delta\varepsilon) : a \in \mathbb{R}, \Delta\varepsilon \in \left[ 0, \int_0^T \dot{\varepsilon} dt \right] \right\}.$$

Задача оптимизации второго этапа (10) является многокритериальной [47], что требует применения специальных алгоритмов идентификации. Первый этап (9) реализуется методом Нелдера—Мида. После его завершения найденные параметры фиксируются и используются на втором этапе, алгоритм которого представляет собой итерационный перебор наборов оставшихся параметров модели в узлах заданной многомерной сетки. На каждой итерации выполняются следующие операции: локализация областей последующего поиска; параллельная обработка выделенных областей; сгущение сетки в перспективных областях. Окончательный выбор решения среди множества оптимальных результатов осуществляется исследователем.

**4. Результаты и их анализ.** Идентификация параметров модели выполнена на основе экспериментальных данных одноосного растяжения образца из сплава АМг6м при комнатной температуре со скоростью деформирования  $\dot{\varepsilon} = 5.4 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$  (режим В), представленных в работе [43]. Процедура идентификации включала два этапа, соответствующих критериям (9) и (10).

В качестве статистических характеристик скачков напряжения (8) использованы выборочное среднее и среднеквадратичное отклонения. Следует отметить, что данная статистика не является исчерпывающей, поскольку распределение скачков напряжения во всех режимах ЭПЛШ существенно отличается от нормального. Поиск адекватного многопараметрического распределения, описывающего стохастические свойства скачков ЭПЛШ, выходит за рамки настоящего исследования. Для вейвлет-анализа на втором этапе идентификации применен вейвлет Добеши второго порядка.

На рис. 3 представлены результаты расчетов с использованием идентифицированной модели, а в таблице приведены значения ее основных параметров.

Максимальное отклонение между экспериментальными и модельными кривыми НДС составляет 9 МПа. Среднее значение скачков напряжений имеет хорошее соответствие, однако их среднеквадратичное отклонение в численных результатах оказалось почти в два раза меньше по сравнению с экспериментальными данными. Погрешность в оценке средней частоты возникновения скачков напряжений составляет менее 1 % от экспериментальных значений. Особенно точно модель описывает критическую деформацию, при которой начинают возникать скачки. На основании проведенного анализа можно заключить, что идентифицированная модель демонстрирует хорошие результаты как по критерию адекватности, так и по точности описания экспериментальных данных.

#### Идентифицированные параметры модели [Identified model parameters]

| $N$ | $d_0, 10^{-5} \text{ 1/s}$    | $m$     | $h_1, \text{ МПа}$            | $h_2, \text{ МПа}$            | $k_{\max}, \text{ МПа}$       | $d_{\text{cr}}, 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ |
|-----|-------------------------------|---------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-----------------------------------------|
| 45  | 7.3                           | 94      | -2365                         | 8556                          | 40                            | 9.7                                     |
| $q$ | $c_{\text{dif}}, \text{ МПа}$ | $\zeta$ | $\varepsilon_{\text{cr}}, \%$ | $c_{\text{cap}}, \text{ МПа}$ | $c_{\text{sep}}, \text{ МПа}$ | $\beta$                                 |
| 100 | 4625                          | 12.3    | 0.15                          | 3041                          | 86521                         | 106                                     |

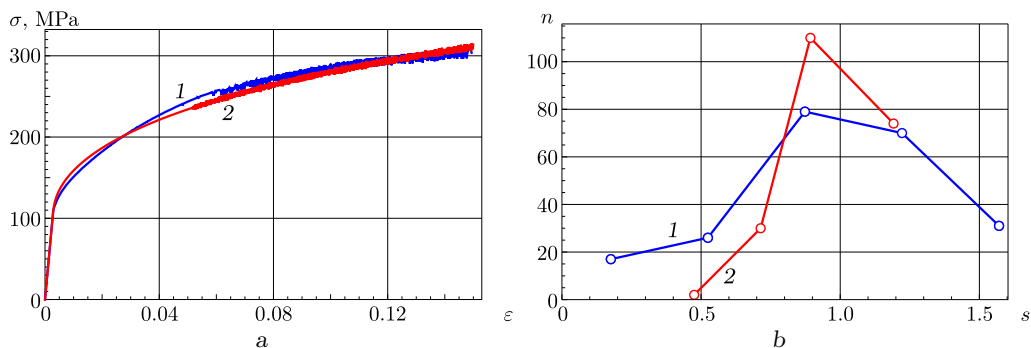


Рис. 3. Результаты идентификации модели: а) диаграммы напряженно-деформированного состояния; б) полигоны частот (1 — экспериментальные данные; 2 — модельные результаты)

Figure 3. Model identification results: а) stress-strain diagrams; б) frequency polygons (1 — experimental data; 2 — simulation results)]



Дополнительно проведена верификация представленной модели для оценки области ее применимости и предсказательных способностей. В ходе этой работы возникли определенные трудности с поиском подходящих экспериментальных данных по одноосному растяжению того же сплава алюминия (АМгбм) при других параметрах нагружения, которые можно было бы качественно разделить на два предложенных набора данных для их последующего анализа. В связи с этим для целей верификации был выбран другой сплав алюминия с магнием, обладающий отличающимися характеристиками деформационного упрочнения, которые необходимо было учесть в модели.

Для сравнения с результатами моделирования использованы экспериментальные данные о жестком одноосном растяжении образца из сплава Al–3.2%Mg при комнатной температуре со скоростью деформации  $\dot{\epsilon} = 2.38 \times 10^{-4} \text{ с}^{-1}$  (режим В), представленные в работе [48]. В структуре модели были соответствующим образом изменены следующие параметры: заданная скорость деформации; модуль Юнга; предел текучести; два параметра деформационного упрочнения ( $h_1$  и  $h_2$  из уравнения (2)); концентрация примесей и температура плавления сплава. Все остальные параметры модели оставались неизменными после процедуры идентификации для образцов из сплава АМгбм. Результаты верификации модели представлены на рис. 4.

Численные результаты, полученные в ходе верификации, демонстрируют удовлетворительное соответствие экспериментальным данным. Максимальное отклонение по сглаженной кривой напряжений составляет приблизительно 10 МПа. Наблюдаются некоторые различия между статистическими характеристиками скачков напряжений. Наиболее существенные расхождения отмечаются в частотной картине — средняя частота возникновения скачков напряжений в модели примерно в 1.5 раза превышает экспериментальное значение. Критическая деформация в численных результатах достигается несколько раньше, чем в эксперименте. На основании проведенного анализа можно сделать вывод, что рассматриваемая модель, как и большинство стержневых моделей, применима в достаточно узком диапазоне характеристик материалов. Для удовлетворительного моделирования поведения материалов с существенно отличающимся химическим составом требуется полное переопределение всех параметров модели.

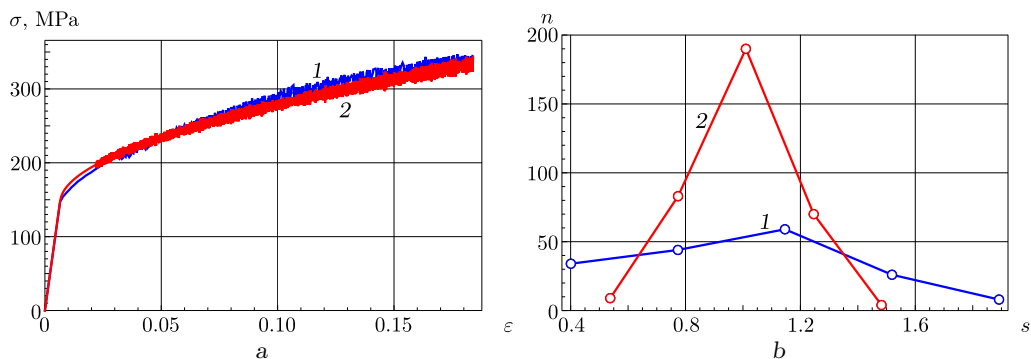


Рис. 4. Результаты верификации модели: а) диаграммы напряженно-деформированного состояния; б) полигоны частот (1 — экспериментальные данные, 2 — модельные результаты)

[Figure 4. Model verification results: а) stress-strain diagrams; б) frequency polygons (1 — experimental data, 2 — simulation results)]

**5. Заключение.** В данной работе представлены детальное описание и математическая формулировка структурно-механической модели, учитывающей два физических механизма ЭПЛШ, а также процедуры и результаты идентификации и верификации модели на экспериментальных данных по одноосному растяжению сплавов алюминия.

Основные особенности разработанного подхода заключаются в следующем. С одной стороны, в рамках структурно-механического подхода относительно просто строятся модели для описания одноосного растяжения стержневых образцов. С другой стороны, в таком подходе достаточно сложно явно и физически корректно описать сложные механизмы неупругого деформирования. В представленной работе все соотношения системы уравнений вводятся на основе качественного физического описания основных процессов ЭПЛШ, что позволяет сохранить математическую простоту и компактность модели, характерные для выбранного подхода.

Необходимо особо отметить вычислительные особенности реализации данной модели, связанные с ее значительной численной жесткостью. Для преодоления этих трудностей требуется применение специальных неявных схем интегрирования системы дифференциальных уравнений.

Важное место в исследовании занимают вопросы анализа и представления результатов моделирования, которые играют ключевую роль на заключительных этапах работы. Предложена оригинальная двухэтапная процедура идентификации параметров модели, основанная на принципе расщепления по основным рассматриваемым физическим механизмам неупругого деформирования. В основе процедуры лежат строгие математические методы: аппроксимация экспериментальных данных; статистический анализ скачков напряжения; вейвлет-преобразование кривых деформирования.

Следует подчеркнуть, что поставленная задача идентификации параметров модели является многокритериальной, что накладывает специфику на алгоритмы ее решения.

Адекватность и эффективность предложенной математической модели, а также разработанных методов ее анализа подтверждены результатами идентификации и верификации на экспериментальных данных. В то же время представленная модель, как и большинство моделей данного класса, не является универсальной по отношению к материалу и режимам нагружения. Этот недостаток характерен для структурно-механических моделей и отсутствует в более сложных многоуровневых конститутивных моделях, которые, однако, в настоящее время практически не разработаны для описания эффекта прерывистой пластичности.

В связи с этим перспективным направлением дальнейших исследований представляется развитие многоуровневого подхода к моделированию ЭПЛШ, что позволит устранить указанные ограничения.

**Конкурирующие интересы.** У нас нет конфликта интересов в отношении авторства и публикации этой статьи.

**Авторский вклад и ответственность.** Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

**Финансирование.** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25–19–00785, <https://rscf.ru/project/25-19-00785/>.

## Библиографический список

1. Cottrell A. H. *Dislocations and plastic flow in crystals*. New York: Oxford Univ. Press., 1953. 223 pp.
2. Portevin A., Le Châtelier F. Sur un phenomene observe lors de l'essai de traction d'alliages en cours de transformation // *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1923. vol. 176. pp. 507–510.
3. McCormick P. G. The Portevin – Le Châtelier effect in an Al–Mg–Si alloy // *Acta Metall.*, 1971. vol. 19. pp. 463–471. DOI: [https://doi.org/10.1016/0001-6160\(71\)90170-2](https://doi.org/10.1016/0001-6160(71)90170-2).
4. Chen W., Chaturvedi M. C. On the mechanism of serrated deformation in aged Inconel 718 // *Mater. Sci. Eng. A.*, 1997. vol. 229, no. 1–2. pp. 163–168. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0921-5093\(97\)00005-1](https://doi.org/10.1016/S0921-5093(97)00005-1).
5. Estrin Y., Lebyodkin M. A. The influence of dispersion particles on the Portevin–Le Châtelier effect: from average particle characteristics to particle arrangement // *Mater. Sci. Eng. A*, 2004. vol. 387–389. pp. 195–198. EDN: LIJIZN. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.msea.2004.01.079>.
6. Wang W., Wu D., Chen R., Lou C. Influence of temperature and strain rate on serration type transition in NZ31 Mg alloy // *Trans. Nonferrous Met. Soc. China*, 2015. vol. 25, no. 11. pp. 3611–3617. DOI: [https://doi.org/10.1016/S1003-6326\(15\)64002-X](https://doi.org/10.1016/S1003-6326(15)64002-X).
7. Ren S. C., Morgeneyer T. F., Mazière M., et al. Portevin–Le Châtelier effect triggered by complex loading paths in an Al–Cu aluminium alloy // *Philos. Mag.*, 2018. vol. 99, no. 6. pp. 659–678. DOI: <https://doi.org/10.1080/14786435.2018.1550296>.
8. Zhang Q., Jiang Z., Jiang H., et al. On the propagation and pulsation of Portevin–Le Châtelier deformation bands: An experimental study with digital speckle pattern metrology // *Int. J. Plast.*, 2005. vol. 21, no. 11. pp. 2150–2173. EDN: MHSTVR. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2005.03.017>.
9. Halim H., Wilkinson D. S., Niewczas M. The Portevin–Le Châtelier (PLC) effect and shear band formation in an AA5754 alloy // *Acta Mater.*, 2007. vol. 55, no. 12. pp. 4151–4160. EDN: MCXUYX. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2007.03.007>.
10. Shibkov A. A., Zolotov A. E., Zheltov M. A., Denisov A. A. Morphological diagram of Savart–Masson bands of macrolocalized deformation // *Crystallogr. Rep.*, 2012. vol. 57 1. pp. 105–111. EDN: PDJGMJ. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1063774511030308>.
11. Mehenni M., Ait-Amokhtar H., Fressengeas C. Spatiotemporal correlations in the Portevin–Le Châtelier band dynamics during the type B–type C transition // *Mater. Sci. Eng. A.*, 2019. vol. 756. pp. 313–318. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.msea.2019.04.036>.
12. Russell B. Repeated yielding in tin bronze alloys // *Phil. Mag. J. Theor. Exp. Appl. Phys.*, 1963. vol. 88. pp. 615–630. DOI: <https://doi.org/10.1080/14786436308211160>.
13. Трусов П. В., Чечулина Е. А. Методы и результаты исследования эффекта Портевена–Ле Шателье: эксперименты и макрофеноменологические модели // *Вестн. Перм. нац. исслед. политехн. ун-та. Механика*, 2023. № 5. С. 99–131. EDN: OUROEB. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2023.5.09>.
14. Трусов П. В., Чечулина Е. А. Прерывистая текучесть: физические механизмы, экспериментальные данные, макрофеноменологические модели // *Вестн. Перм. нац. исслед. политехн. ун-та. Механика*, 2014. № 3. С. 186–232. EDN: SXDTPL. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2014.3.10>.
15. Трусов П. В., Чечулина Е. А. Прерывистая текучесть: модели, основанные на физических теориях пластичности // *Вестн. Перм. нац. исслед. политехн. ун-та. Механика*, 2017. № 1. С. 134–163. EDN: YJTWCX. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2017.1.09>.
16. Penning P. Mathematics of the Portevin–Le Châtelier effect // *Acta Metall.*, 1972. vol. 20, no. 10. pp. 1169–1175. DOI: [https://doi.org/10.1016/0001-6160\(72\)90165-4](https://doi.org/10.1016/0001-6160(72)90165-4).

17. Cottrell A. H., Jaswon M. A. Distribution of solute atoms round a slow dislocation // *Proc. R. Soc.*, 1949. vol. 199, no. 1056. pp. 104–114. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.1949.0128>.
18. Kubin L. P., Estrin Y. The Portevin–Le Châtelier effect in deformation with constant stress rate // *Acta Metall.*, 1985. vol. 33. pp. 397–407. DOI: [https://doi.org/10.1016/0001-6160\(85\)90082-3](https://doi.org/10.1016/0001-6160(85)90082-3).
19. Kubin L. P., Estrin Y. Evolution of dislocation densities and the critical conditions for the Portevin–Le Châtelier effect // *Acta Metall. Mater.*, 1990. vol. 38, no. 5. pp. 697–708. DOI: [https://doi.org/10.1016/0956-7151\(90\)90021-8](https://doi.org/10.1016/0956-7151(90)90021-8).
20. McCormick P. G. Theory of flow localization due to dynamic strain ageing // *Acta Metall.*, 1988. vol. 36, no. 12. pp. 3061–3067. DOI: [https://doi.org/10.1016/0001-6160\(88\)90043-0](https://doi.org/10.1016/0001-6160(88)90043-0).
21. Estrin Y., McCormick P. G. Modelling the transient flow behaviour of dynamic strain ageing materials // *Acta Metall. Mater.*, 1991. vol. 39, no. 12. pp. 2977–2983. DOI: [https://doi.org/10.1016/0956-7151\(91\)90030-5](https://doi.org/10.1016/0956-7151(91)90030-5).
22. Ananthakrishna G., Valsakumar M. C. Repeated yield drop phenomenon: a temporal dissipative structure // *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 1982. vol. 15, no. 12. pp. 171–175. DOI: <https://doi.org/10.1088/0022-3727/15/12/003>.
23. Mansouri L. Z., Coër J., Thuillier S., et al. Investigation of Portevin–Le Châtelier effect during Erichsen test // *Int. J. Mater. Form.*, 2020. vol. 13. pp. 687–697. EDN: VZCJHC. DOI: <https://doi.org/10.1007/s12289-019-01511-5>.
24. Ren S., Mazière M., Forest S., et al. A constitutive model accounting for strain ageing effects on work-hardening. Application to a C–Mn steel // *Comptes Rendus. Mécanique*, 2017. vol. 345, no. 12. pp. 908–921. EDN: YHDGGT. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.crme.2017.09.005>.
25. Lin Y. C., Yang H., He D.-G., Chen J. A physically-based model considering dislocation–solute atom dynamic interactions for a nickel-based superalloy at intermediate temperatures // *Mater. Des.*, 2019. vol. 183, 108122. EDN: CGDZVX. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2019.108122>.
26. Mazière M., Mortensen A., Forest S. Finite element simulation of the Portevin–Le Châtelier effect in highly reinforced metal matrix composites // *Philos. Mag.*, 2021. vol. 101, no. 12. pp. 1471–1489. EDN: HES CJH. DOI: <https://doi.org/10.1080/14786435.2021.1919331>.
27. Guillermin N., Besson J., Köster A., et al. Experimental and numerical analysis of the Portevin–Le Châtelier effect in a nickel-base superalloy for turbine disks application // *Int. J. Solids Struct.*, 2023. vol. 264, 112076. EDN: LAALBS. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2022.112076>.
28. Mäkinen T., Ovaska M., Laurson L., Alava M. J. Portevin–Le Châtelier effect: modeling the deformation bands and stress-strain curves // *J. Mater. Sci.: Mater. Theory*, 2022. vol. 6, 15. EDN: PCWWIB. DOI: <https://doi.org/10.1186/s41313-022-00044-w>.
29. Lebyodkin M., Brechet Y., Estrin Y., Kubin L. Statistical behaviour and strain localization patterns in the Portevin–Le Châtelier effect // *Acta Mater.*, 1996. vol. 44, no. 11. pp. 4531–4541. EDN: LDXZJN. DOI: [https://doi.org/10.1016/1359-6454\(96\)00076-6](https://doi.org/10.1016/1359-6454(96)00076-6).
30. Лебедкин М. А., Дунин–Барковский Л. Р. Критическое поведение и механизм корреляции деформационных процессов в условиях неустойчивости пластического течения // *ЖЭТФ*, 1998. Т. 113, № 5. С. 1816–1829; Lebyodkin M. A., Dunin–Barkowski L. R. Critical behavior and mechanism of strain correlations under conditions of unstable plastic flow // *J. Exp. Theor. Phys.*, 1998. vol. 86, no. 5. pp. 993–1000. EDN: LESKIX. DOI: <https://doi.org/10.1134/1.558571>.
31. Weiss J., Grasso J.-R., Miguel M.-C., et al. Complexity in dislocation dynamics: experiments // *Mater. Sci. Eng. A*, 2001. vol. 309–310. pp. 360–364. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0921-5093\(00\)01633-6](https://doi.org/10.1016/S0921-5093(00)01633-6).
32. Brechet Y., Estrin Y. On the influence of precipitation on the Portevin–Le Châtelier effect // *Acta Metall. Mater.*, 1995. vol. 43, no. 3. pp. 955–963. DOI: [https://doi.org/10.1016/0956-7151\(94\)00334-e](https://doi.org/10.1016/0956-7151(94)00334-e).

33. Kreyca J., Kozeschnik E. State parameter-based constitutive modelling of stress strain curves in Al–Mg solid solutions // *Int. J. Plast.*, 2018. vol.103. pp. 67–80. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2018.01.001>.
34. Xu J., Holmedal B., Hopperstad O. S., et al. Dynamic strain ageing in an AlMg alloy at different strain rates and temperatures: Experiments and constitutive modelling // *Int. J. Plast.*, 2022. vol.151, 103215. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2022.103215>.
35. Follansbee P. S., Kocks U. F. A constitutive description of the deformation of copper based on the use of the mechanical threshold stress as an internal state variable // *Acta Metall.*, 1988. vol.36, no.1. pp. 81–93. DOI: [https://doi.org/10.1016/0001-6160\(88\)90030-2](https://doi.org/10.1016/0001-6160(88)90030-2).
36. Zhao Y., Marian J. Direct prediction of the solute softening-to-hardening transition in W–Re alloys using stochastic simulations of screw dislocation motion // *Modelling Simul. Mater. Sci. Eng.*, 2018. vol.26, no.4, 045002. DOI: <https://doi.org/10.1088/1361-651X/aaecf>.
37. Zhao Y., Dezerald L., Marian J. Electronic structure calculations of oxygen atom transport energetics in the presence of screw dislocations in tungsten // *Metals*, 2019. vol.9, no.2. pp. 252. DOI: <https://doi.org/10.3390/met9020252>.
38. Zhao Y., Dezerald L., Pozuelo M., et al. Simulating the mechanisms of serrated flow in interstitial alloys with atomic resolution over diffusive timescales // *Nat. Commun.*, 2020. vol.11, 1227. EDN: JQHANB. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41467-020-15085-3>.
39. Трусов П. В., Швейкин А. И. Многоуровневые модели моно- и поликристаллических материалов: теория, алгоритмы, примеры применения. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2019. 605 с. DOI: <https://doi.org/10.15372/multilevel2019tpv>.
40. Трусов П. В., Герасимов Р. М. Методы и результаты исследования эффекта Портевена–Ле Шателье: физически-ориентированные континуальные и многоуровневые модели // *Вестн. Перм. нац. исслед. политехн. ун-та. Механика*, 2023. №5. С. 132–158. EDN: CMPXGG. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2023.5.10>.
41. Lebyodkin M., Brechet Y., Estrin Y., Kubin L. P. Dynamic strain ageing and stick-slip instabilities: A parallel approach and statistical study // *Solid State Phenom.*, 1995. vol.42–43. pp. 313–324. DOI: <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/SSP.42-43.313>.
42. Lebyodkin M. A., Kobelev N. P., Bougherira Y., et al. On the similarity of plastic flow processes during smooth and jerky flow: Statistical analysis // *Acta Mater.*, 2012. vol.60. pp. 3729–3740. EDN: PDOAED. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2012.03.026>.
43. Trusov P. V., Chechulina E. A., Gerasimov R. M., et al. Using the wavelet transform to process data from experimental studies of the discontinuous plastic deformation effect // *Fract. Struct. Integr.*, 2024. vol.68. pp. 159–174. EDN: QQSTVH. DOI: <https://doi.org/10.3221/igf-esis.68.10>.
44. Дьяконов В. П. *Вейвлеты. От теории к практике*. М.: Солон-Пресс, 2010. 399 с. EDN: ZUWWCX.
45. Петухов Б. В. Упрочнение кристаллов вследствие динамического старения дислокаций // *Кристаллография*, 2003. Т.48, №5. С. 873–878. EDN: ONUMGJ.
46. Dekker K., Verwer J. G. *Stability of Runge–Kutta Methods for Stiff Nonlinear Differential Equations* / CWI Monographs. vol. 2. Amsterdam: North-Holland, 1984. ix+307 pp.
47. Steuer R. E. *Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation, and Application*. Malabar, FL: Robert E. Krieger Publ., 1989. xxii+546 pp.
48. Ait-Amokhtar H., Fressengeas C., Bouabdallah K. On the effects of the Mg content on the critical strain for the jerky flow of Al–Mg alloys // *Mat. Sci. Eng. A*, 2015. vol.631. pp. 209–213. EDN: UWCHNZ. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.msea.2015.02.055>.

MSC: 74C15, 74D10

# Structural-mechanical model for describing the Portevin–Le Châtelier effect

*K. A. Mekhonoshin, P. V. Trusov*Perm State National Research Polytechnical University,  
Applied Mathematics and Mechanics Faculty,  
11, Pr. Pozdnev st., Perm, 614013, Russian Federation.

## Abstract

Despite nearly 200 years having passed since its discovery, the Portevin–Le Châtelier (PLC) effect—the phenomenon of discontinuous plastic flow observed in most alloys under specific deformation conditions—remains an active research area for both mechanicians and physicists. Current studies encompass experimental investigations and theoretical developments, leading to various mathematical models, a brief review of which is presented in this work. Given the stochastic nature of the PLC effect, including the spatiotemporal distribution of slip bands and response variations during monotonic loading (as evidenced by physical and numerical experiments on various alloy specimens), mathematical description and analysis methods for these phenomena are of particular scientific interest.

During the model development stage, we carried out a thorough analysis of the physical mechanisms underlying the PLC effect. Two primary mechanisms were identified: (1) the formation of impurity atom clusters around temporarily arrested dislocations at obstacles, and (2) the capture of alloying element atoms by slowly moving dislocations. For modeling this effect, we propose a structural-mechanical approach to describe uniaxial tensile loading of rod specimens under kinematic control. The formulation includes fundamental constitutive and evolutionary relations based on the physical mechanisms of dislocation-impurity interactions.

A novel two-stage model identification procedure is introduced, incorporating statistical analysis and wavelet transform methods. The paper

## Mechanics of Solids

### Research Article

© The Author(s), 2025

© Samara State Technical University, 2025 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

### Please cite this article in press as:

Mekhonoshin K. A., Trusov P. V. Structural-mechanical model for describing the Portevin–Le Châtelier effect, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2025, vol. 29, no. 3, pp. 448–471. EDN: **XMFRQLQ**. DOI: [10.14498/vsgtu2229](https://doi.org/10.14498/vsgtu2229) (In Russian).

### Authors' Details:

*Kirill A. Mekhonoshin*  <https://orcid.org/0009-0002-8549-314>

BSC; Laboratory Researcher; Lab. of Multilevel Modeling of Structural and Functional Materials; e-mail: [ctrl111@vk.com](mailto:ctrl111@vk.com)

*Peter V. Trusov*  <https://orcid.org/0000-0001-8997-5493>

Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Head of Department; Dept. of Mathematical Modeling of Systems and Processes;

e-mail: [tpv@pstu.ru](mailto:tpv@pstu.ru)

presents application results of the identified model for describing the PLC effect in Al–Mg alloy specimens, demonstrating its effectiveness in capturing the key features of discontinuous plastic flow.

**Keywords:** Portevin–Le Châtelier effect, Cottrell hypothesis, structural-mechanical approach, constitutive relations, model identification and verification, statistical analysis, wavelet analysis.

Received: 22<sup>nd</sup> May, 2025 / Revised: 4<sup>th</sup> June, 2025 /

Accepted: 10<sup>th</sup> June, 2025 / First online: 15<sup>th</sup> July, 2025

**Competing interests.** We have no conflict of interest regarding the authorship and publication of this article.

**Authors' contributions and responsibilities.** All authors participated in the development of the article's concept and in writing the manuscript. The authors bear full responsibility for submitting the final manuscript for publication. The final version of the manuscript was approved by all authors.

**Funding.** The research was funded by the Russian Science Foundation (project no. 25–19–00785), <https://rscf.ru/en/project/25-19-00785/>.

## References

1. Cottrell A. H. *Dislocations and plastic flow in crystals*. New York, Oxford Univ. Press., 1953, 223 pp.
2. Portevin A., Le Châtelier F. Sur un phenomene observe lors de l'essai de traction d'alliages en cours de transformation, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1923, vol. 176, pp. 507–510.
3. McCormick P. G. The Portevin – Le Châtelier effect in an Al–Mg–Si alloy, *Acta Metall.*, 1971, vol. 19, pp. 463–471. DOI: [https://doi.org/10.1016/0001-6160\(71\)90170-2](https://doi.org/10.1016/0001-6160(71)90170-2).
4. Chen W., Chaturvedi M. C. On the mechanism of serrated deformation in aged Inconel 718, *Mater. Sci. Eng. A.*, 1997, vol. 229, no. 1–2, pp. 163–168. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0921-5093\(97\)00005-1](https://doi.org/10.1016/S0921-5093(97)00005-1).
5. Estrin Y., Lebyodkin M. A. The influence of dispersion particles on the Portevin–Le Châtelier effect: from average particle characteristics to particle arrangement, *Mater. Sci. Eng. A*, 2004, vol. 387–389, pp. 195–198. EDN: LIJZN. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.msea.2004.01.079>.
6. Wang W., Wu D., Chen R., Lou C. Influence of temperature and strain rate on serration type transition in NZ31 Mg alloy, *Trans. Nonferrous Met. Soc. China*, 2015, vol. 25, no. 11, pp. 3611–3617. DOI: [https://doi.org/10.1016/S1003-6326\(15\)64002-X](https://doi.org/10.1016/S1003-6326(15)64002-X).
7. Ren S. C., Morgeneyer T. F., Mazière M., et al. Portevin–Le Châtelier effect triggered by complex loading paths in an Al–Cu aluminium alloy, *Philos. Mag.*, 2018, vol. 99, no. 6, pp. 659–678. DOI: <https://doi.org/10.1080/14786435.2018.1550296>.
8. Zhang Q., Jiang Z., Jiang H., et al. On the propagation and pulsation of Portevin–Le Châtelier deformation bands: An experimental study with digital speckle pattern metrology, *Int. J. Plast.*, 2005, vol. 21, no. 11, pp. 2150–2173. EDN: MHSTVR. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2005.03.017>.
9. Halim H., Wilkinson D. S., Niewczas M. The Portevin–Le Châtelier (PLC) effect and shear band formation in an AA5754 alloy, *Acta Mater.*, 2007, vol. 55, no. 12, pp. 4151–4160. EDN: MCXUYX. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2007.03.007>.
10. Shibkov A. A., Zolotov A. E., Zheltov M. A., Denisov A. A. Morphological diagram of Savart–Masson bands of macrolocalized deformation, *Crystallogr. Rep.*, 2012, vol. 57 1, pp. 105–111. EDN: PDJGMJ. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1063774511030308>.
11. Mehenni M., Ait-Amokhtar H., Fressengeas C. Spatiotemporal correlations in the Portevin–Le Châtelier band dynamics during the type B–type C transition, *Mater. Sci. Eng. A.*, 2019, vol. 756, pp. 313–318. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.msea.2019.04.036>.



12. Russell B. Repeated yielding in tin bronze alloys, *Phil. Mag. J. Theor. Exp. Appl. Phys.*, 1963, vol. 88, pp. 615–630. DOI: <https://doi.org/10.1080/14786436308211160>.
13. Trusov P. V., Chechulina E. A. Methods and results of studying the Portevin–Le Châtelier effect: experiments and macrophenomenological model, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2023, no. 5, pp. 99–131 (In Russian). EDN: OUROEB. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2023.5.09>.
14. Trusov P. V., Chechulina E. A. Serrated yielding: physical mechanisms, experimental dates, macrophenomenological models, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2014, no. 3, pp. 186–232 (In Russian). EDN: SXDTPL. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2014.3.10>.
15. Trusov P. V., Chechulina E. A. Serrated yielding: crystal viscoplastic models, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2017, no. 1, pp. 134–163 (In Russian). EDN: YJTWCX. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2017.1.09>.
16. Penning P. Mathematics of the Portevin–Le Châtelier effect, *Acta Metall.*, 1972, vol. 20, no. 10, pp. 1169–1175. DOI: [https://doi.org/10.1016/0001-6160\(72\)90165-4](https://doi.org/10.1016/0001-6160(72)90165-4).
17. Cottrell A. H., Jaswon M. A. Distribution of solute atoms round a slow dislocation, *Proc. R. Soc.*, 1949, vol. 199, no. 1056, pp. 104–114. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.1949.0128>.
18. Kubin L. P., Estrin Y. The Portevin–Le Châtelier effect in deformation with constant stress rate, *Acta Metall.*, 1985, vol. 33, pp. 397–407. DOI: [https://doi.org/10.1016/0001-6160\(85\)90082-3](https://doi.org/10.1016/0001-6160(85)90082-3).
19. Kubin L. P., Estrin Y. Evolution of dislocation densities and the critical conditions for the Portevin–Le Châtelier effect, *Acta Metall. Mater.*, 1990, vol. 38, no. 5, pp. 697–708. DOI: [https://doi.org/10.1016/0956-7151\(90\)90021-8](https://doi.org/10.1016/0956-7151(90)90021-8).
20. McCormick P. G. Theory of flow localization due to dynamic strain ageing, *Acta Metall.*, 1988, vol. 36, no. 12, pp. 3061–3067. DOI: [https://doi.org/10.1016/0001-6160\(88\)90043-0](https://doi.org/10.1016/0001-6160(88)90043-0).
21. Estrin Y, McCormick P. G. Modelling the transient flow behaviour of dynamic strain ageing materials, *Acta Metall. Mater.*, 1991, vol. 39, no. 12, pp. 2977–2983. DOI: [https://doi.org/10.1016/0956-7151\(91\)90030-5](https://doi.org/10.1016/0956-7151(91)90030-5).
22. Ananthakrishna G., Valsakumar M. C. Repeated yield drop phenomenon: a temporal dissipative structure, *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 1982, vol. 15, no. 12, pp. 171–175. DOI: <https://doi.org/10.1088/0022-3727/15/12/003>.
23. Mansouri L. Z., Coër J., Thuillier S., et al. Investigation of Portevin–Le Châtelier effect during Erichsen test, *Int. J. Mater. Form.*, 2020, vol. 13, pp. 687–697. EDN: VZCJHC. DOI: <https://doi.org/10.1007/s12289-019-01511-5>.
24. Ren S., Mazière M., Forest S., et al. A constitutive model accounting for strain ageing effects on work-hardening. Application to a C–Mn steel, *Comptes Rendus. Mécanique*, 2017, vol. 345, no. 12, pp. 908–921. EDN: YHDGGT. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.crme.2017.09.005>.
25. Lin Y. C., Yang H., He D.-G., Chen J. A physically-based model considering dislocation–solute atom dynamic interactions for a nickel-based superalloy at intermediate temperatures, *Mater. Des.*, 2019, vol. 183, 108122. EDN: CGDZVX. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2019.108122>.
26. Mazière M., Mortensen A., Forest S. Finite element simulation of the Portevin–Le Châtelier effect in highly reinforced metal matrix composites, *Philos. Mag.*, 2021, vol. 101, no. 12, pp. 1471–1489. EDN: HESCJH. DOI: <https://doi.org/10.1080/14786435.2021.1919331>.
27. Guillermin N., Besson J., Köster A., et al. Experimental and numerical analysis of the Portevin–Le Châtelier effect in a nickel-base superalloy for turbine disks application, *Int. J. Solids Struct.*, 2023, vol. 264, 112076. EDN: LAALBS. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2022.112076>.
28. Mäkinen T., Ovaska M., Laurson L., Alava M. J. Portevin–Le Châtelier effect: modeling the deformation bands and stress-strain curves, *J. Mater. Sci.: Mater. Theory*, 2022, vol. 6, 15. EDN: PCWWIB. DOI: <https://doi.org/10.1186/s41313-022-00044-w>.

29. Lebyodkin M., Brechet Y., Estrin Y., Kubin L. Statistical behaviour and strain localization patterns in the Portevin–Le Châtelier effect, *Acta Mater.*, 1996, vol. 44, no. 11, pp. 4531–4541. EDN: LDXZJN. DOI: [https://doi.org/10.1016/1359-6454\(96\)00076-6](https://doi.org/10.1016/1359-6454(96)00076-6).
30. Lebyodkin M. A., Dunin–Barkowskii L. R. Critical behavior and mechanism of strain correlations under conditions of unstable plastic flow, *J. Exp. Theor. Phys.*, 1998, vol. 86, no. 5, pp. 993–1000. EDN: LESKIX. DOI: <https://doi.org/10.1134/1.558571>.
31. Weiss J., Grasso J.-R., Miguel M.-C., et al. Complexity in dislocation dynamics: experiments, *Mater. Sci. Eng. A*, 2001, vol. 309–310, pp. 360–364. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0921-5093\(00\)01633-6](https://doi.org/10.1016/S0921-5093(00)01633-6).
32. Brechet Y., Estrin Y. On the influence of precipitation on the Portevin–Le Châtelier effect, *Acta Metall. Mater.*, 1995, vol. 43, no. 3, pp. 955–963. DOI: [https://doi.org/10.1016/0956-7151\(94\)00334-e](https://doi.org/10.1016/0956-7151(94)00334-e).
33. Kreyca J., Kozeschnik E. State parameter-based constitutive modelling of stress strain curves in Al–Mg solid solutions, *Int. J. Plast.*, 2018, vol. 103, pp. 67–80. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2018.01.001>.
34. Xu J., Holmedal B., Hopperstad O. S., et al. Dynamic strain ageing in an AlMg alloy at different strain rates and temperatures: Experiments and constitutive modelling, *Int. J. Plast.*, 2022, vol. 151, 103215. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2022.103215>.
35. Follansbee P. S., Kocks U. F. A constitutive description of the deformation of copper based on the use of the mechanical threshold stress as an internal state variable, *Acta Metall.*, 1988, vol. 36, no. 1, pp. 81–93. DOI: [https://doi.org/10.1016/0001-6160\(88\)90030-2](https://doi.org/10.1016/0001-6160(88)90030-2).
36. Zhao Y., Marian J. Direct prediction of the solute softening-to-hardening transition in W–Re alloys using stochastic simulations of screw dislocation motion, *Modelling Simul. Mater. Sci. Eng.*, 2018, vol. 26, no. 4, 045002. DOI: <https://doi.org/10.1088/1361-651X/aaecf>.
37. Zhao Y., Dezerald L., Marian J. Electronic structure calculations of oxygen atom transport energetics in the presence of screw dislocations in tungsten, *Metals*, 2019, vol. 9, no. 2, pp. 252. DOI: <https://doi.org/10.3390/met9020252>.
38. Zhao Y., Dezerald L., Pozuelo M., et al. Simulating the mechanisms of serrated flow in interstitial alloys with atomic resolution over diffusive timescales, *Nat. Commun.*, 2020, vol. 11, 1227. EDN: JQHANB. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41467-020-15085-3>.
39. Trusov P. V., Shveykin A. I. *Mnogourovnevyye modeli mono- i polikristallicheskikh materialov: teoriya, algoritmy, primery primeneniya* [Multiscale Models of Mono- and Polycrystalline Materials: Theory, Algorithms, Application Examples]. Novosibirsk, Publ. House of SB RAS, 2019, 605 pp. (In Russian). DOI: <https://doi.org/10.15372/multilevel2019tpv>.
40. Trusov P. V., Gerasimov R. M. Methods and results of the Portevin–Le Châtelier effect study: Physically oriented continuum and multilevel models, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2023, no. 5, pp. 132–158 (In Russian). EDN: CMPXGG. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2023.5.10>.
41. Lebyodkin M., Brechet Y., Estrin Y., Kubin L. P. Dynamic strain ageing and stick-slip instabilities: A parallel approach and statistical study, *Solid State Phenom.*, 1995, vol. 42–43, pp. 313–324. DOI: <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/SSP.42-43.313>.
42. Lebyodkin M. A., Kobelev N. P., Bougherira Y., et al. On the similarity of plastic flow processes during smooth and jerky flow: Statistical analysis, *Acta Mater.*, 2012, vol. 60, pp. 3729–3740. EDN: PDOAED. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2012.03.026>.
43. Trusov P. V., Chechulina E. A., Gerasimov R. M., et al. Using the wavelet transform to process data from experimental studies of the discontinuous plastic deformation effect, *Fract. Struct. Integr.*, 2024, vol. 68, pp. 159–174. EDN: QQSTVH. DOI: <https://doi.org/10.3221/igf-esis.68.10>.
44. D'yakonov V. P. *Veyvlety. Ot teorii k praktike* [Wavelets. From Theory to Practice]. Moscow, Solon-Press, 2010, 399 pp. (In Russian). EDN: ZUWCX.
45. Petukhov B. V. Hardening of crystals caused by the dynamic aging of dislocations, *Crystallogr. Rep.*, 2003, vol. 48, no. 5, pp. 813–818. EDN: LHZMKJ. DOI: <https://doi.org/10.1134/1.1612600>.

46. Dekker K., Verwer J. G. *Stability of Runge–Kutta Methods for Stiff Nonlinear Differential Equations*, CWI Monographs, vol. 2. Amsterdam, North-Holland, 1984, ix+307 pp.
47. Steuer R. E. *Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation, and Application*. Malabar, FL, Robert E. Krieger Publ., 1989, xxii+546 pp.
48. Ait-Amokhtar H., Fressengeas C., Bouabdallah K. On the effects of the Mg content on the critical strain for the jerky flow of Al–Mg alloys, *Mat. Sci. Eng. A*, 2015, vol. 631, pp. 209–213. EDN: UWCHNZ. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.msea.2015.02.055>.