Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25, № 4. С. 787–796
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1865

УДК 517.958:530.145

Модель стохастического процесса в пространстве случайных совместных событий

А. А. Бирюков

Самарский государственный университет путей сообщения,
Россия, 443066, Самара, ул. Свободы, 2 В.

Аннотация

Строится модель пространства случайных совместных событий, в котором дополнительно к симметричной разности событий вводится понятие симметричной суммы событий. В пространстве формулируются модель стохастического процесса и соответствующее выражение для вероятности перехода системы между двумя событиями. Показано, что для попарно совместных событий оно эквивалентно уравнению квантовой механики.

Ключевые слова: пространство случайных совместных событий, модель симметричной суммы случайных совместных событий, модель стохастического процесса в пространстве случайных совместных событий, вероятности перехода, квантовая механика.

Получение: 14 мая 2021 г. / Исправление: 3 августа 2021 г. / Принятие: 18 августа 2021 г. / Публикация онлайн: 5 ноября 2021 г.

Введение. Построение математической модели физического процесса является принципиально важным для его адекватного описания. Модели стохастических процессов классической физики успешно представляются в рамках теории вероятностей и широко освещены в литературе. Например, в монографии [1] представлены как оригинальные исследования авторов, так и обзор обширной литературы по теории классических стохастических процессов.

Активное развитие современных технологий стимулируют исследования описания квантовых систем методами теории вероятностей (смотри, например, работы [2–6]), в которых представлены оригинальные результаты и обзоры в этом направлении. В работах [7–11] предложены модели стохастических процессов в пространстве совместных событий.

Краткое сообщение

Образец для цитирования
Бирюков А. А. Модель стохастического процесса в пространстве случайных совместных событий // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 4. С. 787–796. https://doi.org/10.14498/vsgtu1865.

Сведения об авторе
Александр Александрович Бирюков https://orcid.org/0000-0003-3955-1726
кандидат физико-математических наук, профессор; профессор; кафедра естественных наук; e-mail: biryukov_1@mail.ru

В данной работе предлагается дальнейшее развитие модели пространства случайных совместных событий и стохастического процесса в этом пространстве. В предложенной модели пространства совместных событий, в соответствии с аксиоматикой Колмогорова, существует симметричная разность событий. Однако специфика стохастических процессов, изучаемых в физике микромира, требует дополнительно ввести для их описания совместные случайные события, для которых существует симметричная сумма. В предложенном пространстве строится модель стохастического процесса, которая описывается выражением для вероятности перехода между событиями. Показано, что уравнение для случая, когда случайные события лишь попарно совместны, эквивалентно уравнению квантовой механики.

1. Модель пространства совместных случайных событий с симметричными разностью и суммой событий. Рассмотрим пространство N случайных событий S_n^{kl}, где $n = 1, 2, \dots, N$, символ kl означает, что события и их вероятности подчиняются действиям в соответствии с аксиомами Колмогорова [12]. В пространстве событий определяются состояние и стохастическое движение некой физической системы.

Для случая, когда данные события S_n^{kl}, $n = 1, 2, \dots, N$, несовместны, вероятность их объединения определяется формулой [12]

$$P\big(\cup_{k=1}^{N} S_n^{kl}\big) = \sum_{n=1}^{N} P(S_n^{kl}).$$

Модель пространства, в которой все случайные события S_n^{kl}, $n = 1, 2, \dots, N$, совместны, определяется тем, что вероятности пересечения этих событий отличны от нуля:

$$P(S_n^{kl} \cap S_m^{kl}) \neq 0,\ P(S_n^{kl} \cap S_m^{kl} \cap S_k^{kl}) \neq 0,\ \dots,\ P(S_1^{kl} \cap S_2^{kl} \cap \dots \cap S_N^{kl}) \neq 0, \quad (1)$$

все индексы k, n, m, … принимают значения от 1 до N. Вероятность объединения совместных событий $\big(S_1^{kl} \cup S_2^{kl} \cup \dots \cup S_N^{kl}\big)$ определяется формулой [13]

$$P\big(\cup_{n=1}^{N} S_n^{kl}\big) = \sum_{n=1}^{N} P(S_n^{kl}) - \sum_{n<m=1}^{N} P\big(S_n^{kl} \cap S_m^{kl}\big) + \\ + \sum_{n<m<k=1}^{N} P\big(S_n^{kl} \cap S_m^{kl} \cap S_k^{kl}\big) - \dots + (-1)^{N-1} P\big(S_1^{kl} \cap S_2^{kl} \cap \dots \cap S_N^{kl}\big). \quad (2)$$

В пространстве случайных совместных событий S_1^{kl}, S_2^{kl}, …, S_N^{kl} построим события S_1^{-}, S_2^{-}, …, S_N^{-}, каждое из которых значит, что если произойдет событие с соответствующим номером, то не произойдет ни одно другое событие пространства. Из определения следует, что события S_1^{-}, S_2^{-}, …, S_N^{-} несовместны.

Для пространства двух совместных событий S_1^{kl}, S_2^{kl} события S_1^{-}, S_2^{-} определяются выражениями

$$S_1^{-} = S_1^{kl} \setminus (S_1^{kl} \cap S_2^{kl}), \quad S_2^{-} = S_1^{kl} \setminus (S_1^{kl} \cap S_2^{kl}).$$

Из данных определений на основании аксиом Колмогорова доказывается

$$P\big(S_1^- \cup S_2^-\big) = \sum_{n=1}^{2} P(S_n^{kl}) - 2P\big(S_1^{kl} \cap S_2^{kl}\big). \tag{3}$$

Выражение (3) называется симметричной разностью двух событий.

В пространстве совместных событий S_1^{kl}, S_2^{kl}, ..., S_N^{kl}, $N \geqslant 3$, симметричная разность N событий представляется выражением [14]

$$P\big(\cup_{n=1}^{N} S_n^-\big) = \sum_{n=1}^{N} P(S_n^{kl}) - 2\sum_{n<m=1}^{N} P\big(S_n^{kl} \cap S_m^{kl}\big) +$$

$$+\,4\sum_{n<m<k=1}^{N} P\big(S_n^{kl} \cap S_m^{kl} \cap S_k^{kl}\big) - \dots + 2^{N-1}(-1)^{N-1} P(S_1^{kl} \cap S_2^{kl} \cap \dots \cap S_N^{kl}). \tag{4}$$

Выражение (4) доказывается методом математической индукции с использованием формулы (3).

Анализ экспериментов показывает, что соотношения (1)–(4) успешно описывают совместные события в физике макромира и большой класс событий в физике микромира. Однако в физике микромира существуют совместные случайные события (например, в опытах по дифракции электронов), описание которых на базе соотношений (1)–(4) невозможно. Для их описания требуются дополнительные положения.

Постулируем, что в физике микромира наряду с событиями S_n^{kl} существуют совместные события S_n^{qv}, вероятность объединения которых $P\big(S_1^{qv} \cup S_2^{qv} \cup \dots \cup S_N^{qv}\big)$ описывается выражением

$$P\big(\cup_{n=1}^{N} S_n^{qv}\big) = \sum_{n=1}^{N} P(S_n^{qv}) + \sum_{n<m=1}^{N} P\big(S_n^{qv} \cap S_m^{qv}\big) -$$

$$-\sum_{n<m<k=1}^{N} P\big(S_n^{qv} \cap S_m^{qv} \cap S_k^{qv}\big) - \dots + (-1)^{N'} P(S_1^{qv} \cap S_2^{qv} \cap \dots \cap S_N^{qv}), \tag{5}$$

где символ qv значит, что случайное событие относится к физике микромира (к процессам в квантовой механике); знак перед первым слагаемым “+”, перед остальными слагаемыми знаки определяются множителями $(-1)^{N'}$, где N' — порядковый номер слагаемого.

В пространстве случайных совместных событий S_1^{qv}, S_2^{qv}, ..., S_N^{qv} построим события S_1^+, S_2^+, ..., S_N^+, каждое из которых значит, что при реализации этого события реализуются все события S_n^{kl} с соответствующими вероятностями.

Для пространства двух совместных событий S_1^{qv}, S_2^{qv} события S_1^+, S_2^+ определяются выражениями

$$S_1^+ = S_1^{qv} \cup (S_1^{qv} \cap S_2^{qv}), \quad S_2^+ = S_2^{qv} \cup (S_1^{qv} \cap S_2^{qv}).$$

Из данных определений следует, что

$$P\big(S_1^+ \cup S_2^+\big) = \sum_{n=1}^{2} P(S_n^{qv}) + 2P\big(S_1^{qv} \cap S_2^{qv}\big). \tag{6}$$

Выражение (6) естественно называть симметричной суммой двух событий.

Вероятность объединения событий $P\big(S_1^+ \cup S_2^+ \cup \dots \cup S_N^+\big)$ выражается через вероятности событий S_n^{qv}, $n = 1, 2, \dots, N$, и вероятности их пересечений выражением

$$P\big(\cup_{n=1}^N S_n^+\big) = \sum_{n=1}^{N} P(S_n) + 2\sum_{n<m=1}^{N} P\big(S_n^{qv} \cap S_m^{qv}\big) -$$
$$- 4\sum_{n<m<k=1}^{N} P\big(S_n^{qv} \cap S_m^{qv} \cap S_k^{qv}\big) - \dots + 2^{N-1}(-1)^{N'} P\big(S_1^{qv} \cap S_2^{qv} \cap \dots \cap S_N^{qv}\big), \tag{7}$$

где знак перед слагаемым определяется так же, как и в формуле (5). Формула (7) доказывается методом математической индукции с использованием (6). Выражение (7) является симметричной суммой случайных событий S_n^+. Заметим, что интерпретация событий в уравнениях (5)–(7) множествами, как это предусмотрено аксиоматикой Колмогорова, недопустима, она приводит к противоречию.

Выражения (4), (7) можно записать в виде одного. С этой целью введем случайные события $\tilde{S}_n$, каждое из которых принимает значение или S_n^-, или S_n^+. Вероятность объединения событий $\tilde{S}_n$ представляется формулой, которая является объединением (4) и (7):

$$P\big(\cup_{n=1}^N \tilde{S}_n\big) = \sum_{n=1}^{N} P(S_n) + 2\sum_{n<m=1}^{N} g_{nm} P(S_n \cap S_m) +$$
$$+ 4\sum_{n<m<k=1}^{N} g_{nmk} P(S_n \cap S_m \cap S_k) + \dots + 2^{N-1} g_{12\dots N} P\big(S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_N\big), \tag{8}$$

где множители g_{nm}, g_{nkm} и другие принимают одно из значений 0, $+1$, -1 в зависимости от событий S_n. Индексы kl, qv у событий S_n^{kl}, S_n^{qv} в (8) опущены, так как они учитываются знаками коэффициентов $g_{nm}, g_{nkm}, \dots$.

В построенном пространстве случайных совместных событий реализуются как симметричная разность, так и симметричная сумма событий. Пространство описывает более широкий круг систем и стохастических процессов, нежели пространства, в которых реализуется только симметричная разность событий.

2. Вероятность перехода между состояниями системы при стохастическом процессе в пространстве совместных случайных событий. Рассмотрим систему, которая описывается набором случайных совместных событий S_n, $n = 1, 2, \dots, N$, в пространстве, представленном в предыдущем пункте данной работы. Движение системы представляется ее переходом в пространстве случайных событий с некой вероятностью из состояния, характеризуемого событием a в момент времени t_1, в состояние с событием b в момент $t_2 > t_1$. Переход системы характеризуется вероятностью

$$P(b \cap a) = P(b|a)P(a), \tag{9}$$

где $P(b|a)$ — условная вероятность перехода системы из состояния a в состояние b за интервал времени $(t_2 - t_1)$; $P(a)$ — вероятность реализации состояния a в начальный момент времени t_1. Будем полагать $P(a) = 1$.

Для нахождения явного вида вероятности перехода $P(b|a)$ построим стохастическую модель движения системы в пространстве случайных совместных событий. Будем полагать

$$b \cap a = \bigcup_{n=1}^{N} \big(b \cap \tilde{S}_n \cap a\big) = \bigcup_{n=1}^{N} \tilde{S}[b, n, a], \tag{10}$$

где $\big(b \cap \tilde{S}_n \cap a\big) = \tilde{S}[b, n, a]$; поскольку здесь события a и b фиксированные, мы их представляем как индексы. Формула (10) означает, что переход физической системы из некого состояния a в другое состояние b осуществляется через промежуточные состояния $\tilde{S}_n$.

Искомая вероятность перехода системы с учетом (9), (10) определяется формулой

$$P(b|a) = P\Big(\bigcup_{n=1}^{N} \tilde{S}[b, n, a]\Big). \tag{11}$$

Учитывая (8), формулу (11) можно представить в виде

$$\begin{aligned} P(b|a) = \sum_{n=1}^{N} P\big(S[b, n, a]\big) + 2 \sum_{n<m=1}^{N} g_{nm} P\big(S[b, n, a] \cap S[b, m, a]\big) + \\ + 4 \sum_{n<m<k=1}^{N} g_{nmk} P\big(S[b, n, a] \cap S[b, m, a] \cap S[b, k, a]\big) + \ldots + \\ + 2^{N-1} g_{12\ldots N} P\big(S[b, 1, a] \cap S[b, 2, a] \cap \cdots \cap S[b, N, a]\big), \end{aligned} \tag{12}$$

Представим уравнения (12) в форме, более удобной для описания стохастических процессов. Объединяя первые два слагаемых в соответствии с принципами теории вероятностей, уравнение (12) представим в виде

$$\begin{aligned} P(b|a) = \sum_{n,m=1}^{N} g_{nm} P\big(S[b, n, a] \cap S[b, m, a]\big) + \\ + 4 \sum_{n<m<k=1}^{N} g_{nmk} P\big(S[b, n, a] \cap S[b, m, a] \cap S[b, k, a]\big) + \ldots + \\ + 2^{N-1} g_{12\ldots N} P\big(S[b, 1, a] \cap S[b, 2, a] \cap \cdots \cap S[b, N, a]\big), \end{aligned} \tag{13}$$

где $g_{n,m} = +1, -1$, $n \neq m$; $g_{n,n} = +1$, $n = m$; $g_{nmk} = +1, -1$; $\ldots$.

Для выражения (12), описывающего процесс в пространстве совместных событий, выполняется принцип соответствия: когда события несовместны, вероятности пересечения событий в правой части уравнения равны нулю, остается лишь первая сумма, то есть оно переходит в уравнение марковских процессов в пространстве несовместных событий.

Для проведения конкретных численных вычислений вероятностей перехода на основании формулы (13) требуется конкретизация вероятностей и коэффициентов в правой части выражения на основании изучаемой модели.

3. Физическая интерпретация уравнения для вероятности перехода системы в пространстве случайных совместных событий. Для описания физической системы на основании уравнения (13) необходимо случайным событиям поставить в соответствие случайные числа, характеризующие систему. Рассмотрим систему, в которой каждому событию с номером n соответствует случайное число с тем же порядковым номером. Например, электрон в атоме пребывает в квантовых состояниях с энергиями E_n, $n = 1, 2, \ldots$.

В предлагаемой модели событиям b, a соответствуют числа n_f, n_{in}. Переход системы из состояния n_{in} в момент времени t_{in} в состояние n_f в момент времени $t_f > t_{in}$ осуществляется по некоторой случайной траектории, определяемой либо одним числом n, либо множеством чисел n_{in}, n_1, n_2, …, n_f. Событиям $\big(b \cap S_n \cap a\big) = S[b, n, a]$ ставятся в соответствие безразмерные (т.е. в единицах $\hbar$) действия системы $S[n_f, n, n_{in}]$, вдоль случайных траекторий между состояниями n_f, n_{in} (числа n нумеруют траектории, вдоль которых рассматриваются действия, и в ряде моделей могут быть мультииндексами).

Вероятность $P(n_f|n_{in})$ перехода системы между состояниями n_f, n_{in} определяется формулой (13), в которой случайные события заменяются соответствующими случайными числами, характеризующие систему:

$$\begin{aligned}
P(n_f|n_{in}) = \sum_{n,m=1}^{N} g_{nm} P\big(S[n_f, n, n_{in}], S[n_f, m, n_{in}]\big) +& \\
+ 4 \sum_{n<m<k=1}^{N} g_{nmk} P(S[n_f, n, n_{in}], S[n_f, m, n_{in}], S[n_f, k, n_{in}]) + \ldots +& \\
+ 2^{N-1} g_{12\ldots N} P\big(S[n_f, 1, n_{in}], S[n_f, 2, n_{in}], \ldots, S[n_f, N, n_{in}]\big).& \qquad (14)
\end{aligned}$$

Рассмотрим частный случай нашей модели, когда события только попарно совместны:

$$P(S_n \cap S_m) \neq 0,\ P(S_n \cap S_m \cap S_k) = 0,\ \ldots,\ P(S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_N) = 0. \qquad (15)$$

Соответственно, выражение (14) с учетом (15) для вероятности перехода системы в пространстве состояний принимает вид

$$P(n_f|n_{in}) = \sum_{n,m=1}^{N} g_{nm} P\big(S[n_f, n, n_{in}], S[n_f, m, n_{in}]\big), \qquad (16)$$

где $g_{n,m} = +1, -1,\ n \neq m$; $g_{n,n} = +1,\ n = m$.

Формула (16) для вероятностей переходов системы между состояниями совпадает с соответствующими выражениями квантовой механики, что позволяет утверждать, что предложенная модель стохастических процессов в пространстве попарно совместных событий описывает квантовые процессы.

Для квантовых систем определяем

$$P\big(S[n_f, n, n_{in}], S[n_f, m, n_{in}]\big) = P_0\big|\cos\big[S[n_f, n, n_{in}] - S[n_f, m, n_{in}]\big]\big|, \quad (17)$$

$$g_{nm} = \cos\big[S[n_f, n, n_{in}] - S[n_f, m, n_{in}]\big] \times$$
$$\times \Big|\cos\big[S[n_f, n, n_{in}] - S[n_f, m, n_{in}]\big]\Big|^{-1}, \quad (18)$$

где P_0 — нормировочная постоянная. Подставляя (17), (18) в (16), получаем

$$P(n_f|n_{in}) = \sum_{n,m=1}^{N} P_0 \cos\big[S[n_f, n, n_{in}] - S[n_f, m, n_{in}]\big]. \quad (19)$$

Выражение (19) описывает квантовые процессы, например, дифракцию частиц при прохождении через дифракционную решетку с N щелями. Вероятность $P(n_f|n_{in})$ описывает плотность распределения частиц на экране наблюдения дифракции. В этой модели n_{in} означает эмиссионное состояние частицы с импульсом $\mathbf{p}$; n_f — состояние частицы на регистрирующем экране, параллельном плоскости дифракционной решетки; $S[n_f, n, n_{in}] = \mathbf{k}\,\mathbf{r}_{n_f,n} + \mathbf{k}\,\mathbf{r}_{n,n_{in}}$ — действие частицы по траектории от состояния n_{in} до точки n_f, проходящей через щель с номером n. Здесь $\mathbf{k} = \mathbf{p}/\hbar$ — волновое число частицы; $\mathbf{r}_{n_f,n}$, $\mathbf{r}_{n,n_{in}}$ — векторы между точками.

Квантовая система с дискретным энергетическим спектром E_n, $n = 1, 2, \ldots$, описана методом функционального интегрирования в работе [15]. Система совершает переходы между квантовыми состояниями n под действием поляризованной монохроматической электромагнитной волны, $n = 1, 2, \ldots, N$. Вероятность квантового перехода $P(n_f, t_f|n_{in}, t_{in})$ между состояниями n_{in}, n_f за интервал времени $(t_f - t_{in})$ получена в виде (19), где действие определено в соответствии с моделью системы.

Заключение. Построена модель пространства случайных совместных событий с определенными симметричной разностью и симметричной суммой событий. Вероятность перехода системы между состояниями в процессе ее стохастического движения в пространстве определяется уравнением, учитывающим совместность событий. Для уравнения выполняется принцип соответствия, то есть если события не совместные, оно переходит в уравнение марковского процесса.

Для случая, когда события лишь попарно совместны, уравнение идентично уравнению квантовой механики, описывающего эволюцию квантовой системы.

Представляет интерес исследование вероятности перехода системы между состояниями на основании предложенного уравнения с учетом совместности трех, четырех и более событий.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Морозов А. Н., Скрипкин А. В. *Немарковские физические процессы.* М.: Физматлит, 2018. 288 с.
2. Skorobogatov G. A., Svertilov S. I. Quantum mechanics can be formulated as a non-Markovian stochastic process // *Phys. Rev. A*, 1998. vol. 58, no. 5. pp. 3426–3432. https://doi.org/10.1103/PhysRevA.58.3426.
3. Попов Н. Н. *Элементы теории квантовых вероятностей.* М.: Выч. центр РАН, 1996. 206 с.
4. Холево А. С. *Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории.* М., Ижевск: Ин-т комп. исслед., 2003. 410 с.
5. Хренников А. Ю. *Неколмогоровские теории вероятностей и квантовая физика.* М.: Физматлит, 2003. 207 с.
6. Рязанов Г. В. Квантово-механические вероятности как суммы по путям // *ЖЭТФ*, 1958. Т. 35, № 1. С. 123–131.
7. Бирюков А. А. Цепи Маркова для совместных состояний и уравнения квантовой механики // *ТМФ*, 1971. Т. 7, № 1. С. 56–60.
8. Бирюков А. А. Марковские процессы для совместных событий и уравнения квантовой механики // *Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер.*, 2010. № 4(78). С. 137–144.
9. Бирюков А. А. Стохастические процессы в пространстве случайных совместных событий и уравнения квантовой механики // *Теорет. физ.*, 2012. № 13. С. 56–76.
10. Бирюков А. А. Описание дифракции частиц в пространстве случайных совместных событий // *Теорет. физ.*, 2013. № 14. С. 77–87.
11. Biryukov A. A. Equations of quantum theory in the space of randomly joint quantum events // *EPJ Web Conf.*, 2019. vol. 222, 03005. https://doi.org/10.1051/epjconf/201922203005.
12. Колмогоров А. Н. *Основные понятия теории вероятностей.* М.: Наука, 1974. 120 с.
13. Розанов Ю. А. *Лекции по теории вероятностей.* М.: Наука, 1968. 120 с.
14. Прохоров А. В., Ушаков В. Г., Ушаков Н. Г. *Задачи по теории вероятности.* М.: Наука, 1986. 328 с.
15. Бирюков А. А., Дегтярева Я. В., Шлеенков М. А. Численное вычисление вероятностей квантовых переходов в атомах и молекулах методом функционального интегрирования // *Изв РАН. Сер. физ.*, 2018. Т. 82, № 12. С. 1728–1733. https://doi.org/10.1134/S0367676518120050.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 4, pp. 787–796

MSC: 60A05, 60G07

Model of a stochastic process in the space of random joint events

A. A. Biryukov

Samara State Transport University,
2 V, Svobody st., Samara, 443066, Russian Federation.

Abstract

A model of the space of random joint events is being constructed. In space, along with the existence of a symmetric difference of joint events, a new postulate is introduced about the existence of a symmetric sum of random joint events. In the generated space, the stochastic equation of motion of the system and the expression for the probabilities of the system's transition between two events are modeled. The transition probability depends on the probabilities of compatibility of two, three, etc. events. The equation is equivalent to the Markov chain equation for incompatible events. The equation is equivalent to the equation of quantum theory if the events are compatible only in pairs.

Keywords: space of joint events, model of a symmetric sum of random joint events, model of a stochastic process in spatial joint events, transition probabilities, quantum mechanics.

Received: 14th May, 2021 / Revised: 3rd August, 2021 /
Accepted: 18th August, 2021 / First online: 5th November, 2021

Competing interests. I have no competing interests.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submit the final manuscript to print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. This research received no external funding.

References

1. Morozov A. N., Skripkin A. V. *Nemarkovskie fizicheskie protsessy* [Non-Markovian Physical Processes]. Moscow, Fizmatlit, 2018, 288 pp. (In Russian)
2. Skorobogatov G. A., Svertilov S. I. Quantum mechanics can be formulated as a non-Markovian stochastic process, *Phys. Rev. A*, 1998, vol. 58, no. 5, pp. 3426–3432. https://doi.org/10.1103/PhysRevA.58.3426.

Short Communication

Please cite this paper in press as:
Biryukov A. A. Model of a stochastic process in the space of random joint events, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 4, pp. 787–796. https://doi.org/10.14498/vsgtu1865 (In Russian).

Author's Details:
Alexandr A. Biryukov https://orcid.org/0000-0003-3955-1726
Cand. Phys. & Math. Sci.; Professor; Dept. of Natural Sciences; e-mail: biryukov_1@mail.ru

3. Popov N. N. *Elementy teorii kvantovykh veroiatnostei* [Elements of the Theory of Quantum Probabilities]. Moscow, Computing Center of RAS, 1996, 206 pp. (In Russian)
4. Holevo A. S. *Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory*. Pisa, Edizioni della Normale, 2011, xvi+223 pp. https://doi.org/10.1007/978-88-7642-378-9.
5. Khrennikov A. Yu. *Nekolmogorovskie teorii veroiatnostei i kvantovaia fizika* [Non-Kolmogorovian Probability Theory in Quantum Physics]. Moscow, Fizmatlit, 2003, 207 pp.
6. Ryazanov G. V. Quantum-mechanical probabilities as sums over paths, *Sov. Phys., JETP*, 1959, vol. 8, no. 1, pp. 85–93.
7. Biryukov A. A. Markov chains for compatible states and the equations of quantum mechanics, *Theor. Math. Phys.*, 1971, vol. 7, no. 1, pp. 364–367. https://doi.org/10.1007/BF01028134.
8. Biryukov A. A. Markovian processes for compatible events and equations of quantum mechanics, *Vestn. Samar. Gos. Univ., Estestvennonauchn. Ser.*, 2010, no. 4(78), pp. 137–144 (In Russian).
9. Biryukov A. A. Stochastic processes in the space of random joint events and the equations of quantum mechanics, *Theor. Phys.*, 2012, no. 13, pp. 56–76 (In Russian).
10. Biryukov A. A. Description of the diffraction of particles in the space of random joint events, *Theor. Phys.*, 2013, no. 14, pp. 77–87 (In Russian).
11. Biryukov A. A. Equations of quantum theory in the space of randomly joint quantum events, *EPJ Web Conf.*, 2019, vol. 222, 03005. https://doi.org/10.1051/epjconf/201922203005.
12. Kolmogorov A. N. *Osnovnye poniatiia teorii veroiatnostei* [Basic Concepts of Probability Theory]. Moscow, Nauka, 1974, 120 pp. (In Russian)
13. Rozanov Yu. A. *Lektsii po teorii veroiatnostei* [Lectures on Probability Theory]. Moscow, Nauka, 1968, 120 pp. (In Russian)
14. Prokhorov A. V., Ushakov V. G., Ushakov N. G. *Zadachi po teorii veroiatnosti* [Problems on the Theory of Probability]. Moscow, Nauka, 1986, 328 pp. (In Russian)
15. Biryukov A. A., Degtyareva Yu. V., Shleenkov M. A. Calculating the probabilities of quantum transitions in atoms and molecules numerically through functional integration, *Bull. Russ. Acad. Sci. Phys.*, 2018, vol. 82, no. 12, pp. 1565–1569. https://doi.org/10.3103/S1062873818120055.