

Краткие сообщения

УДК 533.6.011

Второе интегральное обобщение инварианта Крокко для 3D-течений за отошедшим головным скачком



© Г. Б. Сизых

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Россия, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, 4.

Аннотация

Исследуются стационарные течения идеального газа за отошедшим головным скачком в общем 3D-случае. Известный интегральный инвариант (В.Н. Голубкин, Г.Б. Сизых, 2019), обобщающий осесимметричный инвариант (Л. Крокко, 1937) на несимметричные течения, есть криволинейный интеграл по замкнутой вихревой линии (такие линии лежат на изоэнтропийных поверхностях) от давления, деленного на завихренность. Этот интеграл принимает одно и то же значение на всех (замкнутых) вихревых линиях, лежащих на одной изоэнтропийной поверхности. Он был получен после обнаружения факта замкнутости вихревых линий в течении за скачком в общем 3D-случае. Недавно было найдено еще одно семейство замкнутых линий за скачком, лежащих на изоэнтропийных поверхностях (Г.Б. Сизых, 2020). Это векторные линии \mathbf{a} — векторного произведения скорости газа и градиента энтропийной функции. В общем 3D-случае эти линии и вихревые линии не совпадают.

В представленном исследовании предпринимается попытка найти интегральный инвариант, связанный с замкнутыми векторными линиями \mathbf{a} . Без использования асимптотических, численных и других приближенных методов проводится анализ уравнений Эйлера для классической модели течения идеального совершенного газа с постоянными теплоемкостями. Используется представление о воображаемых частицах, «переносящих» линии тока реального течения газа, основанное на критерии Гельмгольца–Зоравского. Получен новый интегральный инвариант изоэнтропийных поверхностей. Показано, что криволинейный интеграл по замкнутой векторной линии \mathbf{a} , в котором подынтегральная функция есть давление, деленное на проекцию завихренности на направление \mathbf{a} , принимает одинаковые значения для всех линий \mathbf{a} , лежащих на одной изоэнтропийной поверхности. Этот инвариант, как и другой ранее известный интегральный инвариант (В.Н. Голубкин, Г.Б. Сизых, 2019)

Краткое сообщение

  Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Сизых Г. Б. Второе интегральное обобщение инварианта Крокко для 3D-течений за отошедшим головным скачком // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 3. С. 588–595. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1861>.

Сведения об авторе

Григорий Борисович Сизых   <https://orcid.org/0000-0001-5821-8596>

кандидат физико-математических наук, доцент; доцент; каф. прикладной математики; e-mail: o1o2o3@yandex.ru

в частном случае незакрученных осесимметричных течений совпадает с неинтегральным инвариантом Л. Крокко и обобщает его на общий пространственный случай.

Ключевые слова: критерий Гельмгольца–Зоравского, изоэнергетические течения, завихренность, отошедший скачок уплотнения, инвариант Крокко, интегральный инвариант изоэнтропийных поверхностей.

Получение: 20 апреля 2021 г. / Исправление: 12 августа 2021 г. /

Принятие: 31 августа 2021 г. / Публикация онлайн: 30 сентября 2021 г.

Введение. Полная энергия (полная энтальпия) газа не меняется при переходе через скачок уплотнения. Поэтому если набегающий сверхзвуковой поток однороден, то течение за скачком остается изоэнергетическим. Отошедший головной скачок имеет искривленную форму, и течение за ним становится вихревым (кроме лидирующей линии тока, на которой завихренность равна нулю [1]). В осесимметричном (без закрутки) случае для изоэнергетических течений Л. Крокко показал [2], что вдоль линий тока сохраняется отношение завихренности к давлению, умноженному на расстояние до оси симметрии ($I_K = \Omega/pr$). Для закрученных осесимметричных течений инвариант Л. Крокко обобщен в [3]. Оказалось, что окружная составляющая завихренности Ω_φ представима в виде $\Omega_\varphi = r^{-1}\rho C_1 + rpC_2$, где C_1 и C_2 – функции линий тока (ρ – плотность), причем в отсутствие закрутки $C_1 \equiv 0$.

В общем пространственном случае неинтегральный инвариант Л. Крокко был обобщен в [4] интегральным инвариантом. В [4] показано, что величина криволинейного интеграла по замкнутой вихревой линии

$$I_1 = \int_\gamma (p/\Omega) dl$$

одинакова для всех вихревых линий γ , лежащих на одной изоэнтропийной поверхности. Это был первый инвариант, пригодный для верификации расчетов течений за скачком в общем пространственном случае.

Появлению инварианта I_1 предшествовало обнаружение факта замкнутости вихревых линий за отошедшим скачком [1]. Если рассматривать векторные поля, связанные с течением (то есть такие, которые выражаются через скорость, плотность и давление газа и через производные этих параметров), то следует отметить, что недавно в [5] найдено еще одно (кроме завихренности) векторное поле с замкнутыми векторными линиями. Речь идет о векторе $\mathbf{a} = \mathbf{V} \times \nabla\sigma$, где $\sigma = p\rho^{-k}$ (\mathbf{V} , ρ и p – скорость, плотность и давление газа, k – показатель адиабаты).

Данная работа посвящена поиску интегрального инварианта, связанного с замкнутыми линиями вектора \mathbf{a} .

1. Уравнения движения. Рассмотрим течение идеального (вязкость и теплопроводность отсутствуют) газа, в частицах которого выполняется соотношение $p = R\rho T$, где T – температура, R – отношение универсальной газовой постоянной к молярной массе, за отошедшим головным скачком, возникшим при обтекании тела равномерным сверхзвуковым потоком. Энтропийная функция $\sigma = p\rho^{-k}$ постоянна вдоль линий тока: $(\mathbf{V} \cdot \nabla)\sigma = 0$, но может иметь разные значения на различных линиях тока за скачком. Течение

за скачком вследствие однородности набегающего потока является изоэнергетическим, и уравнение Эйлера, записанное в форме Крокко [6], имеет вид

$$\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} = (k - 1)^{-1} RT \nabla \ln \sigma, \quad \boldsymbol{\Omega} = \text{rot } \mathbf{V}. \quad (1)$$

Замыкает систему уравнение неразрывности

$$\text{div}(\rho \mathbf{V}) = 0. \quad (2)$$

2. Воображаемые частицы. Критерий Гельмгольца–Зоравского [7, 8] применительно к стационарному и соленоидальному (см. формулу (2)) полю вектора $\rho \mathbf{V}$ можно сформулировать следующим образом.

Если в области G существует такое векторное поле \mathbf{q} (имеющее размерность скорости), что во всей области выполнено равенство

$$\rho \mathbf{V} \times \text{rot}(\mathbf{q} \times (\rho \mathbf{V})) = 0, \quad (3)$$

то воображаемые частицы, составляющие в некоторый момент времени сегмент векторной линии $\rho \mathbf{V}$, лежащий в области G , двигаясь со скоростью \mathbf{q} , будут составлять сегмент одной из векторных линий $\rho \mathbf{V}$ в каждый последующий момент времени (до тех пор, пока эти частицы находятся в области G).

Такие воображаемые частицы, следуя [8], будем называть q -частицами. Очевидно, что векторные линии $\rho \mathbf{V}$ совпадают с линиями тока. Поэтому если скорость \mathbf{q} существует, можно считать, что сегменты линий тока переносятся q -частицами. Докажем существование в течении за скачком поля \mathbf{q} и найдем его выражение через параметры течения и их производные.

В течении газа за скачком будем искать \mathbf{q} в виде $\mathbf{q} = \lambda \mathbf{a}$, где λ — некоторое скалярное поле. Тогда выражение $\mathbf{q} \times (\rho \mathbf{V})$, стоящее под знаком ротора в (3), примет вид $\lambda \mathbf{a} \times (\rho \mathbf{V}) = \lambda \rho (\mathbf{V} \times \nabla \sigma) \times \mathbf{V}$. Раскроем двойное векторное произведение и учтем ортогональность скорости \mathbf{V} и градиента $\nabla \sigma$, вытекающую из (1). Получим $\mathbf{q} \times (\rho \mathbf{V}) = \lambda \rho \mathbf{V}^2 \nabla \sigma$.

Следовательно, если положить $\lambda = \lambda_0 \rho^{-1} \mathbf{V}^{-2}$, где λ_0 — произвольная ненулевая константа, обеспечивающая для вектора $\mathbf{q} = \lambda \mathbf{a} = \lambda_0 \rho^{-1} \mathbf{V}^{-2} \mathbf{a}$ размерность скорости, то уравнение (3) окажется выполненным (поскольку в этом случае под знаком ротора окажется градиент $\nabla \sigma$, умноженный на константу λ_0). Таким образом, существование скорости \mathbf{q} доказано, и можно считать, что линии тока переносятся q -частицами, движущимися со скоростью

$$\mathbf{q} = \lambda_0 \rho^{-1} \mathbf{V}^{-2} \mathbf{a} = \lambda_0 \rho^{-1} \mathbf{V}^{-2} (\mathbf{V} \times \nabla \sigma). \quad (4)$$

3. О ненулевом значении \mathbf{q} . В следующем разделе будет интегрироваться величина, обратная к $|\mathbf{q}|$. Поэтому докажем, что всюду, за исключением лидирующей линии тока (линии торможения), величина \mathbf{q} отлична от нуля. Будем исходить из общепринятого [4, 5, 9–11] допущения о том, что по крайней мере в некоторой окрестности вышуклой носовой части скорость \mathbf{V} обращается в нуль только в передней точке торможения. Поэтому исходя из (4) и из ортогональности \mathbf{V} и $\nabla \sigma$ приходим к выводу, что величина \mathbf{q} может обращаться в нуль только вместе с $\nabla \sigma$.

Докажем, что всюду, за исключением лидирующей линии тока, величина $\nabla\sigma$, а вместе с ней и величина \mathbf{q} , отличны от нуля. Поскольку $(\mathbf{V}\cdot\nabla)\sigma = 0$, градиент этого скалярного произведения также будет равен нулю, то есть $\nabla(\mathbf{V}\cdot\nabla\sigma) = 0$. Используя известное векторное тождество для градиента скалярного произведения и учитывая, что ротор градиента равен нулю, получим

$$(\mathbf{V}\cdot\nabla)(\nabla\sigma) + ((\nabla\sigma)\cdot\nabla)\mathbf{V} + (\nabla\sigma) \times \text{rot } \mathbf{V} = 0. \quad (5)$$

Это выражение замечательно тем, что компоненты $\nabla\sigma$ дифференцируются только в первом слагаемом $(\mathbf{V}\cdot\nabla)(\nabla\sigma)$, а в другие слагаемые (5) компоненты $\nabla\sigma$ входят линейно как коэффициенты при различных производных компонент скорости. Поэтому можно применить известный [1, 10, 11] способ — представить (5) в виде

$$\frac{d}{dl}(\nabla\sigma) = \frac{1}{|\mathbf{V}|}A(\nabla\sigma),$$

где l — переменная длина дуги вдоль линии тока, A — матрица размером 3×3 с коэффициентами, непрерывно зависящими от производных компонент скорости \mathbf{V} . При заданном поле скорости эту систему уравнений можно считать автономной относительно компонент $\nabla\sigma$. Поэтому, согласно известным свойствам автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений [12], получаем следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *В течении за отошедшим головным скачком на любой линии тока на всем ее участке, на котором $|\mathbf{V}| > 0$, либо $|\nabla\sigma| \equiv 0$, либо $|\nabla\sigma| > 0$.*

Сразу за скачком искривленной формы завихренность равна нулю только в начале лидирующей линии [13, 14]. При этом завихренность на скачке с дозвуковой стороны лежит в касательной к скачку плоскости [1], а скорость на скачке с дозвуковой стороны имеет ненулевую нормальную к скачку составляющую. Поэтому всюду, кроме начала лидирующей линии (где $\Omega = 0$), на дозвуковой стороне скачка вектор $\Omega \times \mathbf{V}$ отличен от нуля. С учетом (1) это значит, что в начале всех линий тока на скачке, кроме начала лидирующей линии, $|\nabla\sigma| > 0$. Согласно утверждению 1, это значит, что во всем течении за скачком, кроме лидирующей линии тока, градиент энтропийной функции отличен от нуля ($|\nabla\sigma| > 0$).

Как замечено в начале данного раздела, величина \mathbf{q} может обращаться в нуль только вместе с $\nabla\sigma$. Поэтому во всем течении за скачком, кроме лидирующей линии тока, скорость \mathbf{q} , определяемая формулой (4), отлична от нуля.

4. Интегральный инвариант. В [5] показано, что по крайней мере вблизи передней точки торможения линии вектора $\mathbf{a} = \mathbf{V} \times \nabla\sigma$ замкнуты и один раз охватывают лидирующую линию тока (линию тока, которая пересекает отошедший скачок по нормали и которая, как доказано в [9], совпадает с линией торможения). Поскольку траектории q -частиц лежат на замкнутых линиях \mathbf{a} , эти траектории (как и линии \mathbf{a}) не только лежат на изоэнтропийных поверхностях, но и один раз опоясывают их.

Применим теперь идею доказательства, предложенную в [4], для замкнутых траекторий q -частиц, лежащих на изоэнтропийных поверхностях. Если γ — замкнутая линия вектора \mathbf{a} , l — переменная длина дуги на γ , то q -частица

проходит по кривой γ расстояние dl за время $dl/|\mathbf{q}|$. Поэтому время, за которое q -частица сделает полный оборот по замкнутой линии γ , равно криволинейному интегралу $\int_{\gamma} |\mathbf{q}|^{-1} dl$. Если q -частицы составляли в начальный момент времени одну из линий тока, то, сделав один оборот, они должны составлять ту же самую линию тока. Поэтому время полного оборота у всех q -частиц, лежащих на одной изоэнтропийной поверхности, одинаково, и величина $I = \int_{\gamma} |\mathbf{q}|^{-1} dl$ есть новый (второй) интегральный инвариант изоэнтропийных поверхностей. Используя (4) и (1), получим

$$\mathbf{q} = \lambda_0 \rho^{-1} \mathbf{V}^{-2} \mathbf{V} \times \nabla \sigma = \lambda_0 (k-1) \sigma \frac{1}{p} (\boldsymbol{\Omega} - \mathbf{V}(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{V})/\mathbf{V}^2). \quad (6)$$

Легко проверить, что вектор $\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{a}} = \boldsymbol{\Omega} - \mathbf{V}(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{V})/\mathbf{V}^2$, входящий в выражение (6), есть проекция завихренности на вектор \mathbf{a} , то есть, что $\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{a}} = \mathbf{a}(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{a})/\mathbf{a}^2$. Любая замкнутая линия γ , по которой производится интегрирование в новом инварианте, лежит на изоэнтропийной поверхности. Следовательно, множитель $\lambda_0(k-1)\sigma$ в (6) остается постоянным вдоль γ и одинаков для всех γ , лежащих на одной изоэнтропийной поверхности. Поэтому выражение для нового инварианта можно упростить:

$$I_2 = \int_{\gamma} \frac{p}{|\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{a}}|} dl. \quad (7)$$

В незакрученном осесимметричном течении любая линия γ совпадает с вихревой линией, то есть $\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{a}} = \boldsymbol{\Omega}$, а отношение $p/|\boldsymbol{\Omega}|$ не меняется вдоль γ , и интеграл (7) равен $2\pi r p / |\boldsymbol{\Omega}|$. Таким образом, в осесимметричном случае инвариант (7) совпадает с неинтегральным инвариантом Крокко $I_K = \Omega/(pr)$, а в общем пространственном случае обобщает его.

Заключение. Течение за отошедшим головным скачком исследовано с использованием полных (без каких-либо упрощений) уравнений Эйлера. Ранее было известно, что векторные линии $\mathbf{a} = \mathbf{V} \times \nabla \sigma$ замкнуты, лежат на изоэнтропийных поверхностях и один раз опоясывают их. (Такие линии обозначены символом γ .) В данной работе обнаружено, что криволинейный интеграл (7) сохраняет свое значение для всех линий γ , лежащих на одной изоэнтропийной поверхности. Это второй из известных интегральных инвариантов, пригодных для проверки численных расчетов несимметричных течений за скачком.

Конкурирующие интересы. В публикации статьи отсутствуют конкурирующие финансовые или нефинансовые интересы.

Авторский вклад и ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Благодарность. Автор благодарен рецензенту за тщательное прочтение статьи и ценные предложения и комментарии.

Библиографический список

1. Golubkin V. N., Sizykh G. B. On the vorticity behind 3-D detached bow shock wave // *Adv. Aerodyn.*, 2019. vol. 1, 15. <https://doi.org/10.1186/s42774-019-0016-5>.
2. Crocco L. Eine neue Stromfunktion für die Erforschung der Bewegung der Gase mit Rotation [A new stream function for researching the movement of gases with rotation] // *ZAMM*, 1937. vol. 17, no. 1. pp. 1–7 (In German). <https://doi.org/10.1002/ZAMM.19370170103>.
3. Голубкин В. Н., Мануйлович И. С., Марков В. В. Пятый инвариант линий тока для осесимметричных закрученных течений газа // *Труды МФТИ*, 2018. Т. 10, № 2. С. 131–135.
4. Голубкин В. Н., Сизых Г. Б. Обобщение инварианта Крокко для 3D течений газа за отошедшим головным скачком // *Изв. вузов. Матем.*, 2019. № 12. С. 52–56. <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-12-52-56>.
5. Сизых Г. Б. Система ортогональных криволинейных координат на изоэнтропийной поверхности за отошедшим скачком уплотнения // *ПММ*, 2020. Т. 84, № 3. С. 304–310. <https://doi.org/10.31857/S0032823520020071>.
6. von Mises R. *Mathematical Theory of Compressible Fluid Flow* / Applied Mathematics and Mechanics. vol. 3. New York: Academic Press, 1958. vii+514 pp. <https://doi.org/10.1016/b978-0-123-95621-7.x5001-x>.
7. Prim R., Truesdell C. A derivation of Zorawski's criterion for permanent vector-lines // *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1950. vol. 1, no. 1. pp. 32–34. <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1950-0035136-9>.
8. Truesdell C. *The Kinematics of Vorticity*. Bloomington: IU Press, 1954. xx+232 pp.
9. Сизых Г. Б. Значение энтропии на поверхности несимметричной выпуклой головной части при сверхзвуковом обтекании // *ПММ*, 2019. Т. 83, № 3. С. 377–383. <https://doi.org/10.1134/S0032823519030135>.
10. Миронюк И. Ю., Усов Л. А. Инвариант линии торможения при стационарном обтекании тела завихренным потоком идеальной несжимаемой жидкости // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 4. С. 780–789. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1815>.
11. Миронюк И. Ю., Усов Л. А. Точки торможения на вихревых линиях в течениях идеального газа // *Труды МФТИ*, 2020. Т. 12, № 4. С. 171–176.
12. Понтрягин Л. С. *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001. 400 с.
13. Truesdell C. On curved shocks in steady plane flow of an ideal fluid // *J. Aeronaut. Sci.*, 1952. vol. 19, no. 12. pp. 826–828. <https://doi.org/10.2514/8.2495>.
14. Hayes W. D. The vorticity jump across a gasdynamic discontinuity // *J. Fluid Mech.*, 1957. no. 2. pp. 595–600. <https://doi.org/10.1017/s0022112057000403>.

MSC: 76J20, 76L99, 76N15

Second integral generalization of the Crocco invariant for 3D flows behind detached bow shock wave

© G. B. Sizykh

Moscow Aviation Institute (National Research University),
4, Volokolamskoe shosse, Moscow, 125993, Russian Federation.

Abstract

Stationary flows of an ideal gas behind the detached bow shock are investigated in the general 3D case. The well-known integral invariant (V.N. Golubkin, G.B. Sizykh, 2019), generalizing the axisymmetric invariant of (L. Crocco, 1937) to asymmetric flows, is a curvilinear integral over a closed vortex line (such lines lie on isentropic surfaces), in which the integrand is the pressure divided by the vorticity. This integral takes on the same value on all (closed) vortex lines lying on one isentropic surface. It was obtained after the discovery of the fact that the vortex lines are closed in the flow behind the shock in the general 3D case. Recently, another family of closed lines behind the shock was found, lying on isentropic surfaces (G.B. Sizykh, 2020). It is given by vector lines \mathbf{a} — the vector product of the gas velocity and the gradient of the entropy function. In the general 3D case, these lines and vortex lines do not coincide.

In the presented study, an attempt is made to find the integral invariant associated with closed vector lines \mathbf{a} . Without using asymptotic, numerical and other approximate methods, the Euler equations are analyzed for the classical model of the flow of an ideal perfect gas with constant heat capacities. The concept of imaginary particles “carrying” the streamlines of a real gas flow, based on the Helmholtz–Zoravsky criterion, is used. A new integral invariant of isentropic surfaces is obtained. It is shown that the curvilinear integral over a closed vector line \mathbf{a} , in which the integrand is the pressure divided by the projection of the vorticity on the direction \mathbf{a} , has the same values for all lines \mathbf{a} lying on one isentropic surface. This invariant, like another previously known integral invariant (V.N. Golubkin, G.B. Sizykh, 2019), in the particular case of non-swirling axisymmetric flows, coincides with the non-integral invariant of L. Crocco and generalizes it to the general spatial case.

Keywords: Helmholtz–Zoravski criterion, isoenergetic flows, vorticity, detached bow shock, Crocco invariant, integral invariant of isentropic surfaces.

Short Communication

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Sizykh G. B. Second integral generalization of the Crocco invariant for 3D flows behind detached bow shock wave, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 3, pp. 588–595. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1861> (In Russian).

Author’s Details:

Grigory B. Sizykh  <https://orcid.org/0000-0001-5821-8596>

Cand. Phys. & Math. Sci; Associate Professor; Dept. of Applied Mathematics;

e-mail: o1o2o3@yandex.ru

Received: 20th April, 2021 / Revised: 12th August, 2021 /
 Accepted: 31st August, 2021 / First online: 30th September, 2021

Competing interests. There are no financial or non-financial competing interests in the publication of the paper.

Authors' contributions and responsibilities. I take full responsibility for submitting the final manuscript for print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. Not applicable.

Acknowledgments. The author is grateful to the referee for careful reading of the paper and valuable suggestions and comments.

References

1. Golubkin V. N., Sizykh G. B. On the vorticity behind 3-D detached bow shock wave, *Adv. Aerodyn.*, 2019, vol. 1, 15. <https://doi.org/10.1186/s42774-019-0016-5>.
2. Crocco L. Eine neue Stromfunktion für die Erforschung der Bewegung der Gase mit Rotation [A new stream function for researching the movement of gases with rotation], *ZAMM*, 1937, vol. 17, no. 1, pp. 1–7 (In German). <https://doi.org/10.1002/ZAMM.19370170103>.
3. Golubkin V. N., Manuylovich I. S., Markov V. V. Fifth streamline invariant to axisymmetric swirling gas flows, *Proceedings of MIPT*, 2018, vol. 10, no. 2, pp. 131–135 (In Russian).
4. Golubkin V. N., Sizykh G. B. Generalization of the Crocco invariant for 3D gas flows behind detached bow shock wave, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2019, vol. 63, no. 12, pp. 45–48. <https://doi.org/10.3103/S1066369X19120053>.
5. Sizykh G. B. System of Orthogonal Curvilinear Coordinates on the Isentropic Surface Behind a Detached Bow Shock Wave, *Fluid Dyn.*, 2020, vol. 55, no. 7, pp. 899–903. <https://doi.org/10.1134/S0015462820070095>.
6. von Mises R. *Mathematical Theory of Compressible Fluid Flow*, Applied Mathematics and Mechanics, vol. 3. New York, Academic Press, 1958, vii+514 pp. <https://doi.org/10.1016/b978-0-123-95621-7.x5001-x>.
7. Prim R., Truesdell C. A derivation of Zorawski's criterion for permanent vector-lines, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1950, vol. 1, no. 1, pp. 32–34. <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1950-0035136-9>.
8. Truesdell C. *The Kinematics of Vorticity*. Bloomington, IU Press, 1954, xx+232 pp.
9. Sizykh G. B. Entropy Value on the Surface of a Non-symmetric Convex Bow Part of a Body in the Supersonic Flow, *Fluid Dyn.*, 2019, vol. 54, no. 7, pp. 907–911. <https://doi.org/10.1134/S0015462819070139>.
10. Mironyuk I. Yu., Usov L. A. The invariant of stagnation streamline for a stationary vortex flow of an ideal incompressible fluid around a body, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 4, pp. 780–789 (In Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1815>.
11. Mironyuk I. Yu., Usov L. A. Stagnation points on vortex lines in flows of an ideal gas, *Proceedings of MIPT*, 2020, vol. 12, no. 4, pp. 171–176 (In Russian).
12. Pontryagin L. S. *Obyknovennyye differentsial'nye uravneniia* [Ordinary Differential Equations]. Izhevsk, Regular and Chaotic Dynamics, 2001, 400 pp. (In Russian)
13. Truesdell C. On curved shocks in steady plane flow of an ideal fluid, *J. Aeronaut. Sci.*, 1952, vol. 19, no. 12, pp. 826–828. <https://doi.org/10.2514/8.2495>.
14. Hayes W. D. The vorticity jump across a gasdynamic discontinuity, *J. Fluid Mech.*, 1957, no. 2, pp. 595–600. <https://doi.org/10.1017/s0022112057000403>.