



УДК 539.3

О квадратичных поправках определяющих уравнений для гемитропного микрополярного упругого тела

Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН,
Россия, 119526, Москва, просп. Вернадского, 101, корп. 1.

Аннотация

Исследуются вопросы построения кубических ашпроксимаций энергетических форм для потенциалов силовых и моментных напряжений гемитропных микрополярных упругих тел. Ранее были предложены Н/Е/А-представления для указанных энергетических форм. В частности, А-форма позволяет получить кубическую ашпроксимацию потенциала напряжений в виде полиномиальной линейной комбинации рациональных гемитропных инвариантов, некоторые из «псевдотензорных прообразов» которых обладают чувствительностью к зеркальным отражениям и инверсиям трехмерного пространства.

В рамках данного исследования получен полный неприводимый набор индивидуальных и совместных гемитропных целых рациональных алгебраических инвариантов для системы, состоящей из симметричных и антисимметричных частей асимметричного тензора деформаций и тензора изгиба-кручения. Полученный набор инвариантов используется для построения кубической энергетической формы гемитропного тела и определения полного набора из 37 определяющих постоянных. Выведены определяющие уравнения для силовых и моментных напряжений, включающие квадратичные поправки и справедливые в произвольной системе криволинейных координат.

Ключевые слова: алгебраический вес, псевдотензор, наномасштаб, микромасштаб, энергетическая форма, целочисленный рациональный ал-

Механика деформируемого твердого тела

Научная статья

© Коллектив авторов, 2025

© СамГТУ, 2025 (составление, дизайн, макет)

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. О квадратичных поправках определяющих уравнений для гемитропного микрополярного упругого тела // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2025. Т. 29, № 2. С. 274–293. EDN: **DZUMDJ**. DOI: [10.14498/vsgtu2144](https://doi.org/10.14498/vsgtu2144).

Сведения об авторах

Евгений Валерьевич Мурашкин  <https://orcid.org/0000-0002-3267-4742>

кандидат физико-математических наук; старший научный сотрудник; лаб. моделирования в механике деформируемого твердого тела; e-mail: murashkin@ipmnet.ru, evmurashkin@gmail.com

Юрий Николаевич Радаев  <https://orcid.org/0000-0002-0866-2151>

доктор физико-математических наук, профессор; ведущий научный сотрудник; лаб. моделирования в механике деформируемого твердого тела; e-mail: radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com

гебраический инвариант, неприводимая система инвариантов, кубическая аппроксимация, гемитропное микрополярное упругое тело.

Получение: 8 января 2025 г. / Исправление: 19 апреля 2025 г. /
Принятие: 28 апреля 2025 г. / Публикация онлайн: 5 мая 2025 г.

Введение и вводные замечания. Модели механики упругого поведения микрополярных сред основаны на энергетических формах микрополярных упругих потенциалов силовых и моментных напряжений [1–8]. Представления упругих потенциалов, необходимые для конкретной формулировки определяющих уравнений анизотропных микрополярных сред, в общем случае могут быть найдены исключительно при использовании формализма псевдотензорной алгебры [9–13], поскольку основная кинематическая переменная — вектор спинорных перемещений — обладает нечетным алгебраическим весом.¹ Аналогичное утверждение справедливо для тензора изгиба-кручения, которому естественным образом может быть приписан алгебраический вес ± 1 . Следует выделить три принципиально различных подхода к построению упругих потенциалов, подробно рассмотренных в работах авторов [10, 14–16].

Н-представление [14] наиболее естественно с точки зрения линейной тензорной алгебры и наиболее перспективно для разработки новых моделей анизотропных микрополярных тел. Данное представление наиболее простым образом позволяет осуществить редукцию анизотропного тела к полуизотропному, изотропному, ультрагемитропному или ультраизотропному случаям, а также провести обобщение на более сложные кубические определяющие законы. Ультрагемитропные и ультраизотропные тела объединяются общим термином «ультратропные» тела [17]. Их определяющие тензоры характеризуются постоянными компонентами [11, 18, 19] и могут быть непосредственно выявлены при анализе диаграмм Ная [20–26].

Е-представление энергетической формы [26, 27] основано на разложении асимметричных тензоров деформаций и изгиба-кручения на симметричную и антисимметричную составляющие с последующей заменой антисимметричных частей соответствующими векторами. Данный подход наиболее применим для анализа структур анизотропии с использованием диаграмм Ная [20–22], поскольку позволяет определить количество независимых определяющих постоянных и установить наличие или отсутствие алгебраических связей между ними [23–26].

А-представление [8, 29], в существенной степени основанное на результатах теории алгебраических инвариантов, представляет собой линейную комбинацию индивидуальных и совместных целых рациональных алгебраических инвариантов асимметричного тензора деформаций и градиента поля микроповоротов. Теоретические основы целых рациональных алгебраических инвариантов подробно изложены в классических монографиях [11, 19].

Настоящее исследование направлено на развитие подходов к построению энергетических форм для потенциалов силовых и моментных напряжений

¹В противном случае в указанных энергетических представлениях теряются члены, содержащие внутреннее произведение тензоров деформаций и изгиба-кручения.

микрополярных упругих тел. В рамках работы получена полная неприводимая система индивидуальных и совместных целых рациональных алгебраических инвариантов симметричных составляющих: асимметричного тензора деформаций, тензора изгиба-кручения и векторов, соответствующих их антисимметричным составляющим. Полученная система инвариантов применяется для построения кубической аппроксимации энергетической формы гемитропного/изотропного тела и определения соответствующих определяющих постоянных (механических моделей) микрополярной упругости. Следует отметить, что аналогичный подход для изотропного микрополярного тела рассматривался в работе [2], где было предложено шестиконстантное А-представление энергетической формы с последующим выводом основных уравнений микрополярной упругости.

Изложение существенно опирается на терминологию, обозначения, методы и результаты, разработанные в цикле предыдущих исследований [8, 14–16, 26–36].

1. Необходимые сведения из псевдотензорной алгебры и теории целых рациональных алгебраических инвариантов. Приведем необходимые сведения и понятия из современной геометрии и тензорной алгебры [11–13, 37]. В дальнейшем изложении, когда это не очевидно, будем обозначать вес псевдотензора верхним индексом в квадратных скобках, а его ранг — нижним индексом в круглых скобках:

$$\begin{matrix} [g] \\ \mathbf{T} \\ (n) \end{matrix},$$

где g — алгебраический вес, а n — ранг псевдотензора $\mathbf{T}$.

В соответствии с общепринятой практикой нулевой вес абсолютных тензоров и веса фундаментальных псевдотензоров в обозначениях явно не указываются. Кроме того, для упрощения записи ранг тензора/псевдотензора опускается в случаях, когда он однозначно определяется из контекста, что позволяет избежать излишней громоздкости тензорных уравнений.

Последующие рассуждения проводятся в трехмерном евклидовом пространстве. Введем локальный ковариантный базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Смешанное произведение векторов базиса [37] определяет фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр e и две псевдоскалярные единицы в соответствии с [18]:

$$e = \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3), \quad \begin{matrix} [+1] \\ 1 \end{matrix} = e, \quad \begin{matrix} [-1] \\ 1 \end{matrix} = e^{-1},$$

что позволяет классифицировать локальные базисные системы на право- и левоориентированные в зависимости от знака псевдотензорной единицы.

Введем скалярную функцию $w.g.t$, ставящую в соответствие псевдотензору его алгебраический вес. Например,

$$w.g.t \left(\begin{matrix} [g] \\ 1 \end{matrix} \right) = g.$$

Псевдотензор $\begin{matrix} [g] \\ \mathbf{T} \\ (n) \end{matrix}$ алгебраического веса g и ранга n может быть преобразован в абсолютный тензор того же ранга с помощью соответствующей степени

псевдоскалярной единицы:

$$\mathbf{T}_{(n)} = \begin{matrix} [-g] & [g] \\ 1 & \mathbf{T}_{(n)} \end{matrix}.$$

В последнем равенстве выполняется правило баланса весов (weights balance rule) [38–40]. Действительно, имеем

$$\text{w.g.t} \left(\mathbf{T}_{(n)} \right) = \text{w.g.t} \left(\begin{matrix} [-g] & [g] \\ 1 & \mathbf{T}_{(n)} \end{matrix} \right) = -g + g = 0.$$

Настоящее исследование существенно опирается на теорию целых рациональных алгебраических инвариантов, фундаментальное изложение которой представлено в монографиях [11, 19, 41, 42]. Рассмотрим основные понятия и положения данной теории.

Определение индивидуального псевдоинварианта алгебраического веса a для псевдотензора приведено в монографии [11]. Отметим, что при $a = 0$ инвариант носит название абсолютного инварианта, при $a \neq 0$ — относительного, или псевдоинварианта.

Аналогичным образом определяется совместный инвариант нескольких тензоров/псевдотензоров.

Как известно, для заданной системы тензоров существует бесконечное множество инвариантов (индивидуальных/совместных). Если среди них имеются нетривиальные (не равные тождественно нулю), то их количество также будет бесконечным. Это следует уже из того, что любая целая рациональная функция с числовыми коэффициентами от нескольких инвариантов системы при определенных условиях сама является инвариантом той же системы. В частности, таким свойством обладает произведение инвариантов.

Указанное обстоятельство приводит к понятию *неприводимого инварианта* системы, т.е. инварианта, который не может быть выражен в виде целой рациональной функции от других инвариантов той же системы. Совокупность всех неприводимых инвариантов системы образует ее *полную систему инвариантов*. Иначе говоря, инварианты системы тензоров образуют ее полную систему инвариантов, если всякий инвариант системы представляет собой целую рациональную функцию инвариантов и если, кроме того, никакой из инвариантов не является целой рациональной функцией остальных (или некоторых из них).

Без дополнительного исследования, разумеется, невозможно утверждать, что для произвольной системы тензоров число неприводимых инвариантов обязательно конечно. Поэтому с принципиальной точки зрения весьма важной является теорема Гильберта, которая устанавливает, что полная система инвариантов любой конечной системы тензоров состоит из конечного числа инвариантов [11].

2. Следы, образующие целый рациональный базис относительно гемитропной группы преобразований. Рассмотрим систему двух симметричных $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и двух антисимметричных $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$ тензоров второго ранга. Согласно [19], полная система индивидуальных и совместных гемитропных инвариантов для такой системы включает 86 неприводимых элементов. Для целей настоящего исследования достаточно рассмотреть подмножество из 20

гемитропных инвариантов, имеющих первую, вторую и третью степени относительно компонент указанных тензоров [19]:

$$\begin{aligned}
 & 1) \operatorname{tr}[\mathbf{V}^2]; \quad 6) \operatorname{tr}[\mathbf{B}^2]; \quad 11) \operatorname{tr}[\mathbf{B}\mathbf{A}^2]; \quad 16) \operatorname{tr}[\mathbf{V}\mathbf{W}]; \\
 & 2) \operatorname{tr}[\mathbf{W}^2]; \quad 7) \operatorname{tr}[\mathbf{A}^3]; \quad 12) \operatorname{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{A}]; \quad 17) \operatorname{tr}[\mathbf{VAB}]; \\
 & 3) \operatorname{tr}[\mathbf{A}]; \quad 8) \operatorname{tr}[\mathbf{B}^3]; \quad 13) \operatorname{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{B}]; \quad 18) \operatorname{tr}[\mathbf{WAB}]; \\
 & 4) \operatorname{tr}[\mathbf{B}]; \quad 9) \operatorname{tr}[\mathbf{AB}]; \quad 14) \operatorname{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{A}]; \quad 19) \operatorname{tr}[\mathbf{VWA}]; \\
 & 5) \operatorname{tr}[\mathbf{A}^2]; \quad 10) \operatorname{tr}[\mathbf{AB}^2]; \quad 15) \operatorname{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{B}]; \quad 20) \operatorname{tr}[\mathbf{VWB}].
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь и далее будем опускать операцию внутреннего произведения тензоров/псевдотензоров. Каждый инвариантный след снабжается уникальным идентификационным номером от 1 до 20.

Вычисление инвариантов (1) в заданной криволинейной координатной системе [11, с. 327] удобно производить в смешанных компонентах:

$$\begin{aligned}
 & 1) V_s^{\cdot k} V_k^{\cdot s}; \quad 6) B_s^{\cdot k} B_k^{\cdot s}; \quad 11) B_s^{\cdot k} A_k^{\cdot l} A_l^{\cdot s}; \quad 16) V_s^{\cdot k} W_k^{\cdot s}; \\
 & 2) W_s^{\cdot k} W_k^{\cdot s}; \quad 7) A_s^{\cdot k} A_k^{\cdot l} A_l^{\cdot s}; \quad 12) V_s^{\cdot k} V_k^{\cdot l} A_l^{\cdot s}; \quad 17) V_s^{\cdot k} A_k^{\cdot l} B_l^{\cdot s}; \\
 & 3) A_k^{\cdot k}; \quad 8) B_s^{\cdot k} B_k^{\cdot l} B_l^{\cdot s}; \quad 13) V_s^{\cdot k} V_k^{\cdot l} B_l^{\cdot s}; \quad 18) W_s^{\cdot k} A_k^{\cdot l} B_l^{\cdot s}; \\
 & 4) B_k^{\cdot k}; \quad 9) A_s^{\cdot k} B_k^{\cdot s}; \quad 14) W_s^{\cdot k} W_k^{\cdot l} A_l^{\cdot s}; \quad 19) V_s^{\cdot k} W_k^{\cdot l} A_l^{\cdot s}; \\
 & 5) A_s^{\cdot k} A_k^{\cdot s}; \quad 10) A_s^{\cdot k} B_k^{\cdot l} B_l^{\cdot s}; \quad 15) W_s^{\cdot k} W_k^{\cdot l} B_l^{\cdot s}; \quad 20) V_s^{\cdot k} W_k^{\cdot l} B_l^{\cdot s}.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Отметим, что данная форма представления не включает метрический тензор и легко запоминается.

Выберем сначала линейные инварианты из списка (2):

$$3; 4. \tag{3}$$

Следует заметить, что линейные инварианты (3) могут быть заданы альтернативным эквивалентным способом (например, $A_k^{\cdot k}$ и $B_k^{\cdot k}$).

Сформируем набор квадратичных инвариантов, выбрав соответствующие элементы из списка (2):

$$1; 2; 3 \times 3, 3 \times 4; 4 \times 4; 5; 6; 9; 16, \tag{4}$$

где номера соответствуют позициям инвариантов в исходном списке.

Набор (4) включает 9 квадратичных гемитропных инвариантов, которые были применены при построении квадратичной энергетической формы в работах [8, 29].

Для построения аппроксимаций высших порядков (кубических, четвертых, пятых и т.д.) энергетических форм необходимо расширить систему рациональных инвариантов, включив инварианты высших степеней (3, 4, 5 и т.д.). Кубические гемитропные инварианты представляют особый интерес, поскольку позволяют получить квадратичные поправки к линейным определяющим уравнениям теории микрополярной упругости.

Построим неприводимую систему кубических инвариантов, образованных совместными произведениями инвариантов из списка (1) общей степени 3.

Полная система из 28 кубических гемитропных инвариантов имеет следующий вид:

$$1 \times 3, 1 \times 4; 2 \times 3, 2 \times 4; 3^3, 3^2 \times 4, 3 \times 4^2, 3 \times 5, 3 \times 6, 3 \times 9, 3 \times 16; 4^3, 4 \times 5, 4 \times 6, 4 \times 9, 4 \times 16; 7; 8; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 17; 18; 19; 20.$$

Объединение данной системы с квадратичным набором (4) позволяет построить кубическую аппроксимацию энергетической формы обобщенного гемитропного микрополярного упругого тела. Для этого необходимо выполнить подстановку, указанную в следующем разделе, вместо тензоров $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{V}$ и $\mathbf{W}$.

3. Кубическая аппроксимация энергетической формы гемитропного микрополярного упругого тела. Опираясь на результаты предыдущего раздела, построим систему индивидуальных и совместных целых рациональных алгебраических инвариантов симметричных и антисимметричных частей асимметричных тензоров деформаций и тензора изгиба-кручения. Для этого выполним замену:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \text{sym } \boldsymbol{\epsilon}, & \mathbf{B} &= \text{sym } \boldsymbol{\kappa}, \\ \mathbf{V} &= \text{asym } \boldsymbol{\epsilon}, & \mathbf{W} &= \text{asym } \boldsymbol{\kappa}. \end{aligned} \quad (5)$$

В смешанных компонентах соотношения (5) примут вид²

$$\begin{aligned} A_{s \cdot}^{\cdot k} &= \frac{1}{2} [\epsilon_{s \cdot}^{\cdot k} + \epsilon_{\cdot s}^{\cdot k}], & B_{s \cdot}^{\cdot k} &= \frac{1}{2} [\kappa_{s \cdot}^{\cdot k} + \kappa_{\cdot s}^{\cdot k}], \\ V_{s \cdot}^{\cdot k} &= \frac{1}{2} [\epsilon_{s \cdot}^{\cdot k} - \epsilon_{\cdot s}^{\cdot k}], & W_{s \cdot}^{\cdot k} &= \frac{1}{2} [\kappa_{s \cdot}^{\cdot k} - \kappa_{\cdot s}^{\cdot k}]. \end{aligned} \quad (6)$$

Смешанные тензорные компоненты в (6) могут быть заданы альтернативным эквивалентным способом (например, $A_{s \cdot}^{\cdot k}$ и $B_{s \cdot}^{\cdot k}$).

Применяя замену (5) и учитывая схему нумерации, принятую в работах [8, 29], преобразуем систему квадратичных гемитропных инвариантов (4) к следующему виду:

$$\begin{aligned} {}^2\mathbf{I}_1 &= \frac{1}{4} [\epsilon_{s \cdot}^{\cdot s} + \epsilon_{\cdot k}^{\cdot k}]^2, & {}^2\mathbf{I}_2 &= \frac{1}{4} [\kappa_{s \cdot}^{\cdot s} + \kappa_{\cdot k}^{\cdot k}]^2, \\ {}^2\mathbf{I}_3 &= \frac{1}{4} [\epsilon_{s \cdot}^{\cdot k} + \epsilon_{\cdot s}^{\cdot k}] [\epsilon_{k \cdot}^{\cdot s} + \epsilon_{\cdot k}^{\cdot s}], & {}^2\mathbf{I}_4 &= \frac{1}{4} [\kappa_{s \cdot}^{\cdot k} + \kappa_{\cdot s}^{\cdot k}] [\kappa_{k \cdot}^{\cdot s} + \kappa_{\cdot k}^{\cdot s}], \\ {}^2\mathbf{I}_5 &= \frac{1}{4} [\epsilon_{s \cdot}^{\cdot k} - \epsilon_{\cdot s}^{\cdot k}] [\epsilon_{k \cdot}^{\cdot s} - \epsilon_{\cdot k}^{\cdot s}], & {}^2\mathbf{I}_6 &= \frac{1}{4} [\kappa_{s \cdot}^{\cdot k} - \kappa_{\cdot s}^{\cdot k}] [\kappa_{k \cdot}^{\cdot s} - \kappa_{\cdot k}^{\cdot s}], \\ {}^2\mathbf{I}_7 &= \frac{1}{4} [\epsilon_{s \cdot}^{\cdot s} + \epsilon_{\cdot k}^{\cdot k}] [\kappa_{s \cdot}^{\cdot s} + \kappa_{\cdot k}^{\cdot k}], & {}^2\mathbf{I}_8 &= \frac{1}{4} [\epsilon_{s \cdot}^{\cdot k} + \epsilon_{\cdot s}^{\cdot k}] [\kappa_{k \cdot}^{\cdot s} + \kappa_{\cdot k}^{\cdot s}], \\ {}^2\mathbf{I}_9 &= \frac{1}{4} [\epsilon_{s \cdot}^{\cdot k} - \epsilon_{\cdot s}^{\cdot k}] [\kappa_{k \cdot}^{\cdot s} - \kappa_{\cdot k}^{\cdot s}], \end{aligned} \quad (7)$$

а систему гемитропных кубических инвариантов, полученную в предыдущем

²Отметим, что выражения вида $\epsilon_{s \cdot}^{\cdot k} + \epsilon_{\cdot s}^{\cdot k}$ корректно интерпретируются как сумма двух тензоров, поскольку $\epsilon_{s \cdot}^{\cdot k} = \epsilon_{\cdot s}^{\cdot k}$.

разделе статьи, примем в форме

$$\begin{aligned}
{}^3\mathfrak{J}_1 &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^{\cdot s} + \epsilon_{k\cdot}^{\cdot k}]^3, & {}^3\mathfrak{J}_2 &= \frac{1}{8} [\kappa_{s\cdot}^{\cdot s} + \kappa_{k\cdot}^{\cdot k}]^3, \\
{}^3\mathfrak{J}_3 &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^{\cdot k} + \epsilon_{s\cdot}^{\cdot s}] [\epsilon_{k\cdot}^{\cdot l} + \epsilon_{k\cdot}^{\cdot l}] [\epsilon_{l\cdot}^{\cdot s} + \epsilon_{l\cdot}^{\cdot s}], \\
{}^3\mathfrak{J}_4 &= \frac{1}{8} [\kappa_{s\cdot}^{\cdot k} + \kappa_{s\cdot}^{\cdot s}] [\kappa_{k\cdot}^{\cdot l} + \kappa_{k\cdot}^{\cdot l}] [\kappa_{l\cdot}^{\cdot s} + \kappa_{l\cdot}^{\cdot s}], \\
{}^3\mathfrak{J}_5 &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^{\cdot k} + \epsilon_{s\cdot}^{\cdot s}] [\epsilon_{k\cdot}^{\cdot s} + \epsilon_{k\cdot}^{\cdot s}] [\epsilon_{l\cdot}^{\cdot l} + \epsilon_{m\cdot}^{\cdot m}], \\
{}^3\mathfrak{J}_6 &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^{\cdot k} + \epsilon_{s\cdot}^{\cdot s}] [\epsilon_{k\cdot}^{\cdot s} + \epsilon_{k\cdot}^{\cdot s}] [\kappa_{l\cdot}^{\cdot l} + \kappa_{m\cdot}^{\cdot m}], \\
{}^3\mathfrak{J}_7 &= \frac{1}{8} [\kappa_{s\cdot}^{\cdot k} + \kappa_{s\cdot}^{\cdot s}] [\kappa_{k\cdot}^{\cdot s} + \kappa_{k\cdot}^{\cdot s}] [\epsilon_{l\cdot}^{\cdot l} + \epsilon_{m\cdot}^{\cdot m}], \\
{}^3\mathfrak{J}_8 &= \frac{1}{8} [\kappa_{s\cdot}^{\cdot k} + \kappa_{s\cdot}^{\cdot s}] [\kappa_{k\cdot}^{\cdot s} + \kappa_{k\cdot}^{\cdot s}] [\kappa_{l\cdot}^{\cdot l} + \kappa_{m\cdot}^{\cdot m}], \\
{}^3\mathfrak{J}_9 &= \frac{1}{8} [\epsilon_{l\cdot}^{\cdot l} + \epsilon_{m\cdot}^{\cdot m}]^2 [\kappa_{s\cdot}^{\cdot s} + \kappa_{k\cdot}^{\cdot k}], \\
{}^3\mathfrak{J}_{10} &= \frac{1}{8} [\kappa_{s\cdot}^{\cdot s} + \kappa_{k\cdot}^{\cdot k}]^2 [\epsilon_{l\cdot}^{\cdot l} + \epsilon_{m\cdot}^{\cdot m}], \\
{}^3\mathfrak{J}_{11} &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^{\cdot k} + \epsilon_{s\cdot}^{\cdot s}] [\kappa_{k\cdot}^{\cdot s} + \kappa_{k\cdot}^{\cdot s}] [\epsilon_{l\cdot}^{\cdot l} + \epsilon_{m\cdot}^{\cdot m}], \\
{}^3\mathfrak{J}_{12} &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^{\cdot k} + \epsilon_{s\cdot}^{\cdot s}] [\kappa_{k\cdot}^{\cdot s} + \kappa_{k\cdot}^{\cdot s}] [\kappa_{l\cdot}^{\cdot l} + \kappa_{m\cdot}^{\cdot m}], \\
{}^3\mathfrak{J}_{13} &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^{\cdot k} + \epsilon_{s\cdot}^{\cdot s}] [\epsilon_{k\cdot}^{\cdot l} + \epsilon_{k\cdot}^{\cdot l}] [\kappa_{l\cdot}^{\cdot s} + \kappa_{l\cdot}^{\cdot s}], \\
{}^3\mathfrak{J}_{14} &= \frac{1}{8} [\kappa_{s\cdot}^{\cdot k} + \kappa_{s\cdot}^{\cdot s}] [\kappa_{k\cdot}^{\cdot l} + \kappa_{k\cdot}^{\cdot l}] [\epsilon_{l\cdot}^{\cdot s} + \epsilon_{l\cdot}^{\cdot s}], \\
{}^3\mathfrak{J}_{15} &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^{\cdot k} + \epsilon_{s\cdot}^{\cdot s}] [\kappa_{k\cdot}^{\cdot l} + \kappa_{k\cdot}^{\cdot l}] [\epsilon_{l\cdot}^{\cdot s} - \epsilon_{l\cdot}^{\cdot s}], \\
{}^3\mathfrak{J}_{16} &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^{\cdot k} + \epsilon_{s\cdot}^{\cdot s}] [\kappa_{k\cdot}^{\cdot l} + \kappa_{k\cdot}^{\cdot l}] [\kappa_{l\cdot}^{\cdot s} - \kappa_{l\cdot}^{\cdot s}], \\
{}^3\mathfrak{J}_{17} &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^{\cdot s} + \epsilon_{m\cdot}^{\cdot m}] [\epsilon_{k\cdot}^{\cdot l} - \epsilon_{k\cdot}^{\cdot l}] [\epsilon_{l\cdot}^{\cdot k} - \epsilon_{l\cdot}^{\cdot k}], \\
{}^3\mathfrak{J}_{18} &= \frac{1}{8} [\kappa_{s\cdot}^{\cdot s} + \kappa_{m\cdot}^{\cdot m}] [\epsilon_{k\cdot}^{\cdot l} - \epsilon_{k\cdot}^{\cdot l}] [\epsilon_{l\cdot}^{\cdot k} - \epsilon_{l\cdot}^{\cdot k}], \\
{}^3\mathfrak{J}_{19} &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^{\cdot s} + \epsilon_{m\cdot}^{\cdot m}] [\kappa_{k\cdot}^{\cdot l} - \kappa_{k\cdot}^{\cdot l}] [\kappa_{l\cdot}^{\cdot k} - \kappa_{l\cdot}^{\cdot k}], \\
{}^3\mathfrak{J}_{20} &= \frac{1}{8} [\kappa_{s\cdot}^{\cdot s} + \kappa_{m\cdot}^{\cdot m}] [\kappa_{k\cdot}^{\cdot l} - \kappa_{k\cdot}^{\cdot l}] [\kappa_{l\cdot}^{\cdot k} - \kappa_{l\cdot}^{\cdot k}], \\
{}^3\mathfrak{J}_{21} &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^{\cdot k} + \epsilon_{s\cdot}^{\cdot s}] [\epsilon_{k\cdot}^{\cdot l} - \epsilon_{k\cdot}^{\cdot l}] [\epsilon_{l\cdot}^{\cdot s} - \epsilon_{l\cdot}^{\cdot s}], \\
{}^3\mathfrak{J}_{22} &= \frac{1}{8} [\kappa_{s\cdot}^{\cdot k} + \kappa_{s\cdot}^{\cdot s}] [\epsilon_{k\cdot}^{\cdot l} - \epsilon_{k\cdot}^{\cdot l}] [\epsilon_{l\cdot}^{\cdot s} - \epsilon_{l\cdot}^{\cdot s}],
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
 {}^3\mathfrak{J}_{23} &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^{\cdot k} + \epsilon_{s\cdot}^{k\cdot}] [\kappa_{k\cdot}^{\cdot l} - \kappa_{k\cdot}^{l\cdot}] [\kappa_{l\cdot}^{\cdot s} - \kappa_{l\cdot}^{s\cdot}], \\
 {}^3\mathfrak{J}_{24} &= \frac{1}{8} [\kappa_{s\cdot}^{\cdot k} + \kappa_{s\cdot}^{k\cdot}] [\kappa_{k\cdot}^{\cdot l} - \kappa_{k\cdot}^{l\cdot}] [\kappa_{l\cdot}^{\cdot s} - \kappa_{l\cdot}^{s\cdot}], \\
 {}^3\mathfrak{J}_{25} &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^{\cdot k} + \epsilon_{s\cdot}^{k\cdot}] [\epsilon_{k\cdot}^{\cdot l} - \epsilon_{k\cdot}^{l\cdot}] [\kappa_{l\cdot}^{\cdot s} - \kappa_{l\cdot}^{s\cdot}], \\
 {}^3\mathfrak{J}_{26} &= \frac{1}{8} [\kappa_{s\cdot}^{\cdot k} + \kappa_{s\cdot}^{k\cdot}] [\epsilon_{k\cdot}^{\cdot l} - \epsilon_{k\cdot}^{l\cdot}] [\kappa_{l\cdot}^{\cdot s} - \kappa_{l\cdot}^{s\cdot}], \\
 {}^3\mathfrak{J}_{27} &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^{\cdot s} + \epsilon_{s\cdot}^{m\cdot}] [\epsilon_{k\cdot}^{\cdot l} - \epsilon_{k\cdot}^{l\cdot}] [\kappa_{l\cdot}^{\cdot k} - \kappa_{l\cdot}^{k\cdot}], \\
 {}^3\mathfrak{J}_{28} &= \frac{1}{8} [\kappa_{s\cdot}^{\cdot s} + \kappa_{s\cdot}^{m\cdot}] [\epsilon_{k\cdot}^{\cdot l} - \epsilon_{k\cdot}^{l\cdot}] [\kappa_{l\cdot}^{\cdot k} - \kappa_{l\cdot}^{k\cdot}].
 \end{aligned}$$

А-представление кубической аппроксимации энергетической формы гемитропного микрополярного упругого тела, соответствующее системам квадратичных (7) и кубических (8) инвариантов, может быть представлено в компактной форме следующим образом:

$$\mathcal{U} = \sum_{\mathfrak{c}=1}^9 {}^2C_{\mathfrak{c}} {}^2\mathfrak{I}_{\mathfrak{c}} + \sum_{\mathfrak{a}=1}^{28} {}^3C_{\mathfrak{a}} {}^3\mathfrak{J}_{\mathfrak{a}}, \quad (9)$$

где ${}^2\mathfrak{I}_{\mathfrak{c}}$ — квадратичные инварианты; ${}^3\mathfrak{J}_{\mathfrak{a}}$ — кубические инварианты, а для определяющих модулей введены следующие обозначения:

- ${}^2C_{\mathfrak{c}}$ — модули квадратичного приближения;
- ${}^3C_{\mathfrak{a}}$ — модули, отвечающие за квадратичные поправки.

Следует особо отметить чувствительность части определяющих модулей к зеркальным отражениям и инверсиям в трехмерном пространстве. Это свойство обусловлено возможностью присвоения нечетного алгебраического веса тензору изгиба-кручения.

Таким образом, алгебраическая природа 37 определяющих постоянных ${}^2C_{\mathfrak{c}}$ ($\mathfrak{c} = 1, \dots, 9$) и ${}^3C_{\mathfrak{a}}$ ($\mathfrak{a} = 1, \dots, 28$) становится очевидной: они представляют собой неопределенные коэффициенты в линейной комбинации неприводимых систем квадратичных (7) и кубических (8) инвариантов.

4. Определяющие уравнения гемитропной микрополярной упругости, включающие квадратичные поправки. Определяющие уравнения для силовых и моментных напряжений, соответствующие энергетической форме (9), получены в виде

$$t_{\cdot k}^{s\cdot} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\epsilon_{s\cdot}^{\cdot k})}, \quad \mu_{\cdot k}^{s\cdot} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\kappa_{s\cdot}^{\cdot k})}. \quad (10)$$

Для симметричных и антисимметричных частей силовых и моментных

напряжений справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}[t_{s\cdot}^{\cdot k} + t_{\cdot s}^{k\cdot}] &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\epsilon_{s\cdot}^{\cdot k})} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\epsilon_{\cdot s}^{k\cdot})}\right], \\ \frac{1}{2}[\mu_{s\cdot}^{\cdot k} + \mu_{\cdot s}^{k\cdot}] &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\kappa_{s\cdot}^{\cdot k})} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\kappa_{\cdot s}^{k\cdot})}\right], \\ \frac{1}{2}[t_{s\cdot}^{\cdot k} - t_{\cdot s}^{k\cdot}] &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\epsilon_{s\cdot}^{\cdot k})} - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\epsilon_{\cdot s}^{k\cdot})}\right], \\ \frac{1}{2}[\mu_{s\cdot}^{\cdot k} - \mu_{\cdot s}^{k\cdot}] &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\kappa_{s\cdot}^{\cdot k})} - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\kappa_{\cdot s}^{k\cdot})}\right].\end{aligned}$$

Подставив выражение для потенциала (9) в уравнения (10), получим

$$\begin{aligned}t_{s\cdot}^{\cdot k} &= \sum_{c=1}^9 {}^2C_c \frac{\partial^2 I_c}{\partial (\epsilon_{s\cdot}^{\cdot k})} + \sum_{a=1}^{28} {}^3C_a \frac{\partial^3 \mathfrak{I}_a}{\partial (\epsilon_{s\cdot}^{\cdot k})}, \\ \mu_{s\cdot}^{\cdot k} &= \sum_{c=1}^9 {}^2C_c \frac{\partial^2 I_c}{\partial (\kappa_{s\cdot}^{\cdot k})} + \sum_{a=1}^{28} {}^3C_a \frac{\partial^3 \mathfrak{I}_a}{\partial (\kappa_{s\cdot}^{\cdot k})}.\end{aligned}\tag{11}$$

Вычислим частные производные, входящие в уравнения (11). Начнем с вычисления производных от квадратичных инвариантов. Для квадратичных членов получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 I_1}{\partial (\epsilon_{p\cdot}^{\cdot q})} &= \frac{\partial 3 \times 3}{\partial (\epsilon_{p\cdot}^{\cdot q})} = \frac{1}{2}[\epsilon_{s\cdot}^{\cdot s} + \epsilon_{\cdot k}^{k\cdot}] [\delta_l^p \delta_q^l + g_{mq} g^{pm}] = [\epsilon_{s\cdot}^{\cdot s} + \epsilon_{\cdot k}^{k\cdot}] \delta_q^p, \\ \frac{\partial^2 I_2}{\partial (\kappa_{p\cdot}^{\cdot q})} &= \frac{\partial 4 \times 4}{\partial (\kappa_{p\cdot}^{\cdot q})} = \frac{1}{2}[\kappa_{s\cdot}^{\cdot s} + \kappa_{\cdot k}^{k\cdot}] [\delta_l^p \delta_q^l + g_{mq} g^{pm}] = [\kappa_{s\cdot}^{\cdot s} + \kappa_{\cdot k}^{k\cdot}] \delta_q^p, \\ \frac{\partial^2 I_3}{\partial (\epsilon_{p\cdot}^{\cdot q})} &= \frac{\partial 5}{\partial (\epsilon_{p\cdot}^{\cdot q})} = \frac{1}{4}[\delta_s^p \delta_q^k + g_{sq} g^{pk}] [\epsilon_{k\cdot}^{\cdot s} + \epsilon_{\cdot k}^{s\cdot}] + \\ &\quad + \frac{1}{4}[\epsilon_{s\cdot}^{\cdot k} + \epsilon_{\cdot s}^{k\cdot}] [\delta_k^p \delta_q^s + g_{kq} g^{ps}] = \epsilon_{q\cdot}^{\cdot p} + \epsilon_{\cdot q}^{p\cdot}, \\ \frac{\partial^2 I_4}{\partial (\kappa_{p\cdot}^{\cdot q})} &= \frac{\partial 6}{\partial (\kappa_{p\cdot}^{\cdot q})} = \frac{1}{4}[\delta_s^p \delta_q^k + g_{sq} g^{pk}] [\kappa_{k\cdot}^{\cdot s} + \kappa_{\cdot k}^{s\cdot}] + \\ &\quad + \frac{1}{4}[\kappa_{s\cdot}^{\cdot k} + \kappa_{\cdot s}^{k\cdot}] [\delta_k^p \delta_q^s + g_{kq} g^{ps}] = \kappa_{q\cdot}^{\cdot p} + \kappa_{\cdot q}^{p\cdot}, \\ \frac{\partial^2 I_5}{\partial (\epsilon_{p\cdot}^{\cdot q})} &= \frac{\partial 1}{\partial (\epsilon_{p\cdot}^{\cdot q})} = \frac{1}{4}[\delta_s^p \delta_q^k - g_{sq} g^{pk}] [\epsilon_{k\cdot}^{\cdot s} - \epsilon_{\cdot k}^{s\cdot}] + \\ &\quad + \frac{1}{4}[\epsilon_{s\cdot}^{\cdot k} - \epsilon_{\cdot s}^{k\cdot}] [\delta_k^p \delta_q^s - g_{kq} g^{ps}] = \epsilon_{q\cdot}^{\cdot p} - \epsilon_{\cdot q}^{p\cdot},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 I_6}{\partial (\kappa_{\cdot q}^{\cdot q})} &= \frac{\partial 2}{\partial (\kappa_{\cdot q}^{\cdot q})} = \frac{1}{4} [\delta_s^p \delta_q^k - g_{sq} g^{pk}] [\kappa_{\cdot k}^{\cdot s} - \kappa_{\cdot k}^{\cdot s}] + \\
 &+ \frac{1}{4} [\kappa_{\cdot s}^{\cdot k} - \kappa_{\cdot s}^{\cdot k}] [\delta_k^p \delta_q^s - g_{kq} g^{ps}] = \kappa_{\cdot q}^{\cdot p} - \kappa_{\cdot q}^{\cdot p}, \\
 \frac{\partial^2 I_7}{\partial (\epsilon_{\cdot q}^{\cdot q})} &= \frac{\partial 3 \times 4}{\partial (\epsilon_{\cdot q}^{\cdot q})} = \frac{1}{4} [\kappa_{\cdot s}^{\cdot s} + \kappa_{\cdot k}^{\cdot k}] [\delta_l^p \delta_q^l + g_{mq} g^{pm}] = \frac{1}{2} [\kappa_{\cdot s}^{\cdot s} + \kappa_{\cdot k}^{\cdot k}] \delta_q^p, \\
 \frac{\partial^2 I_7}{\partial (\kappa_{\cdot q}^{\cdot q})} &= \frac{\partial 3 \times 4}{\partial (\kappa_{\cdot q}^{\cdot q})} = \frac{1}{4} [\epsilon_{\cdot s}^{\cdot s} + \epsilon_{\cdot k}^{\cdot k}] [\delta_l^p \delta_q^l + g_{mq} g^{pm}] = \frac{1}{2} [\epsilon_{\cdot s}^{\cdot s} + \epsilon_{\cdot k}^{\cdot k}] \delta_q^p, \\
 \frac{\partial^2 I_8}{\partial (\epsilon_{\cdot q}^{\cdot q})} &= \frac{\partial 9}{\partial (\epsilon_{\cdot q}^{\cdot q})} = \frac{1}{4} [\delta_s^p \delta_q^k + g_{sq} g^{pk}] [\kappa_{\cdot k}^{\cdot s} + \kappa_{\cdot k}^{\cdot s}] = \frac{1}{2} [\kappa_{\cdot q}^{\cdot p} + \kappa_{\cdot q}^{\cdot p}], \\
 \frac{\partial^2 I_8}{\partial (\kappa_{\cdot q}^{\cdot q})} &= \frac{\partial 9}{\partial (\kappa_{\cdot q}^{\cdot q})} = \frac{1}{4} [\epsilon_{\cdot s}^{\cdot k} + \epsilon_{\cdot s}^{\cdot k}] [\delta_k^p \delta_q^s + g_{kq} g^{ps}] = \frac{1}{2} [\epsilon_{\cdot q}^{\cdot p} + \epsilon_{\cdot q}^{\cdot p}], \\
 \frac{\partial^2 I_9}{\partial (\epsilon_{\cdot q}^{\cdot q})} &= \frac{\partial 16}{\partial (\epsilon_{\cdot q}^{\cdot q})} = \frac{1}{4} [\delta_s^p \delta_q^k - g_{sq} g^{pk}] [\kappa_{\cdot k}^{\cdot s} - \kappa_{\cdot k}^{\cdot s}] = \frac{1}{2} [\kappa_{\cdot q}^{\cdot p} - \kappa_{\cdot q}^{\cdot p}], \\
 \frac{\partial^2 I_9}{\partial (\kappa_{\cdot q}^{\cdot q})} &= \frac{\partial 16}{\partial (\kappa_{\cdot q}^{\cdot q})} = \frac{1}{4} [\epsilon_{\cdot s}^{\cdot k} - \epsilon_{\cdot s}^{\cdot k}] [\delta_k^p \delta_q^s - g_{kq} g^{ps}] = \frac{1}{2} [\epsilon_{\cdot q}^{\cdot p} - \epsilon_{\cdot q}^{\cdot p}],
 \end{aligned}$$

Отметим свойства символа Кронекера

$$\delta_{\cdot p}^{\cdot q} = \delta_{\cdot q}^{\cdot p} = \delta_q^p,$$

которые использованы при вычислении производных.

Ввиду чрезмерной громоздкости получаемых выражений опустим явный вид производных от кубических инвариантов.

Вычислив все необходимые производные в соответствии с (11), получим окончательные выражения для тензоров силовых и моментных напряжений:

$$\begin{aligned}
 t_{\cdot q}^{\cdot p} &= {}^2C_1 [\epsilon_{\cdot s}^{\cdot s} + \epsilon_{\cdot k}^{\cdot k}] \delta_q^p + {}^2C_3 [\epsilon_{\cdot q}^{\cdot p} + \epsilon_{\cdot q}^{\cdot p}] + {}^2C_5 [\epsilon_{\cdot q}^{\cdot p} - \epsilon_{\cdot q}^{\cdot p}] + \frac{1}{2} {}^2C_7 [\kappa_{\cdot s}^{\cdot s} + \kappa_{\cdot k}^{\cdot k}] \delta_q^p + \\
 &+ \frac{1}{2} {}^2C_8 [\kappa_{\cdot q}^{\cdot p} + \kappa_{\cdot q}^{\cdot p}] + \frac{1}{2} {}^2C_9 [\kappa_{\cdot q}^{\cdot p} - \kappa_{\cdot q}^{\cdot p}] + \frac{3}{4} {}^3C_1 [\epsilon_{\cdot s}^{\cdot s} + \epsilon_{\cdot k}^{\cdot k}]^2 \delta_q^p + \\
 &+ \frac{3}{8} {}^3C_3 \left[[\epsilon_{sq} + \epsilon_{qs}] [\epsilon^{ps} + \epsilon^{sp}] + [\epsilon_{\cdot s}^{\cdot p} + \epsilon_{\cdot s}^{\cdot p}] [\epsilon_{\cdot q}^{\cdot s} + \epsilon_{\cdot q}^{\cdot s}] \right] + \\
 &+ \frac{1}{4} {}^3C_5 \left[[\epsilon_{\cdot q}^{\cdot p} + \epsilon_{\cdot q}^{\cdot p}] [\epsilon_{\cdot l}^{\cdot l} + \epsilon_{\cdot m}^{\cdot m}] + [\epsilon_{\cdot s}^{\cdot k} + \epsilon_{\cdot s}^{\cdot k}] [\epsilon_{\cdot k}^{\cdot s} + \epsilon_{\cdot k}^{\cdot s}] \delta_q^p \right] + \\
 &+ \frac{1}{4} {}^3C_6 [\epsilon_{\cdot q}^{\cdot p} + \epsilon_{\cdot q}^{\cdot p}] [\kappa_{\cdot l}^{\cdot l} + \kappa_{\cdot m}^{\cdot m}] + \frac{1}{4} {}^3C_7 [\kappa_{\cdot s}^{\cdot k} + \kappa_{\cdot s}^{\cdot k}] [\kappa_{\cdot k}^{\cdot s} + \kappa_{\cdot k}^{\cdot s}] \delta_q^p + \\
 &+ \frac{1}{2} {}^3C_9 [\epsilon_{\cdot s}^{\cdot s} + \epsilon_{\cdot k}^{\cdot k}] [\kappa_{\cdot l}^{\cdot l} + \kappa_{\cdot m}^{\cdot m}] \delta_q^p + \frac{1}{4} {}^3C_{10} [\kappa_{\cdot s}^{\cdot s} + \kappa_{\cdot k}^{\cdot k}]^2 \delta_q^p + \\
 &+ \frac{1}{4} {}^3C_{11} \left[[\kappa_{\cdot q}^{\cdot p} + \kappa_{\cdot q}^{\cdot p}] [\epsilon_{\cdot l}^{\cdot l} + \epsilon_{\cdot m}^{\cdot m}] + [\epsilon_{\cdot s}^{\cdot k} + \epsilon_{\cdot s}^{\cdot k}] [\kappa_{\cdot k}^{\cdot s} + \kappa_{\cdot k}^{\cdot s}] \delta_q^p \right] + \\
 &+ \frac{1}{4} {}^3C_{12} [\kappa_{\cdot q}^{\cdot p} + \kappa_{\cdot q}^{\cdot p}] [\kappa_{\cdot l}^{\cdot l} + \kappa_{\cdot m}^{\cdot m}] +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{8} {}^3C_{13} \left[[\epsilon_{\dot{q}}^{\cdot l} + \epsilon_{\dot{q}}^{\cdot l}] [\kappa_{\dot{l}}^{\cdot p} + \kappa_{\dot{l}}^{\cdot p}] + [\epsilon^{pl} + \epsilon^{lp}] [\kappa_{lq} + \kappa_{ql}] + \right. \\
& \quad \left. + [\epsilon_{\dot{s}}^{\cdot p} + \epsilon_{\dot{s}}^{\cdot p}] [\kappa_{\dot{q}}^{\cdot s} + \kappa_{\dot{q}}^{\cdot s}] + [\epsilon_{sq} + \epsilon_{qs}] [\kappa^{ps} + \kappa^{sp}] \right] + \\
& + \frac{1}{8} {}^3C_{14} \left[[\kappa_{\dot{q}}^{\cdot k} + \kappa_{\dot{q}}^{\cdot k}] [\kappa_{\dot{k}}^{\cdot p} + \kappa_{\dot{k}}^{\cdot p}] + [\kappa^{pk} + \kappa^{kp}] [\kappa_{kq} + \kappa_{qk}] \right] + \\
& + \frac{1}{8} {}^3C_{15} \left[[\kappa_{\dot{q}}^{\cdot l} + \kappa_{\dot{q}}^{\cdot l}] [\epsilon_{\dot{l}}^{\cdot p} - \epsilon_{\dot{l}}^{\cdot p}] + [\kappa^{pl} + \kappa^{lp}] [\epsilon_{lq} - \epsilon_{ql}] + \right. \\
& \quad \left. + [\epsilon_{\dot{q}}^{\cdot k} + \epsilon_{\dot{q}}^{\cdot k}] [\kappa_{\dot{k}}^{\cdot p} + \kappa_{\dot{k}}^{\cdot p}] - [\epsilon^{pk} + \epsilon^{kp}] [\kappa_{kq} + \kappa_{qk}] \right] + \\
& + \frac{1}{8} {}^3C_{16} \left[[\kappa_{\dot{q}}^{\cdot l} + \kappa_{\dot{q}}^{\cdot l}] [\kappa_{\dot{l}}^{\cdot p} - \kappa_{\dot{l}}^{\cdot p}] + [\kappa^{pl} + \kappa^{lp}] [\kappa_{lq} - \kappa_{ql}] \right] + \\
& + \frac{1}{4} {}^3C_{17} \left[2[\epsilon_{\dot{q}}^{\cdot p} - \epsilon_{\dot{q}}^{\cdot p}] [\epsilon_{\dot{l}}^{\cdot l} + \epsilon_{\dot{m}}^{\cdot m}] + [\epsilon_{\dot{s}}^{\cdot k} - \epsilon_{\dot{s}}^{\cdot k}] [\epsilon_{\dot{k}}^{\cdot s} - \epsilon_{\dot{k}}^{\cdot s}] \delta_q^p \right] + \\
& + \frac{1}{4} {}^3C_{18} [\epsilon_{\dot{q}}^{\cdot p} - \epsilon_{\dot{q}}^{\cdot p}] [\kappa_{\dot{l}}^{\cdot l} + \kappa_{\dot{m}}^{\cdot m}] + \frac{1}{4} {}^3C_{19} [\kappa_{\dot{s}}^{\cdot k} - \kappa_{\dot{s}}^{\cdot k}] [\kappa_{\dot{k}}^{\cdot s} - \kappa_{\dot{k}}^{\cdot s}] \delta_q^p + \\
& + \frac{1}{8} {}^3C_{21} \left[[\epsilon_{\dot{q}}^{\cdot l} - \epsilon_{\dot{q}}^{\cdot l}] [\epsilon_{\dot{l}}^{\cdot p} - \epsilon_{\dot{l}}^{\cdot p}] + [\epsilon_{lq} - \epsilon_{ql}] [\epsilon^{pl} - \epsilon^{lp}] + \right. \\
& \quad \left. + [\epsilon_{\dot{s}}^{\cdot p} + \epsilon_{\dot{s}}^{\cdot p}] [\epsilon_{\dot{q}}^{\cdot s} - \epsilon_{\dot{q}}^{\cdot s}] - [\epsilon_{sq} + \epsilon_{qs}] [\epsilon^{ps} - \epsilon^{sp}] + \right. \\
& \quad \left. + [\epsilon_{\dot{q}}^{\cdot k} + \epsilon_{\dot{q}}^{\cdot k}] [\epsilon_{\dot{k}}^{\cdot p} - \epsilon_{\dot{k}}^{\cdot p}] - [\epsilon^{pk} + \epsilon^{kp}] [\epsilon_{kq} - \epsilon_{qk}] \right] + \\
& + \frac{1}{8} {}^3C_{22} \left[[\kappa_{\dot{s}}^{\cdot p} + \kappa_{\dot{s}}^{\cdot p}] [\epsilon_{\dot{q}}^{\cdot s} - \epsilon_{\dot{q}}^{\cdot s}] - [\kappa_{sq} + \kappa_{qs}] [\epsilon^{ps} - \epsilon^{sp}] + \right. \\
& \quad \left. + [\kappa_{\dot{q}}^{\cdot k} + \kappa_{\dot{q}}^{\cdot k}] [\epsilon_{\dot{k}}^{\cdot p} - \epsilon_{\dot{k}}^{\cdot p}] - [\kappa^{pk} + \kappa^{kp}] [\epsilon_{kq} - \epsilon_{qk}] \right] + \\
& + \frac{1}{8} {}^3C_{23} \left[[\kappa_{\dot{q}}^{\cdot l} - \kappa_{\dot{q}}^{\cdot l}] [\kappa_{\dot{l}}^{\cdot p} - \kappa_{\dot{l}}^{\cdot p}] + [\kappa_{lq} - \kappa_{ql}] [\kappa^{pl} - \kappa^{lp}] \right] + \\
& + \frac{1}{8} {}^3C_{25} \left[[\epsilon_{\dot{q}}^{\cdot l} - \epsilon_{\dot{q}}^{\cdot l}] [\kappa_{\dot{l}}^{\cdot p} - \kappa_{\dot{l}}^{\cdot p}] + [\epsilon_{lq} - \epsilon_{ql}] [\kappa^{pl} - \kappa^{lp}] + \right. \\
& \quad \left. + [\epsilon_{\dot{s}}^{\cdot p} + \epsilon_{\dot{s}}^{\cdot p}] [\kappa_{\dot{q}}^{\cdot s} - \kappa_{\dot{q}}^{\cdot s}] - [\epsilon_{sq} + \epsilon_{qs}] [\kappa^{ps} - \kappa^{sp}] \right] + \\
& + \frac{1}{8} {}^3C_{26} \left[[\kappa_{\dot{s}}^{\cdot p} + \kappa_{\dot{s}}^{\cdot p}] [\kappa_{\dot{q}}^{\cdot s} - \kappa_{\dot{q}}^{\cdot s}] - [\kappa_{sq} + \kappa_{qs}] [\kappa^{ps} - \kappa^{sp}] \right] + \\
& + \frac{1}{4} {}^3C_{27} \left[[\kappa_{\dot{q}}^{\cdot p} - \kappa_{\dot{q}}^{\cdot p}] [\epsilon_{\dot{l}}^{\cdot l} + \epsilon_{\dot{m}}^{\cdot m}] + [\epsilon_{\dot{s}}^{\cdot k} - \epsilon_{\dot{s}}^{\cdot k}] [\kappa_{\dot{k}}^{\cdot s} - \kappa_{\dot{k}}^{\cdot s}] \delta_q^p \right] + \\
& \quad + \frac{1}{4} {}^3C_{28} [\kappa_{\dot{q}}^{\cdot p} - \kappa_{\dot{q}}^{\cdot p}] [\kappa_{\dot{l}}^{\cdot l} + \kappa_{\dot{m}}^{\cdot m}],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_{\dot{q}}^{p\cdot} = & {}^2C_2 [\kappa_{\dot{s}}^{\cdot s} + \kappa_{\dot{k}}^{\cdot k}] \delta_q^p + {}^2C_4 [\kappa_{\dot{q}}^{\cdot p} + \kappa_{\dot{q}}^{\cdot p}] + {}^2C_6 [\kappa_{\dot{q}}^{\cdot p} - \kappa_{\dot{q}}^{\cdot p}] + \frac{1}{2} {}^2C_7 [\epsilon_{\dot{s}}^{\cdot s} + \epsilon_{\dot{k}}^{\cdot k}] \delta_q^p + \\
& + \frac{1}{2} {}^2C_8 [\epsilon_{\dot{q}}^{\cdot p} + \epsilon_{\dot{q}}^{\cdot p}] + \frac{1}{2} {}^2C_9 [\epsilon_{\dot{q}}^{\cdot p} - \epsilon_{\dot{q}}^{\cdot p}] + \frac{3}{4} {}^3C_2 [\kappa_{\dot{s}}^{\cdot s} + \kappa_{\dot{k}}^{\cdot k}]^2 \delta_q^p + \\
& + \frac{3}{8} {}^3C_4 [[\kappa_{sq} + \kappa_{qs}] [\kappa^{ps} + \kappa^{sp}] + [\kappa_{\dot{s}}^{\cdot p} + \kappa_{\dot{s}}^{\cdot p}] [\kappa_{\dot{q}}^{\cdot s} + \kappa_{\dot{q}}^{\cdot s}]] + \\
& + \frac{1}{4} {}^3C_6 [\epsilon_{\dot{s}}^{\cdot k} + \epsilon_{\dot{s}}^{\cdot k}] [\epsilon_{\dot{k}}^{\cdot s} + \epsilon_{\dot{k}}^{\cdot s}] \delta_q^p + \frac{1}{4} {}^3C_7 [\kappa_{\dot{q}}^{\cdot p} + \kappa_{\dot{q}}^{\cdot p}] [\epsilon_{\dot{l}}^{\cdot l} + \epsilon_{\dot{m}}^{\cdot m}] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{4} {}^3C_8 \left[[\kappa_q^{\cdot p} + \kappa_q^{p \cdot}] [\kappa_l^{\cdot l} + \kappa_m^{m \cdot}] + [\kappa_s^{\cdot k} + \kappa_s^{k \cdot}] [\kappa_k^{\cdot s} + \kappa_k^{s \cdot}] \delta_q^p \right] + \\
 & + \frac{1}{4} {}^3C_9 [\epsilon_s^{\cdot s} + \epsilon_k^{\cdot k}]^2 \delta_p^q + \frac{1}{2} {}^3C_{10} [\epsilon_s^{\cdot s} + \epsilon_l^{\cdot l}] [\kappa_k^{\cdot k} + \kappa_m^{m \cdot}] \delta_p^q + \\
 & + \frac{1}{4} {}^3C_{11} [\epsilon_q^{\cdot p} + \epsilon_q^{p \cdot}] [\epsilon_l^{\cdot l} + \epsilon_s^{s \cdot}] + \\
 & + \frac{1}{4} {}^3C_{12} \left[[\kappa_q^{\cdot p} + \kappa_q^{p \cdot}] [\epsilon_l^{\cdot l} + \epsilon_m^{m \cdot}] + [\epsilon_s^{\cdot k} + \epsilon_s^{k \cdot}] [\kappa_k^{\cdot s} + \kappa_k^{s \cdot}] \delta_q^p \right] + \\
 & + \frac{1}{8} {}^3C_{13} \left[[\epsilon_q^{\cdot k} + \epsilon_q^{k \cdot}] [\epsilon_k^{\cdot p} + \epsilon_k^{p \cdot}] + [\epsilon^{pk} + \epsilon^{kp}] [\epsilon_{kq} + \epsilon_{qk}] \right] + \\
 & + \frac{1}{8} {}^3C_{14} \left[[\kappa_q^{\cdot l} + \kappa_q^{l \cdot}] [\epsilon_l^{\cdot p} + \epsilon_l^{p \cdot}] + [\kappa^{pl} + \kappa^{lp}] [\epsilon_{lq} + \epsilon_{ql}] + \right. \\
 & + [\kappa_s^{\cdot p} + \kappa_s^{p \cdot}] [\epsilon_q^{\cdot s} + \epsilon_q^{s \cdot}] + [\kappa_{sq} + \kappa_{qs}] [\epsilon^{ps} + \epsilon^{sp}] \left. \right] + \\
 & + \frac{1}{8} {}^3C_{15} \left[[\epsilon_{sq} + \epsilon_{qs}] [\epsilon^{ps} - \epsilon^{sp}] + [\epsilon_s^{\cdot p} + \epsilon_s^{p \cdot}] [\epsilon_q^{\cdot s} - \epsilon_q^{s \cdot}] \right] + \\
 & + \frac{1}{8} {}^3C_{16} \left[[\epsilon_q^{\cdot p} + \epsilon_q^{p \cdot}] [\kappa_q^{\cdot s} - \kappa_q^{s \cdot}] + [\epsilon_{sq} + \epsilon_{qs}] [\kappa^{ps} - \kappa^{sp}] + \right. \\
 & + [\epsilon_q^{\cdot k} + \epsilon_q^{k \cdot}] [\kappa_k^{\cdot p} + \kappa_k^{p \cdot}] - [\epsilon^{pk} + \epsilon^{kp}] [\kappa_{kq} + \kappa_{qk}] \left. \right] + \\
 & + \frac{1}{4} {}^3C_{18} [\epsilon_s^{\cdot k} - \epsilon_s^{k \cdot}] [\epsilon_k^{\cdot s} - \epsilon_k^{s \cdot}] \delta_q^p + \frac{1}{4} {}^3C_{19} [\kappa_q^{\cdot p} - \kappa_q^{p \cdot}] [\epsilon_l^{\cdot l} + \epsilon_m^{m \cdot}] + \\
 & + \frac{1}{4} {}^3C_{20} \left[2 [\kappa_q^{\cdot p} - \kappa_q^{p \cdot}] [\kappa_l^{\cdot l} + \kappa_m^{m \cdot}] + [\kappa_s^{\cdot k} - \kappa_s^{k \cdot}] [\kappa_k^{\cdot s} - \kappa_k^{s \cdot}] \delta_q^p \right] + \\
 & + \frac{1}{8} {}^3C_{22} \left[[\epsilon_q^{\cdot l} - \epsilon_q^{l \cdot}] [\epsilon_l^{\cdot p} - \epsilon_l^{p \cdot}] + [\epsilon_{lq} - \epsilon_{ql}] [\epsilon^{pl} - \epsilon^{lp}] \right] + \\
 & + \frac{1}{8} {}^3C_{23} \left[[\epsilon_s^{\cdot p} + \epsilon_s^{p \cdot}] [\kappa_q^{\cdot s} - \kappa_q^{s \cdot}] - [\epsilon_{sq} + \epsilon_{qs}] [\kappa^{ps} - \kappa^{sp}] + \right. \\
 & + [\epsilon_q^{\cdot k} + \epsilon_q^{k \cdot}] [\kappa_k^{\cdot p} - \kappa_k^{p \cdot}] - [\epsilon^{pk} + \epsilon^{kp}] [\kappa_{kq} - \kappa_{qk}] \left. \right] + \\
 & + \frac{1}{8} {}^3C_{24} \left[[\kappa_q^{\cdot l} - \kappa_q^{l \cdot}] [\kappa_l^{\cdot p} - \kappa_l^{p \cdot}] + [\kappa_{lq} - \kappa_{ql}] [\kappa^{pl} - \kappa^{lp}] + \right. \\
 & + [\kappa_s^{\cdot p} + \kappa_s^{p \cdot}] [\kappa_q^{\cdot s} - \kappa_q^{s \cdot}] - [\kappa_{sq} + \kappa_{qs}] [\kappa^{ps} - \kappa^{sp}] + \\
 & + [\kappa_q^{\cdot k} + \kappa_q^{k \cdot}] [\kappa_k^{\cdot p} - \kappa_k^{p \cdot}] - [\kappa^{pk} + \kappa^{kp}] [\kappa_{kq} - \kappa_{qk}] \left. \right] + \\
 & + \frac{1}{8} {}^3C_{25} \left[[\epsilon_q^{\cdot k} + \epsilon_q^{k \cdot}] [\epsilon_k^{\cdot p} - \epsilon_k^{p \cdot}] - [\epsilon^{pk} + \epsilon^{kp}] [\epsilon_{kq} - \epsilon_{qk}] \right] + \\
 & + \frac{1}{8} {}^3C_{26} \left[[\epsilon_q^{\cdot l} - \epsilon_q^{l \cdot}] [\kappa_l^{\cdot p} - \kappa_l^{p \cdot}] + [\epsilon_{lq} - \epsilon_{ql}] [\kappa^{pl} - \kappa^{lp}] + \right. \\
 & + [\kappa_q^{\cdot k} + \kappa_q^{k \cdot}] [\epsilon_k^{\cdot p} - \epsilon_k^{p \cdot}] - [\kappa^{pk} + \kappa^{kp}] [\epsilon_{kq} - \epsilon_{qk}] \left. \right] + \\
 & + \frac{1}{4} {}^3C_{27} [\kappa_q^{\cdot p} - \kappa_q^{p \cdot}] [\epsilon_l^{\cdot l} + \epsilon_m^{m \cdot}] + \\
 & + \frac{1}{4} {}^3C_{28} \left[[\epsilon_q^{\cdot p} - \epsilon_q^{p \cdot}] [\kappa_l^{\cdot l} + \kappa_m^{m \cdot}] + [\epsilon_s^{\cdot k} - \epsilon_s^{k \cdot}] [\kappa_k^{\cdot s} - \kappa_k^{s \cdot}] \delta_q^p \right].
 \end{aligned}$$

Для упрощения работы с определяющими постоянными введем новые па-

раметры. Вместо девяти исходных постоянных ${}^2C_{\mathfrak{c}}$ ($\mathfrak{c} = 1, \dots, 9$) из выражения для упругого потенциала (9) определим следующие модули:

$$\begin{aligned} {}^2C_1 &= G\nu(1 - 2\nu)^{-1}, & {}^2C_2 &= GL^2c_3, & {}^2C_3 &= G, \\ {}^2C_4 &= GL^2, & {}^2C_5 &= Gc_1, & {}^2C_6 &= GL^2c_2, \\ {}^2C_7 &= GLc_4, & {}^2C_8 &= GLc_5, & {}^2C_9 &= GLc_6. \end{aligned} \quad (12)$$

Аналогично, вместо постоянных ${}^3C_{\mathfrak{a}}$ ($\mathfrak{a} = 1, \dots, 28$) введем

$$\begin{aligned} {}^3C_1 &= Gc_7, & {}^3C_2 &= GL^3c_8, & {}^3C_3 &= Gc_9, & {}^3C_4 &= GL^3c_{10}, \\ {}^3C_5 &= Gc_{11}, & {}^3C_6 &= GLc_{12}, & {}^3C_7 &= GL^2c_{13}, & {}^3C_8 &= GL^3c_{14}, \\ {}^3C_9 &= GLc_{15}, & {}^3C_{10} &= GL^2c_{16}, & {}^3C_{11} &= GLc_{17}, & {}^3C_{12} &= GL^2c_{18}, \\ {}^3C_{13} &= GLc_{19}, & {}^3C_{14} &= GL^2c_{20}, & {}^3C_{15} &= GLc_{21}, & {}^3C_{16} &= GL^2c_{22}, \\ {}^3C_{17} &= Gc_{23}, & {}^3C_{18} &= GLc_{24}, & {}^3C_{19} &= GL^2c_{25}, & {}^3C_{20} &= GL^3c_{26}, \\ {}^3C_{21} &= Gc_{27}, & {}^3C_{22} &= GLc_{28}, & {}^3C_{23} &= GL^2c_{29}, & {}^3C_{24} &= GL^3c_{30}, \\ {}^3C_{25} &= GLc_{31}, & {}^3C_{26} &= GL^2c_{32}, & {}^3C_{27} &= GLc_{33}, & {}^3C_{28} &= GL^2c_{34}. \end{aligned} \quad (13)$$

В результате мы получаем систему из двух размерных параметров и тридцати пяти безразмерных параметров: G — модуль сдвига (имеет размерность силовых напряжений); ν — коэффициент Пуассона (не имеет физической размерности); L — характеристическая микродлина; c_s ($s = 1, \dots, 34$) — не имеющие физической размерности постоянные.

Заключение. В работе исследуется построение квадратичных поправок к определяющим уравнениям для силовых и моментных напряжений в гемитропных микрополярных упругих телах.

1. Ранее были предложены Н/Е/А-представления энергетических потенциалов. Среди них только А-форма позволяет получить кубическую аппроксимацию энергетического потенциала для гемитропного микрополярного тела в виде полиномиальной линейной комбинации рациональных инвариантов. Важно отметить, что часть этих инвариантов, имеющих псевдотензорную природу, проявляет чувствительность к зеркальным преобразованиям в трехмерном пространстве.
2. Для системы, состоящей из двух симметричных и двух антисимметричных тензоров второго ранга, построен полный неприводимый набор индивидуальных и совместных целых рациональных алгебраических инвариантов. Важно отметить, что представленная форма не содержит метрического тензора [11].
3. Полученный набор инвариантов использован для построения кубической энергетической формы гемитропного микрополярного тела и формирования полного набора из 37 определяющих постоянных, характеризующих упругие свойства материала.
4. Получены определяющие уравнения для силовых и моментных напряжений, включающие квадратичные поправки, справедливые в произвольной криволинейной системе координат. С этой целью вычислены

производные по асимметричным тензорным аргументам от квадратичных и кубических инвариантов.

5. Получены соотношения (12) и (13), устанавливающие соответствие между формальным представлением и физически интерпретируемыми параметрами материала — модулем сдвига, коэффициентом Пуассона, характеристической микродлиной и тридцатью четырьмя безразмерными параметрами, полностью характеризующими упругие свойства гемитропного материала в кубическом приближении.

Конкурирующие интересы. У нас нет конфликта интересов в отношении авторства и публикации этой статьи.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Работа выполнена по теме государственного задания (государственный регистрационный номер 124012500437-9).

Библиографический список

1. Cosserat E., Cosserat F. *Théorie des corps déformables*. Paris: Herman et Fils, 1909. vi+226 pp.
2. Kessel S. Lineare Elastizitätstheorie des anisotropen Cosserat-Kontinuums // *Abh. Braunschw. Wiss. Ges.*, 1964. vol. 16. pp. 1–22. DOI: <https://doi.org/10.24355/dbbs.084-201301181342-0>.
3. Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua / *Applied Mechanics*; eds. H. Görtler. Berlin, Heidelberg: Springer, 1966. pp. 153–158. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-29364-5_16.
4. Nowacki W. *Theory of Micropolar Elasticity*: Course held at the Department for Mechanics of Deformable Bodies, July 1970, Udine / International Centre for Mechanical Sciences. Courses and Lectures. vol. 25. Wien, New York: Springer, 1972. 286 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-7091-2720-9>.
5. Dyszlewicz J. *Micropolar Theory of Elasticity* / Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. vol. 15. Berlin: Springer, 2004. xv+356 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-45286-7>.
6. Besdo D. Ein Beitrag zur nichtlinearen Theorie des Cosserat-Kontinuums // *Acta Mech.*, 1974. vol. 20, no. 1. pp. 105–131. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01374965>.
7. Nowacki W. *Theory of Asymmetric Elasticity*. Oxford: Pergamon Press, 1986. viii+383 pp.
8. Радаев Ю. Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2018. Т. 22, № 3. С. 504–517. EDN: YOYJQD. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1635>.
9. Veblen O., Thomas T. Y. Extensions of relative tensors // *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1924. vol. 26, no. 3. pp. 373–377. DOI: <https://doi.org/10.2307/1989146>.
10. Veblen O. *Invariants of Quadratic Differential Forms* / Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics. vol. 24. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1927. viii+102 pp.
11. Gurevich G. B. *Foundations of the Theory of Algebraic Invariants*. Groningen, The Netherlands: P. Noordhoff, 1964. viii+429 pp.
12. Schouten J. A. *Tensor Analysis for Physicist*. Oxford: Clarendon Press, 1951. 434 pp.
13. Synge J. L., Schild A. *Tensor Calculus*. New York: Dover Publ., 1978. xi+324 pp.
14. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Приведение естественных форм гемитропных энергетических потенциалов к конвенциональным // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2022. № 4. С. 108–115. EDN: DTZTJY. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.54.4.009>.

15. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. О двух основных естественных формах потенциала асимметричных тензоров силовых и моментных напряжений в механике гемитропных тел // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2022. №3. С. 86–100. EDN: YOEHQV. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.53.3.010>.
16. Мурашкин Е. В. О связи микрополярных определяющих параметров термодинамических потенциалов состояния // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2022. №1. С. 110–121. EDN: JXXIAX. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2023.55.1.012>.
17. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Волновые критерии ультратропности микрополярных упругих тел // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2023. №4. С. 128–138. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2024.62.4.009>.
18. Радаев Ю. Н. Тензоры с постоянными компонентами в определяющих уравнениях гемитропного микрополярного тела // *Изв. РАН. МТТ*, 2023. №5. С. 98–110. EDN: PHNOCG. DOI: <https://doi.org/10.31857/S057232992370006X>.
19. Spencer A. J. M. Theory of invariants / *Continuum Physics*. vol. 1. New York: Academic Press, 1971. pp. 240–353. DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-240801-4.50008-X>.
20. Nye J. F. *Physical Properties of Crystals. Their Representation by Tensors and Matrices*. Oxford: Clarendon Press, 1957. xv+322 pp.
21. Wooster W. A. *Experimental Crystal Physics*. Oxford: Clarendon Press, 1957. viii+115 pp.
22. Voigt W. *Lehrbuch der Kristallphysik (mit Ausschluß der Kristalloptik)*. Leipzig: B.G. Teubner, 1928. xxvi+978 pp. (In German)
23. Murashkin E. V., Radaev Y. N. Two-dimensional Nye figures for some micropolar elastic solids // *Mech. Solids*, 2023. vol. 58, no. 6. pp. 2254–2268. EDN: AIPHVE. DOI: <https://doi.org/10.3103/s0025654423700243>.
24. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Двумерные фигуры Ная для гемитропных микрополярных упругих тел // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика*, 2024. Т. 24, №1. С. 109–122. EDN: FKFRHA. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-109-122>.
25. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Об одном способе построения фигур Ная в асимметричных теориях демитропной микрополярной упругости // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2023. №3. С. 100–111. EDN: KSSOKR. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2023.57.3.009>.
26. Krylova E. Yu., Murashkin E. V., Radaev Y. N. The Nye cells and figures for athermic hemitropic, isotropic and ultrasotropic micropolar elastic solids // *Mech. Solids*, 2024. vol. 59, no. 3. pp. 1311–1320. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0025654424603719>.
27. Murashkin E. V., Radaev Y. N. A negative weight pseudotensor formulation of coupled hemitropic thermoelasticity // *Lobachevskii J. Math.*, 2023. vol. 44, no. 6. pp. 2440–2449. EDN: PINYDI. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080223060392>.
28. Murashkin E. V., Radaev Yu. N. Theory of Poisson's ratio for a thermoelastic micropolar acentric isotropic solid // *Lobachevskii J. Math.*, 2024. vol. 45, no. 5. pp. 2378–2390. EDN: ASGCQB. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080224602480>.
29. Радаев Ю. Н., Мурашкин Е. В. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // *Проблемы прочности и пластичности*, 2020. Т. 82, №4. С. 399–412. EDN: TODIFV. DOI: <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412>.
30. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Теплопроводность микрополярных тел, чувствительных к зеркальным отражениям пространства // *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки*, 2023. Т. 165, №4. С. 389–403. EDN: HTQAHJ. DOI: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2023.4.389-403>.
31. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Связанная термоупругость гемитропных сред. Псевдотензорная формулировка // *Изв. РАН. МТТ*, 2023. №3. С. 163–176. EDN: JMQVBJ. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0572329922600876>.

32. Murashkin E. V., Radayev Y. N. Heat transfer in anisotropic micropolar solids // *Mech. Solids*, 2023. vol. 58, no. 9. pp. 3111–3119. EDN: **WBUGBA**. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654423700255>.
33. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. К поливариантности основных уравнений связанной термоупругости микрополярного тела // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2023. № 3. С. 112–128. EDN: **RQUKBG**. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2023.57.3.010>.
34. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Мультивесовая термомеханика гемитропных микрополярных тел // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2023. № 4. С. 86–120. EDN: **RQUKBG**. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2023.58.4.010>.
35. Murashkin E. V., Radayev Y. N. On algebraic triple weights formulation of micropolar thermoelasticity // *Mech. Solids*, 2024. vol. 59, no. 1. pp. 555–580. EDN: **GBHEKM**. DOI: <https://doi.org/10.1134/s0025654424700274>.
36. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Термомеханические состояния гиротропных микрополярных тел // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 27, № 4. С. 659–678. EDN: **CRRHLO**. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu2062>.
37. Розенфельд Б. А. *Многомерные пространства*. М.: Наука, 1966. 648 с.
38. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Алгебраический алгоритм систематического приведения одноточечных псевдотензоров к абсолютным тензорам // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2022. № 1. С. 17–27. EDN: **ZJWFGT**. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.51.1.002>.
39. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Элементы теории // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2022. № 2. С. 106–115. EDN: **FQVGRK**. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.52.2.012>.
40. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Приложения к механике континуума // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2022. № 2. С. 118–127. EDN: **ESTJSA**. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.52.2.013>.
41. Сушкевич А. К. *Основы высшей алгебры*. М.: ОНТИ, 1937. 476 с.
42. Жилин П. А. *Рациональная механика сплошных сред*. СПб.: Политехн. ун-т, 2012. 584 с.

MSC: 15A72, 74A35, 74B20

On quadratic corrections of constitutive equations for a hemitropic micropolar elastic solid

*E. V. Murashkin, Yu. N. Radayev*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences,
101–1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.

Abstract

In the present paper, cubic approximations of energy forms for the potentials of force and couple stresses in hemitropic micropolar elastic solids are proposed and discussed. H/E/A-representations for these potentials were introduced in earlier studies. However, the A-form allows us to obtain a cubic approximation for the stress potential in the form of a polynomial combination of invariants, comprising integer powers of individual and joint base rational algebraic invariants and pseudoinvariants. Some of these pseudoinvariants have “pseudo-tensor pre-images” that are sensitive to mirror reflections and inversions of three-dimensional space.

Within the framework of this study, a complete irreducible set of individual and joint linear, quadratic, and cubic integer rational algebraic invariants is obtained for a set consisting of the symmetric and antisymmetric parts of the asymmetric strain tensor and the wryness tensor. A cubic energy form for a hemitropic micropolar solid is determined, and a complete set of 37 constitutive moduli is specified. Additionally, constitutive equations for force and couple stresses in arbitrary curvilinear coordinates are derived, including quadratic corrections.

Keywords: algebraic weight, pseudotensor, nanoscale, microscale, energy form, integer rational algebraic invariant, irreducible system of invariants, cubic approximation, hemitropic micropolar elastic solid.

Received: 8th January, 2025 / Revised: 19th April, 2025 /Accepted: 28th April, 2025 / First online: 5th May, 2025

Mechanics of Solids

Research Article

© The Author(s), 2025

© Samara State Technical University, 2025 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On quadratic corrections of constitutive equations for a hemitropic micropolar elastic solid, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2025, vol. 29, no. 2, pp. 274–293. EDN: DZUMDJ. DOI: [10.14498/vsgtu2144](https://doi.org/10.14498/vsgtu2144) (In Russian).

Authors' Details:

Evgenii V. Murashkin  <https://orcid.org/0000-0002-3267-4742>Cand. Phys. & Math. Sci., PhD, MD; Senior Researcher; Lab. of Modeling in Solid Mechanics; e-mail: murashkin@ipmnet.ru, evmurashkin@gmail.com*Yuri N. Radayev*  <https://orcid.org/0000-0002-0866-2151>D.Sc. (Phys. & Math. Sci.), Ph.D., M.Sc., Professor; Leading Researcher; Lab. of Modeling in Solid Mechanics; e-mail: radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com

Competing interests. We have no conflict of interest regarding the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. All authors participated in the development of the article's concept and in writing the manuscript. The authors bear full responsibility for submitting the final manuscript for publication. The final version of the manuscript was approved by all authors.

Funding. The work was carried out on the topic of the state assignment (state registration no. 124012500437-9).

References

1. Cosserat E., Cosserat F. *Théorie des corps déformables*. Paris, Herman et Fils, 1909, vi+226 pp.
2. Kessel S. Lineare Elastizitätstheorie des anisotropen Cosserat-Kontinuums, *Abh. Braunschw. Wiss. Ges.*, 1964, vol. 16, pp. 1–22. DOI: <https://doi.org/10.24355/dbbs.084-201301181342-0>.
3. Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua, In: *Applied Mechanics*; eds. H. Görtler. Berlin, Heidelberg, Springer, 1966, pp. 153–158. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-29364-5_16.
4. Nowacki W. *Theory of Micropolar Elasticity*, Course held at the Department for Mechanics of Deformable Bodies, July 1970, Udine, International Centre for Mechanical Sciences. Courses and Lectures, vol. 25. Wien, New York, Springer, 1972, 286 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-7091-2720-9>.
5. Dyszlewicz J. *Micropolar Theory of Elasticity*, Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics, vol. 15. Berlin, Springer, 2004, xv+356 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-45286-7>.
6. Besdo D. Ein Beitrag zur nichtlinearen Theorie des Cosserat-Kontinuums, *Acta Mech.*, 1974, vol. 20, no. 1, pp. 105–131. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01374965>.
7. Nowacki W. *Theory of Asymmetric Elasticity*. Oxford, Pergamon Press, 1986, viii+383 pp.
8. Radayev Yu. N. The Lagrange multipliers method in covariant formulations of micropolar continuum mechanics theories, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 3, pp. 504–517 (In Russian). EDN: YOYJQD. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1635>.
9. Veblen O., Thomas T. Y. Extensions of relative tensors, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1924, vol. 26, no. 3, pp. 373–377. DOI: <https://doi.org/10.2307/1989146>.
10. Veblen O. *Invariants of Quadratic Differential Forms*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, vol. 24. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1927, viii+102 pp.
11. Gurevich G. B. *Foundations of the Theory of Algebraic Invariants*. Groningen, The Netherlands, P. Noordhoff, 1964, viii+429 pp.
12. Schouten J. A. *Tensor Analysis for Physicist*. Oxford, Clarendon Press, 1951, 434 pp.
13. Synge J. L., Schild A. *Tensor Calculus*. New York, Dover Publ., 1978, xi+324 pp.
14. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Reducing natural forms of hemitropic energy potentials to conventional ones, *Vestn. I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical Univ. Ser. Mechanics of a Limit State*, 2022, no. 4, pp. 108–115 (In Russian). EDN: DTZTJY. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.54.4.009>.
15. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On two base natural forms of asymmetric force and couple stress tensors of potential in mechanics of hemitropic solids, *Vestn. I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical Univ. Ser. Mechanics of a Limit State*, 2022, no. 3, pp. 86–100 (In Russian). EDN: YOEHQV. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.53.3.010>.
16. Murashkin E. V. On the relationship of micropolar constitutive parameters of thermodynamic state potentials, *Vestn. I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical Univ. Ser. Mechanics of a Limit State*, 2022, no. 1, pp. 110–121 (In Russian). EDN: JXXIAX. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2023.55.1.012>.

17. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Wave criteria for ultratropic micropolar elastic solids, *Vestn. I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical Univ. Ser. Mechanics of a Limit State*, 2023, no. 4, pp. 128–138 (In Russian). DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2024.62.4.009>.
18. Radayev Yu. N. Tensors with constant components in the constitutive equations of hemitropic micropolar solids, *Mech. Solids*, 2023, vol. 58, no. 5, pp. 1517–1527. EDN: **SQQPGJ**. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654423700206>.
19. Spencer A. J. M. Theory of invariants, In: *Continuum Physics*, vol. 1. New York, Academic Press, 1971, pp. 240–353. DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-240801-4.50008-X>.
20. Nye J. F. *Physical Properties of Crystals. Their Representation by Tensors and Matrices*. Oxford, Clarendon Press, 1957, xv+322 pp.
21. Wooster W. A. *Experimental Crystal Physics*. Oxford, Clarendon Press, 1957, viii+115 pp.
22. Voigt W. *Lehrbuch der Kristallphysik (mit Ausschluß der Kristalloptik)*. Leipzig, B.G. Teubner, 1928, xxvi+978 pp. (In German)
23. Murashkin E. V., Radaev Y. N. Two-dimensional Nye figures for some micropolar elastic solids, *Mech. Solids*, 2023, vol. 58, no. 6, pp. 2254–2268. EDN: **AIPHVE**. DOI: <https://doi.org/10.3103/s0025654423700243>.
24. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Two-dimensional Nye figures for hemitropic micropolar elastic solids, *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, 2024, vol. 24, no. 1, pp. 109–122 (In Russian). EDN: **FKFRHA**. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-109-122>.
25. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a method of constructing Nye figures for asymmetric theories of micropolar elasticity, *Vestn. I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical Univ. Ser. Mechanics of a Limit State*, 2023, no. 3, pp. 100–111 (In Russian). EDN: **KSSOKR**. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2023.57.3.009>.
26. Krylova E. Yu., Murashkin E. V., Radayev Y. N. The Nye cells and figures for athermic hemitropic, isotropic and ultraisotropic micropolar elastic solids, *Mech. Solids*, 2024, vol. 59, no. 3, pp. 1311–1320. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0025654424603719>.
27. Murashkin E. V., Radayev Y. N. A negative weight pseudotensor formulation of coupled hemitropic thermoelasticity, *Lobachevskii J. Math.*, 2023, vol. 44, no. 6, pp. 2440–2449. EDN: **PINYDI**. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080223060392>.
28. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Theory of Poisson's ratio for a thermoelastic micropolar acentric isotropic solid, *Lobachevskii J. Math.*, 2024, vol. 45, no. 5, pp. 2378–2390. EDN: **ASGCQB**. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080224602480>.
29. Radayev Yu. N., Murashkin E. V. Pseudotensor formulation of the mechanics of hemitropic micropolar media, *Problems of Strength and Plasticity*, 2020, vol. 82, no. 4, pp. 399–412 (In Russian). EDN: **TODIFV**. DOI: <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412>.
30. Murashkin E. V., Radayev Y. N. Heat conduction of micropolar solids sensitive to mirror reflections of three-dimensional space, *Uchen. Zap. Kazan. Univ. Ser. Fiz.-Matem. Nauki*, 2023, vol. 165, no. 4, pp. 389–403 (In Russian). EDN: **HTQAHJ**. DOI: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2023.4.389-403>.
31. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Coupled thermoelasticity of hemitropic media. Pseudotensor formulation, *Mech. Solids*, 2023, vol. 58, no. 3, pp. 802–813. EDN: **CISJLW**. DOI: <https://doi.org/10.3103/s0025654423700127>.
32. Murashkin E. V., Radayev Y. N. Heat transfer in anisotropic micropolar solids, *Mech. Solids*, 2023, vol. 58, no. 9, pp. 3111–3119. EDN: **WBUGBA**. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654423700255>.
33. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On the polyvariance of the base equations of coupled micropolar thermoelasticity, *Vestn. I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical Univ. Ser. Mechanics of a Limit State*, 2023, no. 3, pp. 112–128 (In Russian). EDN: **RQUKBG**. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2023.57.3.010>.
34. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On the polyvariance of the base equations of coupled micropolar thermoelasticity, *Vestn. I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical Univ. Ser. Mechanics of a Limit State*, 2023, no. 4, pp. 86–120 (In Russian). EDN: **RQUKBG**. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2023.58.4.010>.

35. Murashkin E. V., Radayev Y. N. On algebraic triple weights formulation of micropolar thermoelasticity, *Mech. Solids*, 2024, vol. 59, no. 1, pp. 555–580. EDN: GBHEKM. DOI: <https://doi.org/10.1134/s0025654424700274>.
36. Murashkin E. V., Radayev Y. N. Thermomechanical states of gyrotropic micropolar solids, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 4, pp. 659–678 (In Russian). EDN: CRRHLO. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu2062>.
37. Rozenfel'd B. A. *Mnogomernye prostranstva* [Multidimensional Spaces]. Moscow, Nauka, 1966, 648 pp. (In Russian)
38. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Algebraic algorithm for the systematic reduction of one-point pseudotensors to absolute tensors, *Vestn. I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical Univ. Ser. Mechanics of a Limit State*, 2022, no. 1, pp. 17–27 (In Russian). EDN: ZJWFGT. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.51.1.002>.
39. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Covariantly constant tensors in Euclidean spaces. Elements of the theory, *Vestn. I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical Univ. Ser. Mechanics of a Limit State*, 2022, no. 2, pp. 106–115 (In Russian). EDN: FQVGRK. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.52.2.012>.
40. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Covariantly constant tensors in Euclidean spaces. Applications to continuum mechanics, *Vestn. I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical Univ. Ser. Mechanics of a Limit State*, 2022, no. 2, pp. 118–127 (In Russian). EDN: ESTJSA. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.52.2.013>.
41. Sushkevich A. K. *Osnovy vysshei algebry* [Fundamentals of Higher Algebra]. Moscow, ONTI, 1937, 476 pp. (In Russian)
42. Zhilin P. A. *Ratsional'naya mekhanika sploshnykh sred* [Rational Continuum Mechanics Media]. St. Petersburg, Polytechn. Univ., 2012, 584 pp. (In Russian)