



УДК 539.3

## Поправки четвертой степени в энергетических потенциалах гемитропных микрополярных тел

*Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев*

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН,  
Россия, 119526, Москва, просп. Вернадского, 101, корп. 1.

### Аннотация

Настоящее исследование посвящено применению теории алгебраических инвариантов для аппроксимации потенциала силовых и моментных напряжений четвертой степени в нелинейном гемитропном микрополярном упругом теле. На основе теории целых рациональных алгебраических инвариантов (полуинвариантов) исследовано полное множество неприводимых инвариантов для системы двух асимметричных тензоров второго ранга, представленных в форме инвариантных следов.

В результате выделен набор из 86 инвариантных следов, включающий 8 индивидуальных инвариантов, 17 парных, 44 инвариантных тройки и 17 инвариантных четверок. Из 86 элементов отобрано 39 инвариантов в соответствии с правилом возрастания алгебраических степеней: 2 линейных инварианта, 6 квадратичных, 12 кубических и 19 инвариантов четвертой степени. Предложена схема построения 39 инвариантов четвертой степени, сгруппированных в четыре категории на основе следующих правил: произведения линейных инвариантов между собой, произведения квадратичных инвариантов между собой, произведения линейных и квадратичных инвариантов, попарные произведения линейных и кубических инвариантов, а также собственные инварианты четвертой степени.

Построен потенциал силовых и моментных напряжений гемитропного микрополярного упругого тела, включающий квадратичные, кубические и слагаемые четвертой алгебраической степени. Таким образом, микрополярный потенциал характеризуется 124 определяющими модулями. Приведены формулы для вычисления всех 39 инвариантов в смешанных тензорных компонентах. В результате получены 87 поправок

### Механика деформируемого твердого тела

#### Научная статья

© Коллектив авторов, 2025

© СамГТУ, 2025 (составление, дизайн, макет)

  Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

#### Образец для цитирования

Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Поправки четвертой степени в энергетических потенциалах гемитропных микрополярных тел // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2025. Т. 29, № 3. С. 472–485. EDN: **СМАРНС**. DOI: [10.14498/vsgtu2163](https://doi.org/10.14498/vsgtu2163).

#### Сведения об авторах

*Евгений Валерьевич Мурашкин*  <https://orcid.org/0000-0002-3267-4742>

кандидат физико-математических наук; старший научный сотрудник; лаб. моделирования в механике деформируемого твердого тела; e-mail: [murashkin@ipmnet.ru](mailto:murashkin@ipmnet.ru), [evmurashkin@gmail.com](mailto:evmurashkin@gmail.com)

*Юрий Николаевич Радаев*  <https://orcid.org/0000-0002-0866-2151>

доктор физико-математических наук, профессор; ведущий научный сотрудник; лаб. моделирования в механике деформируемого твердого тела; e-mail: [radayev@ipmnet.ru](mailto:radayev@ipmnet.ru), [y.radayev@gmail.com](mailto:y.radayev@gmail.com)

к кубическому потенциалу силовых и моментных напряжений нелинейного гемитропного микрополярного упругого тела.

**Ключевые слова:** наномасштаб, микромасштаб, энергетическая форма, целочисленный рациональный алгебраический инвариант, неприводимая система инвариантов, кубическая аппроксимация, гемитропное микрополярное упругое тело.

Получение: 25 февраля 2025 г. / Исправление: 12 июня 2025 г. /

Принятие: 18 июня 2025 г. / Публикация онлайн: 10 июля 2025 г.

**1. Введение и вводные замечания.** При построении определяющих уравнений в механике континуума исключительную роль играет теория рациональных алгебраических инвариантов [1–7]. Инварианты и полуинварианты позволяют корректно сформулировать аппроксимации заданной степени для энергетических потенциалов силовых и моментных напряжений в микрополярной механике упругих тел [8–18]. Это особенно актуально при построении математических моделей гемитропных микрополярных упругих сред. В данном случае наиболее подходящим оказывается А-представление [17, 18] энергетических форм, представляющее собой линейную комбинацию индивидуальных и совместных целых рациональных алгебраических инвариантов асимметричного тензора деформаций и градиента поля микроповоротов относительно гемитропной группы преобразований.

Основным понятием теории алгебраических инвариантов является индивидуальный инвариант (псевдоинвариант) тензора (псевдотензора) [4, с. 136]. При этом если алгебраический вес  $g$  инварианта равен нулю, то инвариант называется абсолютным, а при  $g \neq 0$  — относительным, или псевдоинвариантом. Инварианты тензора могут быть заданы несколькими способами [4, с. 327]. Например, для аффинора  $A_{k \cdot}^s$  следы его степеней образуют бесконечную систему инвариантов:

$$S_1 = A_{s \cdot}^s, \quad S_2 = A_{s \cdot}^k A_{k \cdot}^s, \quad S_3 = A_{s \cdot}^k A_{k \cdot}^l A_{l \cdot}^s, \quad \dots \quad (1)$$

С другой стороны, существенную роль играют также следующие инварианты:

$$I_1 = A_{s \cdot}^s, \quad I_2 = A_{[s \cdot}^k A_{k \cdot]}^s, \quad I_3 = A_{[s \cdot}^k A_{k \cdot}^l A_{l \cdot]}^s, \quad \dots \quad (2)$$

Квадратные скобки в (2) обозначают операцию альтернирования по заключенным в них индексам. Раскрывая знак альтернирования в (2), можно получить формулы Варинга, связывающие между собой инварианты системы (2) и системы (1).

Совместные инварианты набора, состоящего из нескольких тензоров (псевдотензоров), определяются следами внутренних совместных произведений тензоров, входящих в набор.

Системы инвариантов (1) и (2) представляют собой бесконечные множества. Кроме того, целая рациональная функция (с числовыми коэффициентами) от нескольких инвариантов системы также будет (при определенных условиях) инвариантом того же набора.

В связи с этим возникает понятие неприводимого инварианта системы, т.е. такого инварианта, который не является целой рациональной функцией от других инвариантов той же системы. Множество всех неприводимых инвариантов системы называется ее полной системой инвариантов, т.е. множеством инвариантов, представляющих собой целые рациональные функции, причем никакой из инвариантов не может быть выражен в виде целой рациональной функции остальных (или некоторых из них).

Следует отметить, что монография [5] посвящена построению систем инвариантов для различных наборов тензоров. Однако как в ней, так и в ее английском оригинале присутствуют досадные опечатки [5, с. 65, Табл. 2]. Среди индивидуальных инвариантов матрицы **a** ошибочно указан инвариант  $\mathbf{b}^3$ . В строке, описывающей набор совместных инвариантов двух симметричных и двух антисимметричных матриц второго ранга **a**, **b**, **u** и **v**, отсутствуют инварианты  $\mathbf{u}^2\mathbf{a}\mathbf{v}\mathbf{b}^{2*\dagger}$ , а вместо инвариантов  $\mathbf{u}\mathbf{v}\mathbf{a}^2\mathbf{b}^{*\dagger}$  приведены инварианты  $\mathbf{u}\mathbf{v}\mathbf{a}^2\mathbf{b}^*$  и  $\mathbf{u}\mathbf{v}\mathbf{b}\mathbf{a}^{2*}$ . Однако, руководствуясь статьями [1, 2], можно составить корректный полный набор индивидуальных и совместных гемитропных инвариантов двух симметричных и двух антисимметричных тензоров второго ранга (см. [2, р. 80, Table 1]). Вместе с тем первую часть статьи [1] следует читать с осторожностью, поскольку, по утверждению самого автора, в ней также присутствуют неточности.

Настоящее исследование направлено на последовательное применение результатов теории алгебраических инвариантов для построения аппроксимации заданной (четвертой) степени точности энергетических форм потенциалов силовых и моментных напряжений микрополярных упругих тел. С помощью теории целых рациональных алгебраических инвариантов (полуинвариантов) изучено полное множество неприводимых инвариантов для системы двух асимметричных тензоров второго ранга в форме инвариантных следов. Из 86 элементов отобрано 39 инвариантов в соответствии с правилом возрастания алгебраических степеней: 2 линейных инварианта, 6 квадратичных, 12 кубических и 19 инвариантов четвертой степени. Предложена схема построения 39 инвариантов четвертой степени, сгруппированных в четыре категории на основе следующих правил: произведения линейных инвариантов между собой, произведения квадратичных инвариантов между собой, произведения линейных и квадратичных инвариантов, попарные произведения линейных и кубических инвариантов, а также собственные инварианты четвертой степени. Построен потенциал силовых и моментных напряжений гемитропного микрополярного упругого тела, содержащий квадратичные, кубические и слагаемые четвертой алгебраической степени. В результате получены 87 поправок к кубическому потенциалу силовых и моментных напряжений нелинейного гемитропного микрополярного упругого тела.

Изложение в значительной степени основано на терминологии, обозначениях, методах и результатах, разработанных в предыдущих статьях [17–25].

**2. Инвариантные следы, не превышающие четвертую степень и образующие целый рациональный базис относительно гемитропной группы преобразований.** Рассмотрим систему, состоящую из двух асимметричных тензоров второго ранга. Каждый из этих тензоров может быть представлен в виде алгебраической суммы симметричной и антисимметрич-

ной составляющих:

$$\mathbf{A} + \mathbf{V}; \quad \mathbf{B} + \mathbf{W}.$$

При этом выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{A}^\top; \quad \mathbf{V} = -\mathbf{V}^\top; \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}^\top; \quad \mathbf{W} = -\mathbf{W}^\top. \end{aligned}$$

Используя результаты, полученные в работах [1, 2, 5], для системы, состоящей из двух симметричных  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  и двух антисимметричных  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{W}$  тензоров второго ранга, можно построить систему инвариантов. Следует отметить, что рассуждения о совместных и индивидуальных инвариантах такой системы существенно зависят от размерности пространства [26]. В дальнейшем будем считать, что размерность пространства равна 3. Полный набор индивидуальных и совместных гемитропных инвариантов указанной системы тензоров состоит из 86 неприводимых элементов [1, 2, 5], упорядоченных согласно [5, с. 65, Табл. 2]:

- |                                                        |                                                        |                                                        |                                                        |
|--------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|
| 1) $\text{tr}[\mathbf{A}]$ ;                           | 2) $\text{tr}[\mathbf{A}^2]$ ;                         | 3) $\text{tr}[\mathbf{A}^3]$ ;                         | 4) $\text{tr}[\mathbf{B}]$ ;                           |
| 5) $\text{tr}[\mathbf{B}^2]$ ;                         | 6) $\text{tr}[\mathbf{B}^3]$ ;                         | 7) $\text{tr}[\mathbf{V}^2]$ ;                         | 8) $\text{tr}[\mathbf{W}^2]$ ;                         |
| 9) $\text{tr}[\mathbf{AB}]$ ;                          | 10) $\text{tr}[\mathbf{A}^2\mathbf{B}]$ ;              | 11) $\text{tr}[\mathbf{B}^2\mathbf{A}]$ ;              | 12) $\text{tr}[\mathbf{A}^2\mathbf{B}^2]$ ;            |
| 13) $\text{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{A}]$ ;              | 14) $\text{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{A}^2]$ ;            | 15) $\text{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{AVA}^2]$ ;          | 16) $\text{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{B}]$ ;              |
| 17) $\text{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{B}^2]$ ;            | 18) $\text{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{BVB}^2]$ ;          | 19) $\text{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{A}]$ ;              | 20) $\text{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{A}^2]$ ;            |
| 21) $\text{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{AWA}^2]$ ;          | 22) $\text{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{B}]$ ;              | 23) $\text{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{B}^2]$ ;            | 24) $\text{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{BWB}^2]$ ;          |
| 25) $\text{tr}[\mathbf{VW}]$ ;                         | 26) $\text{tr}[\mathbf{VAB}]$ ;                        | 27) $\text{tr}[\mathbf{VA}^2\mathbf{B}]$ ;             | 28) $\text{tr}[\mathbf{VB}^2\mathbf{A}]$ ;             |
| 29) $\text{tr}[\mathbf{VA}^2\mathbf{B}^2]$ ;           | 30) $\text{tr}[\mathbf{VA}^2\mathbf{BA}]$ ;            | 31) $\text{tr}[\mathbf{VB}^2\mathbf{AB}]$ ;            | 32) $\text{tr}[\mathbf{VA}^2\mathbf{B}^2\mathbf{A}]$ ; |
| 33) $\text{tr}[\mathbf{VB}^2\mathbf{A}^2\mathbf{B}]$ ; | 34) $\text{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{AB}]$ ;             | 35) $\text{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{A}^2\mathbf{B}]$ ;  | 36) $\text{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{B}^2\mathbf{A}]$ ;  |
| 37) $\text{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{AVB}]$ ;            | 38) $\text{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{AVB}^2]$ ;          | 39) $\text{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{BVA}^2]$ ;          | 40) $\text{tr}[\mathbf{WAB}]$ ;                        |
| 41) $\text{tr}[\mathbf{WA}^2\mathbf{B}]$ ;             | 42) $\text{tr}[\mathbf{WB}^2\mathbf{A}]$ ;             | 43) $\text{tr}[\mathbf{WA}^2\mathbf{B}^2]$ ;           | 44) $\text{tr}[\mathbf{WA}^2\mathbf{BA}]$ ;            |
| 45) $\text{tr}[\mathbf{WB}^2\mathbf{AB}]$ ;            | 46) $\text{tr}[\mathbf{WA}^2\mathbf{B}^2\mathbf{A}]$ ; | 47) $\text{tr}[\mathbf{WB}^2\mathbf{A}^2\mathbf{B}]$ ; | 48) $\text{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{AB}]$ ;             |
| 49) $\text{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{A}^2\mathbf{B}]$ ;  | 50) $\text{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{B}^2\mathbf{A}]$ ;  | 51) $\text{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{AWB}]$ ;            | 52) $\text{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{AWB}^2]$ ;          |
| 53) $\text{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{BWA}^2]$ ;          | 54) $\text{tr}[\mathbf{VWA}]$ ;                        | 55) $\text{tr}[\mathbf{VWA}^2]$ ;                      | 56) $\text{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{WA}]$ ;             |
| 57) $\text{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{VA}]$ ;             | 58) $\text{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{WA}^2]$ ;           | 59) $\text{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{VA}^2]$ ;           | 60) $\text{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{AWA}^2]$ ;          |
| 61) $\text{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{AVA}^2]$ ;          | 62) $\text{tr}[\mathbf{VWB}]$ ;                        | 63) $\text{tr}[\mathbf{VWB}^2]$ ;                      | 64) $\text{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{WB}]$ ;             |
| 65) $\text{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{VB}]$ ;             | 66) $\text{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{WB}^2]$ ;           | 67) $\text{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{VB}^2]$ ;           | 68) $\text{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{BWB}^2]$ ;          |
| 69) $\text{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{BVB}^2]$ ;          | 70) $\text{tr}[\mathbf{VWAB}]$ ;                       | 71) $\text{tr}[\mathbf{VWBA}]$ ;                       | 72) $\text{tr}[\mathbf{VWA}^2\mathbf{B}]$ ;            |
| 73) $\text{tr}[\mathbf{VWB}^2\mathbf{A}]$ ;            | 74) $\text{tr}[\mathbf{WVA}^2\mathbf{B}]$ ;            | 75) $\text{tr}[\mathbf{WVB}^2\mathbf{A}]$ ;            | 76) $\text{tr}[\mathbf{VWA}^2\mathbf{B}^2]$ ;          |
| 77) $\text{tr}[\mathbf{VWA}^2\mathbf{BA}]$ ;           | 78) $\text{tr}[\mathbf{VWB}^2\mathbf{AB}]$ ;           | 79) $\text{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{WAB}]$ ;            | 80) $\text{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{VAB}]$ ;            |
| 81) $\text{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{AWB}]$ ;            | 82) $\text{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{AVB}]$ ;            | 83) $\text{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{BWA}^2]$ ;          | 84) $\text{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{AWB}^2]$ ;          |
| 85) $\text{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{BVA}^2]$ ;          | 86) $\text{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{AVB}^2]$ .          |                                                        |                                                        |

Здесь и далее операция внутреннего произведения тензоров будет опускаться, т.е. запись  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  сокращается до  $\mathbf{AB}$ .

В дальнейшем ограничимся рассмотрением гемитропных инвариантов не выше четвертой степени из набора (3). Количество таких инвариантов составляет 39. Для удобства перенумеруем их в соответствии со следующими правилами:

- 1) инварианты нумеруются в порядке возрастания их алгебраической степени;
- 2) при одинаковой степени — в порядке увеличения количества различных сомножителей во внутреннем произведении;
- 1) при прочих равных условиях — в алфавитном порядке.

При этом правило 1 является главным, а правила 2 и 3 — подчиненными. Кроме того, правило 3 также подчинено правилу 2. В результате получаем упорядоченный набор инвариантов не выше четвертой степени:

$$\begin{array}{llll}
 1) \operatorname{tr}[\mathbf{A}]; & 2) \operatorname{tr}[\mathbf{B}]; & 3) \operatorname{tr}[\mathbf{A}^2]; & 4) \operatorname{tr}[\mathbf{B}^2]; \\
 5) \operatorname{tr}[\mathbf{V}^2]; & 6) \operatorname{tr}[\mathbf{W}^2]; & 7) \operatorname{tr}[\mathbf{AB}]; & 8) \operatorname{tr}[\mathbf{VW}]; \\
 9) \operatorname{tr}[\mathbf{A}^3]; & 10) \operatorname{tr}[\mathbf{B}^3]; & 11) \operatorname{tr}[\mathbf{AB}^2]; & 12) \operatorname{tr}[\mathbf{BA}^2]; \\
 13) \operatorname{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{A}]; & 14) \operatorname{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{B}]; & 15) \operatorname{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{A}]; & 16) \operatorname{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{B}]; \\
 17) \operatorname{tr}[\mathbf{VAB}]; & 18) \operatorname{tr}[\mathbf{WAB}]; & 19) \operatorname{tr}[\mathbf{VWA}]; & 20) \operatorname{tr}[\mathbf{VWB}]; \\
 21) \operatorname{tr}[\mathbf{A}^2\mathbf{B}^2]; & 22) \operatorname{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{A}^2]; & 23) \operatorname{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{B}^2]; & 24) \operatorname{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{A}^2]; \\
 25) \operatorname{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{B}^2]; & 26) \operatorname{tr}[\mathbf{VA}^2\mathbf{B}]; & 27) \operatorname{tr}[\mathbf{WA}^2\mathbf{B}]; & 28) \operatorname{tr}[\mathbf{VB}^2\mathbf{A}]; \\
 29) \operatorname{tr}[\mathbf{WB}^2\mathbf{A}]; & 30) \operatorname{tr}[\mathbf{VWA}^2]; & 31) \operatorname{tr}[\mathbf{VWB}^2]; & 32) \operatorname{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{AB}]; \\
 33) \operatorname{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{AB}]; & 34) \operatorname{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{WA}]; & 35) \operatorname{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{WB}]; & 36) \operatorname{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{VA}]; \\
 37) \operatorname{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{VB}]; & 38) \operatorname{tr}[\mathbf{VWAB}]; & 39) \operatorname{tr}[\mathbf{VWBA}]. & 
 \end{array} \quad (4)$$

Каждый из инвариантных следов снабжен индивидуальным идентификационным номером 1–39. Отметим, что в наборе (4) присутствуют: два инварианта первой степени (1, 2); шесть инвариантов второй степени (3–8); двенадцать инвариантов третьей степени (9–20) и девятнадцать инвариантов четвертой степени (21–39).

Для вычисления алгебраических инвариантов (4), следуя монографии [4, с. 327], можно воспользоваться представлением тензоров в смешанных компонентах. Такой подход является удобным и не зависит от метрики пространства. В этом случае инварианты (4) в заданной криволинейной системе координат принимают вид

$$\begin{array}{lll}
 1) A_s^s; & 2) B_s^s; & 3) A_s^k A_k^s; \\
 4) B_s^k B_k^s; & 5) V_s^k V_k^s; & 6) W_s^k W_k^s; \\
 7) A_s^k B_k^s; & 8) V_s^k W_k^s; & 9) A_s^k A_k^l A_l^s; \\
 10) B_s^k B_k^l B_l^s; & 11) A_s^k B_k^l B_l^s; & 12) B_s^k A_k^l A_l^s; \\
 13) V_s^k V_k^l A_l^s; & 14) V_s^k V_k^l B_l^s; & 15) W_s^k W_k^l A_l^s; \\
 16) W_s^k W_k^l B_l^s; & 17) V_s^k A_k^l B_l^s; & 18) W_s^k A_k^l B_l^s; \\
 19) V_s^k W_k^l A_l^s; & 20) V_s^k W_k^l B_l^s; & 21) A_s^k A_k^l B_l^m B_m^s; \\
 22) V_s^k V_k^l A_l^m A_m^s; & 23) V_s^k V_k^l B_l^m B_m^s; & 24) W_s^k W_k^l A_l^m A_m^s;
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 & 25) W_s^{\cdot k} W_k^{\cdot l} B_l^{\cdot m} B_m^{\cdot s}; \quad 26) V_s^{\cdot k} A_k^{\cdot l} A_l^{\cdot m} B_m^{\cdot s}; \quad 27) W_s^{\cdot k} A_k^{\cdot l} A_l^{\cdot m} B_m^{\cdot s}; \\
 & 28) V_s^{\cdot k} B_k^{\cdot l} B_l^{\cdot m} A_m^{\cdot s}; \quad 29) W_s^{\cdot k} B_k^{\cdot l} B_l^{\cdot m} A_m^{\cdot s}; \quad 30) V_s^{\cdot k} W_k^{\cdot l} A_l^{\cdot m} A_m^{\cdot s}; \\
 & 31) V_s^{\cdot k} W_k^{\cdot l} B_l^{\cdot m} B_m^{\cdot s}; \quad 32) V_s^{\cdot k} V_k^{\cdot l} A_l^{\cdot m} B_m^{\cdot s}; \quad 33) W_s^{\cdot k} W_k^{\cdot l} A_l^{\cdot m} B_m^{\cdot s}; \\
 & 34) V_s^{\cdot k} V_k^{\cdot l} W_l^{\cdot m} A_m^{\cdot s}; \quad 35) V_s^{\cdot k} V_k^{\cdot l} W_l^{\cdot m} B_m^{\cdot s}; \quad 36) W_s^{\cdot k} W_k^{\cdot l} V_l^{\cdot m} A_m^{\cdot s}; \\
 & 37) W_s^{\cdot k} W_k^{\cdot l} V_l^{\cdot m} B_m^{\cdot s}; \quad 38) V_s^{\cdot k} W_k^{\cdot l} A_l^{\cdot m} B_m^{\cdot s}; \quad 39) V_s^{\cdot k} W_k^{\cdot l} B_l^{\cdot m} A_m^{\cdot s}.
 \end{aligned}$$

Выделим сначала линейные инварианты из списка (4):

$$1, 2. \quad (5)$$

Отметим, что линейные инварианты (5) могут быть также выражены через  $A_k^{\cdot k}$  и  $B_k^{\cdot k}$ .

Сформируем набор квадратичных инвариантов из элементов списка (4). Очевидно, что таковыми являются (номера соответствуют инвариантам) [24]:

$$\begin{aligned}
 & 1^2, 1 \cdot 2; \\
 & 2^2; \\
 & 3, 4, 5, 6, 7, 8.
 \end{aligned} \quad (6)$$

Набор (6) состоит из 9 квадратичных гемитропных инвариантов, которые были использованы для построения квадратичной энергетической формы [17, 18].

Для построения аппроксимаций более высоких степеней (третьей, четвертой и т.д.) энергетических форм необходимо расширить систему рациональных инвариантов до инвариантов более высоких целых степеней (3, 4, 5, ...).

Выпишем неприводимую систему кубических инвариантов, представляющих собой совместные произведения инвариантов из списка (4) общей степени 3. Полный перечень из 28 кубических гемитропных инвариантов имеет следующий вид [25]:

$$\begin{aligned}
 & 1^3, 1^2 \cdot 2, 1 \cdot 2^2; \\
 & 2^3; \\
 & 1 \cdot 3, 1 \cdot 4, 1 \cdot 5, 1 \cdot 6, 1 \cdot 7, 1 \cdot 8; \\
 & 2 \cdot 3, 2 \cdot 4, 2 \cdot 5, 2 \cdot 6, 2 \cdot 7, 2 \cdot 8; \\
 & 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20.
 \end{aligned} \quad (7)$$

Построим полный набор инвариантов четвертой степени, представляющих собой совместные комбинации инвариантов из списка (4) общей алгебраической степени 4 по следующей схеме. Сначала найдем комбинации линейных инвариантов между собой:

$$\begin{aligned}
 & 1^4, 1^3 \cdot 2, 1^2 \cdot 2, 1 \cdot 2^3; \\
 & 2^4.
 \end{aligned} \quad (8)$$

Затем определим комбинации квадратичных инвариантов между собой:

$$\begin{aligned}
 &3^2, 3 \cdot 4, 3 \cdot 5, 3 \cdot 6, 3 \cdot 7, 3 \cdot 8; \\
 &4^2, 4 \cdot 5, 4 \cdot 6, 4 \cdot 7, 4 \cdot 8; \\
 &5^2, 5 \cdot 6, 5 \cdot 7, 5 \cdot 8; \\
 &6^2, 6 \cdot 7, 6 \cdot 8; \\
 &7^2, 7 \cdot 8; \\
 &8^2.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Комбинации линейных и квадратичных инвариантов вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 &1^2 \cdot 3, 1^2 \cdot 4, 1^2 \cdot 5, 1^2 \cdot 6, 1^2 \cdot 7, 1^2 \cdot 8; \\
 &2^2 \cdot 3, 2^2 \cdot 4, 2^2 \cdot 5, 2^2 \cdot 6, 2^2 \cdot 7, 2^2 \cdot 8; \\
 &1 \cdot 2 \cdot 3, 1 \cdot 2 \cdot 4, 1 \cdot 2 \cdot 5, 1 \cdot 2 \cdot 6, 1 \cdot 2 \cdot 7, 1 \cdot 2 \cdot 8.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Комбинации линейных и кубических инвариантов имеют вид

$$\begin{aligned}
 &1 \cdot 9, 1 \cdot 10, 1 \cdot 11, 1 \cdot 12, 1 \cdot 13, 1 \cdot 14, \\
 &1 \cdot 15, 1 \cdot 16, 1 \cdot 17, 1 \cdot 18, 1 \cdot 19, 1 \cdot 20; \\
 &2 \cdot 9, 2 \cdot 10, 2 \cdot 11, 2 \cdot 12, 2 \cdot 13, 2 \cdot 14, \\
 &2 \cdot 15, 2 \cdot 16, 2 \cdot 17, 2 \cdot 18, 2 \cdot 19, 2 \cdot 20.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Наконец, выделим инварианты четвертой степени:

$$\begin{aligned}
 &21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, \\
 &31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Объединив полученные группы комбинаций (8), (9), (10), (11) и (12), получим искомый полный набор из  $5 + 21 + 18 + 24 + 19 = 87$  инвариантов четвертой степени.

**3. Аппроксимация четвертой степени энергетической формы гетитропного микрополярного упругого тела.** Основываясь на результатах предыдущего раздела, построим систему индивидуальных и совместных целых рациональных алгебраических инвариантов симметричных и антисимметричных частей асимметричных тензоров деформаций и тензора изгиба-кручения. Для этого выполним следующую замену переменных:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= \text{sym } \boldsymbol{\epsilon}, & \mathbf{B} &= \text{sym } \boldsymbol{\kappa}, \\
 \mathbf{V} &= \text{asym } \boldsymbol{\epsilon}, & \mathbf{W} &= \text{asym } \boldsymbol{\kappa}.
 \end{aligned} \tag{13}$$

В смешанных компонентах соотношения (13) принимают вид

$$\begin{aligned}
 A_{s \cdot}^k &= \frac{1}{2} [\epsilon_{s \cdot}^k + \epsilon_{\cdot s}^k], & B_{s \cdot}^k &= \frac{1}{2} [\kappa_{s \cdot}^k + \kappa_{\cdot s}^k], \\
 V_{s \cdot}^k &= \frac{1}{2} [\epsilon_{s \cdot}^k - \epsilon_{\cdot s}^k], & W_{s \cdot}^k &= \frac{1}{2} [\kappa_{s \cdot}^k - \kappa_{\cdot s}^k].
 \end{aligned} \tag{14}$$

Отметим, что смешанные тензорные компоненты в (14) могут быть представлены альтернативным эквивалентным способом (например, через  $A_{\cdot s}^{k\cdot}$  и  $B_{\cdot s}^{k\cdot}$ ).

Используя замену (13) и следуя схеме нумерации из работ [17, 18], систему квадратичных гемитропных инвариантов (6) можно представить в соответствии с [24], а систему гемитропных кубических инвариантов (7) — согласно [25]. Аналогичным образом может быть получена система гемитропных инвариантов четвертой степени. Ввиду значительного объема соответствующих выражений мы не приводим их в данной статье.

А-представление аппроксимации четвертой степени энергетической формы гемитропного микрополярного упругого тела, соответствующее системе инвариантов второй, третьей и четвертой степеней, запишем в компактной форме:

$$\mathcal{U} = \sum_{a=1}^9 {}^2C_a {}^2I_a + \sum_{c=1}^{28} {}^3C_c {}^3\mathfrak{J}_c + \sum_{m=1}^{87} {}^4C_m {}^4\mathfrak{K}_m, \quad (15)$$

где введены следующие обозначения для определяющих модулей:

- ${}^2C_a$  ( $a = 1, \dots, 9$ ) — определяющие модули квадратичного приближения;
- ${}^3C_c$  ( $c = 1, \dots, 28$ ) — определяющие модули, связанные с кубическими поправками;
- ${}^4C_m$  ( $m = 1, \dots, 87$ ) — определяющие модули, связанные с поправками четвертой степени;
- ${}^2I_a$  ( $a = 1, \dots, 9$ ) — квадратичные инварианты;
- ${}^3\mathfrak{J}_c$  ( $c = 1, \dots, 28$ ) — кубические инварианты;
- ${}^4\mathfrak{K}_m$  ( $m = 1, \dots, 87$ ) — инварианты четвертой степени.

Следует особо отметить чувствительность некоторых определяющих модулей к зеркальным отражениям и инверсиям трехмерного пространства, что обусловлено возможностью присвоения нечетного алгебраического веса тензору изгиба-кручения.

Совокупность определяющих модулей ( $9+28+87 = 124$ ):  ${}^2C_a$  ( $a = 1, \dots, 9$ );  ${}^3C_c$  ( $c = 1, \dots, 28$ ) и  ${}^4C_m$  ( $m = 1, \dots, 87$ ), присутствующих в потенциале силовых и моментных напряжений (15), представляет собой неопределенные коэффициенты в линейной комбинации неприводимой системы инвариантов второй, третьей и четвертой алгебраических степеней системы двух асимметричных тензоров второго ранга.

**4. Заключение.** В настоящей работе развит подход, основанный на теории алгебраических инвариантов, для построения аппроксимации четвертой степени энергетической формы нелинейного гемитропного микрополярного упругого тела. Алгебраические инварианты представлены в форме инвариантных следов, соответствующих, в общем случае, неперестановочным степеням внутренних произведений тензоров второго ранга, составляющих исследуемую систему. Основные результаты работы могут быть сформулированы следующим образом.

1. На основе теории целых рациональных алгебраических инвариантов (полуинвариантов) исследовано полное множество неприводимых ин-

вариантов для системы двух асимметричных тензоров второго ранга, представленных в форме инвариантных следов. В результате выделен полный набор из 86 инвариантных следов, состоящий из 8 индивидуальных инвариантов, 17 парных инвариантов, 44 инвариантных троек и 17 инвариантных четверок. Общее количество инвариантов составляет  $8 + 17 + 44 + 17 = 86$ .

2. Из 86 элементов отобрано 39 инвариантов в соответствии с правилом возрастания алгебраических степеней: 2 линейных инварианта, 6 квадратичных инвариантов, 12 кубических инвариантов и 19 инвариантов четвертой степени ( $2 + 6 + 12 + 19 = 39$ ). Предложена схема построения 39 инвариантов четвертой степени, организованных в четыре группы.
3. Установлены целые рациональные комбинации четвертой алгебраической степени, сформированные из 39 элементов по следующей схеме: произведения линейных инвариантов между собой (5 комбинаций); произведения квадратичных инвариантов между собой (21 комбинация); произведения линейных и квадратичных инвариантов (18 комбинаций), попарные произведения линейных и кубических инвариантов (24 комбинации), собственные инварианты четвертой степени (19 комбинаций). Общее количество комбинаций составляет  $5 + 21 + 18 + 24 + 19 = 87$ .
4. Построен потенциал силовых и моментных напряжений гемитропного микрополярного упругого тела, включающий квадратичные, кубические и слагаемые четвертой алгебраической степени. В результате микрополярный потенциал характеризуется 124 определяющими модулями ( $9 + 28 + 87 = 124$ ).
5. Получены явные формулы для вычисления всех 39 инвариантов в смешанных тензорных компонентах в произвольной криволинейной системе координат.

**Конкурирующие интересы.** У нас нет конфликта интересов в отношении авторства и публикации этой статьи.

**Авторский вклад и ответственность.** Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

**Финансирование.** Работа выполнена по теме государственного задания (государственный регистрационный номер 124012500437-9).

## Библиографический список

1. Spencer A. J. M., Rivlin R. S. Isotropic integrity bases for vectors and second-order tensors. Part I // *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1962. vol. 9. pp. 45–63. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00253332>.
2. Spencer A. J. M. Isotropic integrity bases for vectors and second-order tensors. Part II // *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1965. vol. 18. pp. 51–82. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00253982>.
3. Smith G. F. On isotropic integrity bases // *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1965. vol. 18. pp. 282–292. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00251667>.
4. Gurevich G. B. *Foundations of the Theory of Algebraic Invariants*. Groningen, The Netherlands: P. Noordhoff, 1964. viii+429 pp.

5. Spencer A. J. M. Theory of invariants / *Continuum Physics*. vol. 1. New York: Academic Press, 1971. pp. 240–353. DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-240801-4.50008-X>.
6. Сушкевич А. К. *Основы высшей алгебры*. М.: ОНТИ, 1937. 476 с.
7. Жилин П. А. *Рациональная механика сплошных сред*. СПб.: Политехн. ун-т, 2012. 584 с.
8. Cosserat E., Cosserat F. *Théorie des corps déformables*. Paris: Herman et Fils, 1909. vi+226 pp.
9. Kessel S. Lineare Elastizitätstheorie des anisotropen Cosserat-Kontinuums // *Abh. Braunsch. Wiss. Ges.*, 1964. vol. 16. pp. 1–22. DOI: <https://doi.org/10.24355/dbbs.084-201301181342-0>.
10. Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua / *Applied Mechanics*; eds. H. Görtler. Berlin, Heidelberg: Springer, 1966. pp. 153–158. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-662-29364-5\\_16](https://doi.org/10.1007/978-3-662-29364-5_16).
11. Nowacki W. *Theory of Micropolar Elasticity*: Course held at the Department for Mechanics of Deformable Bodies, July 1970, Udine / International Centre for Mechanical Sciences. Courses and Lectures. vol. 25. Wien, New York: Springer, 1972. 286 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-7091-2720-9>.
12. Günther W. Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums // *Abh. Braunsch. Wiss. Ges.*, 1958. vol. 10. pp. 195–213.
13. Neuber H. On the effect of stress concentration in Cosserat continua / *Mechanics of Generalized Continua*; eds. E. Kröner. Berlin, Heidelberg: Springer, 1968. pp. 109–113. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-662-30257-6\\_13](https://doi.org/10.1007/978-3-662-30257-6_13).
14. Dyszlewicz J. *Micropolar Theory of Elasticity* / Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. vol. 15. Berlin: Springer, 2004. xv+356 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-45286-7>.
15. Besdo D. Ein Beitrag zur nichtlinearen Theorie des Cosserat-Kontinuums // *Acta Mech.*, 1974. vol. 20, no. 1. pp. 105–131. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01374965>.
16. Nowacki W. *Theory of Asymmetric Elasticity*. Oxford: Pergamon Press, 1986. viii+383 pp.
17. Радаев Ю. Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2018. Т. 22, № 3. С. 504–517. EDN: YOYJQD. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1635>.
18. Радаев Ю. Н., Мурашкин Е. В. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // *Проблемы прочности и пластичности*, 2020. Т. 82, № 4. С. 399–412. EDN: TODIFV. DOI: <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412>.
19. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Приведение естественных форм гемитропных энергетических потенциалов к конвенциональным // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2022. № 4. С. 108–115. EDN: DTZTJY. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.54.4.009>.
20. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. О двух основных естественных формах потенциала асимметричных тензоров силовых и моментных напряжений в механике гемитропных тел // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2022. № 3. С. 86–100. EDN: YOEHQV. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.53.3.010>.
21. Мурашкин Е. В. О связи микрополярных определяющих параметров термодинамических потенциалов состояния // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2022. № 1. С. 110–121. EDN: JXXIAX. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2023.55.1.012>.
22. Murashkin E. V., Radayev Y. N. A negative weight pseudotensor formulation of coupled hemitropic thermoelasticity // *Lobachevskii J. Math.*, 2023. vol. 44, no. 6. pp. 2440–2449. EDN: PINYDI. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080223060392>.
23. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Theory of Poisson's ratio for a thermoelastic micropolar acentric isotropic solid // *Lobachevskii J. Math.*, 2024. vol. 45, no. 5. pp. 2378–2390. EDN: ASGCQB. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080224602480>.

24. Murashkin E. V., Radayev Y. N. Cubic approximation of stress potential for a hemitropic micropolar elastic solid // *Lobachevskii J. Math.*, 2025. vol. 46, no. 5. pp. 2391–2400. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080225606514>.
25. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. О квадратичных поправках определяющих уравнений для гемитропного микрополярного упругого тела // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2025. Т. 29, № 2. С. 274–293. EDN: DZUMDJ. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu2144>.
26. Розенфельд Б. А. *Многомерные пространства*. М.: Наука, 1966. 648 с.

MSC: 15A72, 74A35, 74B20

## Quartic corrections in energy potentials of hemitropic micropolar solids

*E. V. Murashkin, Yu. N. Radayev*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences,  
101–1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.

### Abstract

The present study is devoted to employing the theory of algebraic invariants for deriving an approximation of the potential of force and couple stresses of the fourth degree for a nonlinear hemitropic micropolar elastic solid. The complete set of irreducible invariants for a system of two asymmetric second-rank tensors in the form of invariant traces is studied using the theory of integer rational algebraic invariants (semi-invariants).

As a result, a set of 86 invariant traces is obtained. This set comprises 8 individual invariants, 17 doublets, 44 triplets, and 17 quadruplets. From these 86 elements, 39 invariants were selected according to the rule of increasing algebraic degrees: 2 linear invariants, 6 quadratic, 12 cubic, and 19 quartic. The 39 fourth-degree invariants are divided into four groups based on the following rules: products of linear invariants with each other, products of quadratic invariants with each other, products of linear and quadratic invariants, pairwise products of linear and cubic invariants, and proper fourth-degree invariants.

The potential of force and couple stresses of a hemitropic micropolar elastic solid is constructed, containing quadratic, cubic, and quartic algebraic terms. Thus, the micropolar potential contains a total of 124 constitutive modules. Formulas for calculating all 39 invariants in mixed tensor components are provided. As a result, 87 quartic corrections to the cubic potential of force and couple stresses of a nonlinear hemitropic micropolar elastic solid are obtained.

---

### Mechanics of Solids

#### Research Article

© The Author(s), 2025

© Samara State Technical University, 2025 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

#### Please cite this article in press as:

Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Quartic corrections in energy potentials of hemitropic micropolar solids, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2025, vol. 29, no. 3, pp. 472–485. EDN: **CMAPHC**. DOI: [10.14498/vsgtu2163](https://doi.org/10.14498/vsgtu2163) (In Russian).

#### Authors' Details:

*Evgenii V. Murashkin*  <https://orcid.org/0000-0002-3267-4742>Cand. Phys. & Math. Sci., PhD, MD; Senior Researcher; Lab. of Modeling in Solid Mechanics;  
e-mail: [murashkin@ipmnet.ru](mailto:murashkin@ipmnet.ru), [evmurashkin@gmail.com](mailto:evmurashkin@gmail.com)*Yuri N. Radayev*  <https://orcid.org/0000-0002-0866-2151>D.Sc. (Phys. & Math. Sci.), Ph.D., M.Sc., Professor; Leading Researcher; Lab. of Modeling in Solid Mechanics; e-mail: [radayev@ipmnet.ru](mailto:radayev@ipmnet.ru), [y.radayev@gmail.com](mailto:y.radayev@gmail.com)

**Keywords:** nanoscale, microscale, energy form, integer rational algebraic invariant, irreducible system of invariants, cubic approximation, hemitropic micropolar elastic solid.

Received: 25<sup>th</sup> February, 2025 / Revised: 12<sup>th</sup> June, 2025 /

Accepted: 18<sup>th</sup> June, 2025 / First online: 10<sup>th</sup> July, 2025

**Competing interests.** We have no conflict of interest regarding the authorship and publication of this article.

**Authors' contributions and responsibilities.** All authors participated in the development of the article's concept and in writing the manuscript. The authors bear full responsibility for submitting the final manuscript for publication. The final version of the manuscript was approved by all authors.

**Funding.** The work was carried out on the topic of the state assignment (state registration no. 124012500437-9).

## References

1. Spencer A. J. M., Rivlin R. S. Isotropic integrity bases for vectors and second-order tensors. Part I, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1962, vol. 9, pp. 45–63. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00253332>.
2. Spencer A. J. M. Isotropic integrity bases for vectors and second-order tensors. Part II, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1965, vol. 18, pp. 51–82. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00253982>.
3. Smith G. F. On isotropic integrity bases, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1965, vol. 18, pp. 282–292. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00251667>.
4. Gurevich G. B. *Foundations of the Theory of Algebraic Invariants*. Groningen, The Netherlands, P. Noordhoff, 1964, viii+429 pp.
5. Spencer A. J. M. Theory of invariants, In: *Continuum Physics*, vol. 1. New York, Academic Press, 1971, pp. 240–353. DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-240801-4.50008-X>.
6. Sushkevich A. K. *Osnovy vysshei algebrы* [Fundamentals of Higher Algebra]. Moscow, ONTI, 1937, 476 pp. (In Russian)
7. Zhilin P. A. *Ratsional'naya mekhanika sploshnykh sred* [Rational Continuum Mechanics Media]. St. Petersburg, Polytechn. Univ., 2012, 584 pp. (In Russian)
8. Cosserat E., Cosserat F. *Théorie des corps déformables*. Paris, Herman et Fils, 1909, vi+226 pp.
9. Kessel S. Lineare Elastizitätstheorie des anisotropen Cosserat-Kontinuums, *Abh. Braunsch. Wiss. Ges.*, 1964, vol. 16, pp. 1–22. DOI: <https://doi.org/10.24355/dbbs.084-201301181342-0>.
10. Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua, In: *Applied Mechanics*; eds. H. Görtler. Berlin, Heidelberg, Springer, 1966, pp. 153–158. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-662-29364-5\\_16](https://doi.org/10.1007/978-3-662-29364-5_16).
11. Nowacki W. *Theory of Micropolar Elasticity*, Course held at the Department for Mechanics of Deformable Bodies, July 1970, Udine, International Centre for Mechanical Sciences. Courses and Lectures, vol. 25. Wien, New York, Springer, 1972, 286 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-7091-2720-9>.
12. Günther W. Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums, *Abh. Braunsch. Wiss. Ges.*, 1958, vol. 10, pp. 195–213.
13. Neuber H. On the effect of stress concentration in Cosserat continua, In: *Mechanics of Generalized Continua*; eds. E. Kröner. Berlin, Heidelberg, Springer, 1968, pp. 109–113. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-662-30257-6\\_13](https://doi.org/10.1007/978-3-662-30257-6_13).
14. Dyszlewicz J. *Micropolar Theory of Elasticity*, Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics, vol. 15. Berlin, Springer, 2004, xv+356 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-45286-7>.

15. Besdo D. Ein Beitrag zur nichtlinearen Theorie des Cosserat-Kontinuums, *Acta Mech.*, 1974, vol. 20, no. 1, pp. 105–131. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01374965>.
16. Nowacki W. *Theory of Asymmetric Elasticity*. Oxford, Pergamon Press, 1986, viii+383 pp.
17. Radaev Yu. N. The Lagrange multipliers method in covariant formulations of micropolar continuum mechanics theories, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 3, pp. 504–517 (In Russian). EDN: YOYJQD. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1635>.
18. Radaev Yu. N., Murashkin E. V. Pseudotensor formulation of the mechanics of hemitropic micropolar media, *Problems of Strength and Plasticity*, 2020, vol. 82, no. 4, pp. 399–412 (In Russian). EDN: TODIFV. DOI: <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412>.
19. Murashkin E. V., Radaev Yu. N. Reducing natural forms of hemitropic energy potentials to conventional ones, *Vestn. I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical Univ. Ser. Mechanics of a Limit State*, 2022, no. 4, pp. 108–115 (In Russian). EDN: DTZTJY. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.54.4.009>.
20. Murashkin E. V., Radaev Yu. N. On two base natural forms of asymmetric force and couple stress tensors of potential in mechanics of hemitropic solids, *Vestn. I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical Univ. Ser. Mechanics of a Limit State*, 2022, no. 3, pp. 86–100 (In Russian). EDN: YOEHQV. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.53.3.010>.
21. Murashkin E. V. On the relationship of micropolar constitutive parameters of thermodynamic state potentials, *Vestn. I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical Univ. Ser. Mechanics of a Limit State*, 2022, no. 1, pp. 110–121 (In Russian). EDN: JXXIAX. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2023.55.1.012>.
22. Murashkin E. V., Radaev Y. N. A negative weight pseudotensor formulation of coupled hemitropic thermoelasticity, *Lobachevskii J. Math.*, 2023, vol. 44, no. 6, pp. 2440–2449. EDN: PINYDI. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080223060392>.
23. Murashkin E. V., Radaev Yu. N. Theory of Poisson's ratio for a thermoelastic micropolar acentric isotropic solid, *Lobachevskii J. Math.*, 2024, vol. 45, no. 5, pp. 2378–2390. EDN: ASGCQB. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080224602480>.
24. Murashkin E. V., Radaev Y. N. Cubic approximation of stress potential for a hemitropic micropolar elastic solid, *Lobachevskii J. Math.*, 2025, vol. 46, no. 5, pp. 2391–2400. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080225606514>.
25. Murashkin E. V., Radaev Yu. N. On quadratic corrections of constitutive equations for a hemitropic micropolar elastic solid, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2025, vol. 29, no. 2, pp. 274–293 (In Russian). EDN: DZUMDJ. DOI: <https://doi.org/https://doi.org/10.14498/vsgtu2144>.
26. Rozenfel'd B. A. *Mnogomernye prostranstva* [Multidimensional Spaces]. Moscow, Nauka, 1966, 648 pp. (In Russian)