Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25, № 4. С. 716–737
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1876

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

УДК 519.254, 004.94

Математическое моделирование процесса параметрической идентификации моделей конвективно-диффузионного переноса с применением SVD-фильтра Калмана

А. Н. Кувшинова[1]**,** ***А. В. Цыганов***[1]**,** ***Ю. В. Цыганова***[2]

[1] Ульяновский государственный педагогический университет им. И. Н. Ульянова, Россия, 432071, Ульяновск, пл. Ленина, 4/5.
[2] Ульяновский государственный университет, Россия, 432017, Ульяновск, ул. Льва Толстого, 42.

Аннотация

Рассматривается задача математического моделирования процесса идентификации коэффициентов уравнения в частных производных в моделях конвективно-диффузионного переноса по результатам зашумленных измерений значений искомой функции с применением нового метода, относящегося к классу рекуррентных методов параметрической идентификации на основе алгоритмов оптимальной дискретной фильтрации калмановского типа. Рассматриваются одномерные модели с постоянными коэффициентами, граничными условиями первого рода или смешанными граничными условиями первого и третьего рода.

Предлагаемый метод решения задачи основан на переходе от исходной непрерывной модели с уравнением в частных производных к модели, описываемой линейной дискретной динамической системой в пространстве состояний, и применении к ней метода максимального правдоподобия с построением критерия идентификации (функции правдоподобия)

Научная статья

Образец для цитирования
Кувшинова А. Н., Цыганов А. В., Цыганова Ю. В. Математическое моделирование процесса параметрической идентификации моделей конвективно-диффузионного переноса с применением SVD-фильтра Калмана // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 4. С. 716–737. https://doi.org/10.14498/vsgtu1876.

Сведения об авторах

Анастасия Николаевна Кувшинова https://orcid.org/0000-0002-3496-5981
аспирант; каф. высшей математики; e-mail: kuvanulspu@yandex.ru

Андрей Владимирович Цыганов https://orcid.org/0000-0002-4173-5199
кандидат физико-математических наук, доцент; профессор; каф. высшей математики; e-mail: andrew.tsyganov@gmail.com

Юлия Владимировна Цыганова https://orcid.org/0000-0001-8812-6035
доктор физико-математических наук, доцент; профессор; каф. информационных технологий; e-mail: tsyganovajv@gmail.com

на основе величин, вычисляемых SVD-модификацией фильтра Калмана. Данный фильтр основан на сингулярном разложении ковариационной матрицы ошибок оценивания вектора состояния и устойчиво работает даже в тех случаях, когда она близка к вырожденной. SVD-фильтр хорошо зарекомендовал себя при решении различных задач дискретной фильтрации и параметрической идентификации и обладает целым рядом преимуществ по сравнению с традиционно используемым стандартным фильтром Калмана, главным из которых является устойчивость к ошибкам машинного округления.

Приводятся результаты компьютерного моделирования процессов параметрической идентификации в системе MATLAB с использованием специализированного программного комплекса. Результаты численных экспериментов подтверждают работоспособность предложенного метода и его преимущества по сравнению с аналогичным методом на основе стандартного фильтра Калмана.

Ключевые слова: модель конвективно-диффузионного переноса, параметрическая идентификация, фильтр Калмана, SVD-фильтр.

Получение: 3 августа 2021 г. / Исправление: 7 декабря 2021 г. /
Принятие: 21 декабря 2021 г. / Публикация онлайн: 28 декабря 2021 г.

Введение и постановка задачи. Математические модели, описываемые уравнениями в частных производных, в частности, модели конвективно-диффузионного переноса, широко используются для описания природных и технических процессов [1, 2]. Для данных моделей актуальными являются задачи идентификации их параметров по результатам измерений значений искомой функции в отдельных точках рассматриваемой области. Такие задачи относятся к обратными задачам математической физики и в общем случае являются некорректно поставленными [3].

В ряде работ (см., например, [4–9] для решения задач параметрической идентификации моделей, описываемых уравнениями в частных производных, предложено использовать рекуррентные методы, основанные на алгоритмах дискретной фильтрации калмановского типа. Такой подход обладает рядом преимуществ, например для систем, работающих в реальном времени, однако следует заметить, что эффективность реализации рекуррентных методов параметрической идентификации может существенно зависеть от выбора соответствующих алгоритмов оптимальной дискретной фильтрации, поскольку недостатки классического фильтра Калмана, в частности неустойчивость к ошибкам машинного округления, широко известны и описаны в литературе [10]. В связи с этим актуальными являются вопросы разработки алгоритмов параметрической идентификации на основе численно эффективных модификаций фильтра Калмана.

Пусть дана математическая модель конвективно-диффузионного переноса, описываемая следующими уравнениями:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + v\frac{\partial c}{\partial x} = \alpha\frac{\partial^2 c}{\partial^2 x}, \tag{1}$$

$$c(x,0) = \varphi(x), \tag{2}$$

$$c(a,t) = f(t), \tag{3}$$

$$c(b,t) = g(t), \tag{4}$$

или
$$\frac{\partial c(b,t)}{\partial x} = -\lambda[c(b,t) - g(t)], \tag{5}$$
где $x \in [a;b]$ — пространственная координата; $t \in [0;T]$ — время; $c(x,t)$ — искомая функция, например концентрация некоторого вещества в потоке жидкости в точке с координатой x в момент времени t; v — скорость конвекции; α — коэффициент диффузии; (2) — начальное условие; (3), (4), (5) — граничные условия. Таким образом, рассматриваются модели либо с граничными условиями первого рода, либо со смешанными граничными условиями первого и третьего рода.

Рассмотрим задачу параметрической идентификации, состоящую в определении коэффициентов v и α в уравнении (1) по результатам зашумленных измерений значений функции $c(x,t)$ в отдельных точках рассматриваемого отрезка в различные моменты времени (функции $\varphi(x)$, $f(t)$, $g(t)$ и коэффициентов λ, входящих в начальное и граничные условия предполагаются известными).

Данная задача ранее исследовалась авторами в работах [11–13], однако в них использовались методы идентификации на основе стандартного фильтра Калмана. Основной целью данной статьи является разработка нового метода параметрической идентификации для моделей конвективно-диффузионного переноса на основе SVD-модификации фильтра Калмана и исследование его преимуществ по сравнению со стандартным фильтром с применением методов и средств компьютерного моделирования.

1. Дискретизация исходной модели. Перейдем от исходной непрерывной модели к дискретной модели, описываемой линейной динамической системой в пространстве состояний. Следуя [12, 13], зададим в рассматриваемой пространственно-временной области конечно-разностную сетку $\{(x_i, t_k) \mid i = 0, 1, \ldots, N,\ k = 0, 1, \ldots, K\}$, где
$$x_i = a + i\Delta x, \quad t_k = k\Delta t, \quad \Delta x = \frac{b-a}{N-1}, \quad \Delta t = \frac{T}{K-1}.$$
Обозначим $c_i^k = c(x_i, t_k)$, $c_i^0 = c(x_i, 0) = \varphi(x_i)$, $f^k = f(t_k)$, $g^k = g(t_k)$. Заменяя частные производные в уравнении (1) их конечно-разностными аппроксимациями, в случае граничных условий (3), (4) получаем дискретную линейную динамическую систему
$$\underbrace{\begin{bmatrix} c_1^k \\ c_2^k \\ c_3^k \\ \vdots \\ c_{n-2}^k \\ c_{n-1}^k \\ c_n^k \end{bmatrix}}_{c_k} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_2 & a_3 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_1 & a_2 \end{bmatrix}}_{F_{k-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} c_1^{k-1} \\ c_2^{k-1} \\ c_3^{k-1} \\ \vdots \\ c_{n-2}^{k-1} \\ c_{n-1}^{k-1} \\ c_n^{k-1} \end{bmatrix}}_{c_{k-1}} + \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \ldots & \ldots \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & a_3 \end{bmatrix}}_{B_{k-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} f^{k-1} \\ g^{k-1} \end{bmatrix}}_{u_{k-1}},$$
$$k = 1, 2, \ldots, K, \tag{6}$$

а в случае граничных условий (3), (5) —

$$\underbrace{\begin{bmatrix} c_1^k \\ c_2^k \\ c_3^k \\ \vdots \\ c_{n-2}^k \\ c_{n-1}^k \\ c_n^k \end{bmatrix}}_{c_k} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_2 & a_3 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_4 a_1 & a_4 a_2 & a_4 a_3 \end{bmatrix}}_{F_{k-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} c_1^{k-1} \\ c_2^{k-1} \\ c_3^{k-1} \\ \vdots \\ c_{n-2}^{k-1} \\ c_{n-1}^{k-1} \\ c_n^{k-1} \end{bmatrix}}_{c_{k-1}} + \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & a_5 \end{bmatrix}}_{B_{k-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} f^{k-1} \\ g^k \end{bmatrix}}_{u_{k-1}},$$

$$k = 1, 2, \dots, K. \quad (7)$$

Системы (6) и (7) являются дискретными линейными динамическими системами, в которых граничные условия входят в двумерный вектор входных воздействий u_k. Коэффициенты в матрицах обеих систем имеют следующий вид:

$$a_1 = r_1 + r_2, \quad a_2 = 1 - 2r_2, \quad a_3 = r_2 - r_1, \quad a_4 = \frac{1}{1 + \lambda \Delta x}, \quad a_5 = \frac{\lambda \Delta x}{1 + \lambda \Delta x},$$

где

$$r_1 = \frac{v \Delta t}{2 \Delta x}, \quad r_2 = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2},$$

а сами матрицы являются постоянными $(F_k = F \in \mathbb{R}^{n \times n},\ B_k = B \in \mathbb{R}^{n \times 2})$.

В системе (6) $n = N - 1$ — вектор состояния c_k состоит из всех внутренних узлов пространственной сетки, а в системе (7) $n = N$ — вектор состояния c_k состоит из всех внутренних узлов пространственной сетки и правой границы.

2. Выбор структуры измерителя. Добавим к уравнениям (6) и (7) модель измерителя в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} z_1^k \\ z_2^k \\ \vdots \\ z_m^k \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} c_1^k \\ c_2^k \\ \vdots \\ c_n^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi_1^k \\ \xi_2^k \\ \vdots \\ \xi_m^k \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad (8)$$

где $H \in \mathbb{R}^{m \times n}$ — матрица измерений, определяющая структуру измерителя; m — количество измеряемых компонент вектора состояния c_k; $\xi_k \in \mathbb{R}^m$ — погрешность измерителя. Очевидным выбором является $H = I$, где I — единичная матрица. Однако это решение избыточное, поскольку единичная матрица означает наличие n сенсоров для сбора данных измерений.

Обозначим через θ неизвестный (в общем случае векторный) параметр линейной динамической системы (6) или (7), подлежащий идентификации. Поставим задачу выбора структуры измерителя с минимальным количеством сенсоров, при которой обеспечивается существование и единственность стационарного оптимального дискретного фильтра Калмана при истинном значении параметра θ [14]. Достаточным условием является полная наблюдаемость линейной динамической системы. Данное условие накладывает ограничения на область определения $D(\theta)$ параметра θ, а также на возможность реализации процесса параметрической идентификации.

Для проверки условия полной наблюдаемости необходимо вычислить ранг матрицы наблюдаемости [15]

$$\mathscr{M}_{DTI} = \begin{bmatrix} H^\top & (HF)^\top & (HF^2)^\top & \dots & (HF^{n-1})^\top \end{bmatrix}^\top,$$

который должен быть равен n (размеру вектора состояния c_k).

Следовательно, для решения задачи выбора подходящей структуры измерителя необходимо найти такую матрицу с минимальным количеством сенсоров, для которой $\operatorname{rank} \mathscr{M}_{DTI} = n$.

В [16] проведен анализ полной наблюдаемости модели (6) и решена задача выбора структуры измерителя для $n = 5$. Доказано, что при выборе матрицы H в виде

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

модель (6), (8) является полностью наблюдаемой при условии, что коэффициенты a_1 и a_3 в модели (6) не равны нулю. Можно показать, что и в общем случае при выборе матрицы H в виде

$$H = \begin{bmatrix} e_i^\top \\ e_j^\top \end{bmatrix},$$

где $i \neq j$ и строка $e_i^\top = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (единица на i-м месте), модель (6), (8) является полностью наблюдаемой при условии, что коэффициенты a_1 и a_3 в модели (6) не равны нулю.

Аналогичные результаты получаются для модели (7). Таким образом, для идентификации параметра θ в моделях (6) и (7) достаточно всего лишь двух сенсоров для сбора данных измерений.

3. Описание процесса параметрической идентификации. Предположим, что характеристики шума в измерителе известны, а шаги пространственно-временной сетки Δx и Δt заданы, тогда неизвестными параметрами дискретных моделей (6) и (7), подлежащими идентификации, являются скорость конвекции v и коэффициент диффузии α, от которых зависят коэффициенты a_1, a_2, a_3, входящие в элементы матриц F и B.

Дискретные модели (6), (7) с моделью измерителя (8) в общем виде можно записать как

$$\begin{cases} c_k = F(\theta)c_{k-1} + B(\theta)u_{k-1}, \\ z_k = Hc_k + \xi_k, \quad k = 1, 2, \dots, K, \end{cases} \tag{9}$$

где $\theta = (v, \alpha)^\top \in \mathbb{R}^2$, $c_k \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $u_k \in \mathbb{R}^2$ — вектор входных воздействий, $z_k \in \mathbb{R}^m$ — вектор измерений. Предположим, что погрешность измерителя $\xi_k \in \mathbb{R}^m$ является гауссовым белым шумом с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей $R > 0$. Матрицы моделей (6) и (7) $F(\theta) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B(\theta) \in \mathbb{R}^{n\times 2}$, зависят от параметра θ.

Рассмотрим задачу параметрической идентификации модели (9) по доступным данным с целью оценки неизвестного (векторного) параметра θ. Задача параметрической идентификации заключается в нахождении неизвестного параметра θ по известным входным сигналам $U_0^{K-1} = \{u_0, u_1, \dots, u_{K-1}\}$

и выходным данным измерений $Z_1^K = \{z_1, z_2, \ldots, z_K\}$ в соответствии с выбранным критерием качества идентификации $\mathscr{J}(\theta; Z_1^K, U_0^{K-1})$. В этом случае задача оценки неизвестного параметра требует решения задачи нелинейного программирования

$$\hat{\theta}_{\min} = \underset{\theta \in D(\theta)}{\operatorname{argmin}} \mathscr{J}(\theta; Z_1^K, U_0^{K-1}), \tag{10}$$

где $D(\theta) \subseteq \mathbb{R}^2$ — область определения параметра θ.

Одним из известных и наиболее популярных методов решения задачи параметрической идентификации является метод максимального правдоподобия [17], который заключается в отыскании экстремума функции правдоподобия. Для решения данной задачи можно использовать различные численные методы — градиентный метод, метод Ньютона, метаэвристические методы оптимизации (например генетический алгоритм или метод имитации отжига) и др. [18]. Готовые программные реализации данных методов, как правило, требуют от пользователя задания начального значения параметра θ, ограничений на переменные и описания целевой функции. Вопрос выбора конкретного численного метода оптимизации также может быть предметом отдельного исследования.

В качестве целевой функции для реализации процедуры параметрической идентификации выберем критерий идентификации (10) в виде отрицательной логарифмической функции правдоподобия [17]

$$\begin{aligned} &\mathscr{J}_{KF\_LR}(\theta; Z_1^K, U_0^{K-1}) = \\ &\qquad = \frac{Km}{2}\ln(2\pi) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K}\Big\{\ln[\det(\Sigma_{\nu,k}(\theta))] + \nu_k^\top(\theta)\Sigma_{\nu,k}^{-1}(\theta)\nu_k(\theta)\Big\}, \end{aligned} \tag{11}$$

где вектор невязки измерений $\nu_k(\theta)$ и его ковариационную матрицу

$$\Sigma_{\nu,k}(\theta) = E\big\{\nu_k(\theta)\nu_k^\top(\theta)\big\}$$

при заданных значениях параметра θ вычисляют по известным уравнениям фильтра Калмана [10].

Алгоритм 1 (Стандартный фильтр Калмана для модели (9)).

① Начальные данные.

Положить $\hat{c}_{0|0} = \bar{c}_0$ и $P_{0|0} = \Pi_0$, где $\bar{c}_0$ — начальное значение оценки вектора состояния, $\Pi_0 > 0$ — начальное значение ковариационной матрицы ошибки оценивания.

② Рекуррентно обновлять величины ($k \geqslant 0$):

I. Экстраполяция.

I.1. Вычислить матрицу ковариации ошибки оценки

$$P_{k+1} = FP_{k|k}F^\top.$$

I.2. Найти оценку вектора состояния $\hat{c}_{k+1} = F\hat{c}_{k|k} + Bu_k$.

II. Фильтрация.

II.1. Вычислить матрицу Калмана

$$K_{k+1} = P_{k+1} H^\top \Sigma_{\nu,k+1}^{-1}, \quad \text{где} \quad \Sigma_{\nu,k+1} = R + H P_{k+1} H^\top.$$

II.2. Найти оценку вектора состояния

$$\hat{c}_{k+1|k+1} = \hat{c}_{k+1} + K_{k+1}\nu_{k+1}, \quad \text{где} \quad \nu_{k+1} = z_{k+1} - H\hat{c}_{k+1}.$$

II.3. Вычислить матрицу ковариации ошибки оценки

$$P_{k+1|k+1} = P_{k+1} - K_{k+1} H P_{k+1}.$$

③ Конец.

Отметим, что решение задачи параметрической идентификации параметра $\theta = (v, \alpha)^\top$ для дискретной модели (6) методом максимального правдоподобия на основе стандартного фильтра Калмана получено в [13]. Решение задачи численной идентификации скорости конвекции в модели конвективно-диффузионного переноса с помощью метаэвристических алгоритмов рассмотрено в [11] также с применением стандартного алгоритма Калмана.

Как уже было отмечено ранее, основной целью данной работы является разработка нового метода параметрической идентификации модели конвективно-диффузионного переноса, обладающего улучшенными вычислительными свойствами. Хорошо известно, что стандартная реализация фильтра (алгоритм 1) является неустойчивой по отношению к ошибкам машинного округления (см., например, подробный анализ и обсуждение в [10]). Для повышения точности оценки вектора состояния вместо стандартного фильтра Калмана предпочтительнее использовать его численно устойчивые модификации [19].

4. Идентификация параметров дискретной модели с применением SVD-фильтра Калмана. В данной работе мы предлагаем новый подход к идентификации параметров дискретных моделей конвективно-диффузионного переноса на основе численно устойчивого SVD-фильтра Калмана.

Рассмотрим SVD-факторизацию [20, теорема 1.1.6]. Любую матрицу $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ ранга r можно представить в виде

$$A = \mathscr{W}\Sigma\mathscr{V}^*, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m\times n}, \quad S = \operatorname{diag}\{\sigma_1, \ldots, \sigma_r\},$$

где $\mathscr{W} \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $\mathscr{V} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ — унитарные матрицы, $\mathscr{V}^*$ — означает сопряженную и транспонированную к $\mathscr{V}$, $S \in \mathbb{R}^{r\times r}$ — вещественная неотрицательная диагональная матрица. Величины $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \ldots \geqslant \sigma_r > 0$ являются сингулярными значениями матрицы A. Заметим, что если $r = n$ и/или $r = m$, некоторые из нулевых подматриц в Σ отсутствуют.

Метод сингулярного разложения (или SVD-факторизация) известен как наиболее точный метод факторизации матриц, особенно для матриц, близких к вырожденным. Кроме того, сингулярное разложение существует для любой матрицы, чего нельзя сказать, например, о разложении Холецкого. Поэтому модификации фильтра Калмана на основе SVD-факторизации обладают такой же улучшенной численной устойчивостью к ошибкам машинного округления, что и все известные квадратно-корневые модификации [10, 19]. Кроме того, SVD-фильтры имеют дополнительные преимущества, такие как:

(1) все собственные значения матриц ковариации ошибок автоматически вычисляются на каждом шаге работы алгоритма фильтрации и могут использоваться для автоматического анализа и/или сокращения исходной модели;

(2) информационные матрицы (обратные к ковариационным) легко вычисляются путем инверсии диагональных факторов в SVD-разложении, что создает элегантный способ построения алгоритмов информационного типа и фильтров смешанного типа с автоматическим переключением с ковариационного режима фильтрации на информационный.

Насколько известно авторам данной статьи, впервые идею построения численно устойчивой модификации фильтра Калмана с применением сингулярного разложения предложили Ошман и Бар–Ицхак [21]. Авторы назвали свой вариант SVD-фильтра как V-Λ-фильтр. Для реализации алгоритма необходимо выполнить как SVD-разложение, так и разложение Холецкого, а также минимум три операции матричного обращения. Затем Ошманом была предложена информационная форма V-Λ-фильтра [22]. В [23] V-Λ-фильтр был применен для решения задачи параметрической идентификации линейной дискретной стохастической системы.

Позднее другие авторы предложили свои варианты SVD-фильтра, соответствующие стандартному фильтру Калмана [24] и расширенному фильтру Калмана [25]. Указанные модификации во многом схожи с V-Λ-фильтром. Ограничением их применения является требование положительной определенности матриц ковариации шумов в объекте и измерителе на каждой итерации работы алгоритма, поскольку в нем необходимо применять разложение Холецкого для вычисления квадратного корня ковариационной матрицы. Также необходимо выполнить минимум три матричных обращения.

С целью устранения указанных недостатков предыдущих версий SVD-фильтра в [26] авторами был предложен новый, улучшенный вариант SVD-фильтра Калмана. Его отличие от других известных нам вариантов в том, что данная модификация фильтра Калмана свободна от выполнения условий $Q_k \geqslant 0$ и $R_k > 0$, требуемых как в стандартном фильтре Калмана, так и во всех его квадратно-корневых модификациях [19]. Другим значимым преимуществом указанной модификации является наличие всего лишь одного обращения диагональной матрицы в уравнениях фильтра. Согласно [26], по результатам сравнительного анализа данный вариант SVD-фильтра показал наилучшие результаты в плане численной устойчивости к ошибкам машинного округления на примере решения плохообусловленных задач.

Следует также отметить, что SVD-фильтр подтвердил свою эффективность при решении задач параметрической идентификации [27], задачи оценки состояния и параметров полета летательного аппарата [25], задачи калмановской фильтрации показаний инерциального измерительного модуля (IMU) [28] и др.

Учитывая изложенное выше, в данной работе для построения процедуры параметрической идентификации мы выбрали улучшенный вариант SVD-фильтра [26].

Рассмотрим представление ковариационных матриц ошибок оценивания в виде $P_k = \Theta_{P_k} D_{P_k} \Theta_{P_k}^\top$, где Θ_{P_k} — ортогональная матрица и D_{P_k} — диагональная матрица, содержащая сингулярные значения матрицы P_k. Уравнения SVD-фильтра позволяют рекуррентно обновлять SVD-факторы $\{\Theta_{P_k}, D_{P_k}\}$

матрицы P_k с помощью сингулярного разложения (процедуры SVD-факторизации). Далее запишем уравнения SVD-фильтра с учетом модели (9).

Алгоритм 2 (SVD-фильтр для модели (9)).

① Начальные данные.

Выполнить SVD-разложение матриц $\Pi_0 = \Theta_{\Pi_0} D_{\Pi_0} \Theta_{\Pi_0}^\top$, $R = \Theta_R D_R \Theta_R^\top$.

Положить $\hat{c}_{0|0} = \bar{c}_0$, $\Theta_{P_{0|0}} = \Theta_{\Pi_0}$, $D_{P_{0|0}}^{1/2} = D_{\Pi_0}^{1/2}$.

② Рекуррентно обновлять величины ($k \geqslant 0$):

I. Экстраполяция.
I.1. Выполнить SVD-разложение матрицы

$$\left[D_{P_{k|k}}^{1/2} \Theta_{P_{k|k}}^\top F_k^\top \right] = \mathscr{W}_{TU} \left[D_{P_{k+1}}^{1/2} \right] \Theta_{P_{k+1}}^\top.$$

I.2. Получить SVD-факторы $\{\Theta_{P_{k+1}}, D_{P_{k+1}}\}$ матрицы P_{k+1}.
I.3. Найти оценку вектора состояния $\hat{c}_{k+1} = F\hat{c}_{k|k} + Bu_k$.

II. Фильтрация.
II.1. Выполнить SVD-разложение матрицы

$$\begin{bmatrix} D_R^{1/2} \Theta_R^\top \\ D_{P_{k+1}}^{1/2} \Theta_{P_{k+1}}^\top H^\top \end{bmatrix} = \mathscr{W}_{MU}^{(1)} \begin{bmatrix} D_{\Sigma_{\nu,k+1}}^{1/2} \\ 0 \end{bmatrix} \Theta_{\Sigma_{\nu,k+1}}^\top.$$

II.2. Найти

$$\bar{K}_{k+1} = P_{k+1} H^\top \Theta_{\Sigma_{\nu,k+1}}, \quad K_{k+1} = \bar{K}_{k+1} D_{\Sigma_{\nu,k+1}}^{-1} \Theta_{\Sigma_{\nu,k+1}}^\top.$$

II.3. Выполнить SVD-разложение матрицы

$$\begin{bmatrix} D_{P_{k+1}}^{1/2} \Theta_{P_{k+1}}^\top (I - K_{k+1} H)^\top \\ D_R^{1/2} \Theta_R^\top K_{k+1}^\top \end{bmatrix} = \mathscr{W}_{MU}^{(2)} \begin{bmatrix} D_{P_{k+1|k+1}}^{1/2} \\ 0 \end{bmatrix} \Theta_{P_{k+1|k+1}}^\top.$$

II.4. Получить SVD-факторы $\{\Theta_{P_{k+1|k+1}}, D_{P_{k+1|k+1}}\}$ матрицы $P_{k+1|k+1}$.

II.5. Найти оценку вектора состояния $\hat{c}_{k+1|k+1} = \hat{c}_{k+1} + \bar{K}_{k+1} D_{\Sigma_{\nu,k+1}}^{-1} \bar{\nu}_{k+1}$, где $\bar{\nu}_{k+1} = \Theta_{\Sigma_{\nu,k+1}}^\top (z_{k+1} - H\hat{c}_{k+1})$.

③ Конец.

Теперь для построения процедуры параметрической идентификации необходимо переписать выражение для вычисления логарифмической функции правдоподобия (11) в терминах SVD-фильтра. Учитывая, что

$$\det(\Sigma_{\nu,k}) = \det(D_{\Sigma_{\nu,k}}) \quad \text{и} \quad \nu_k^\top \Sigma_{\nu,k}^{-1} \nu_k = \bar{\nu}_k^\top D_{\Sigma_{\nu,k}}^{-1} \bar{\nu}_k,$$

запишем

$$\mathscr{J}_{SVD\_LR}(\theta; Z_1^K, U_0^{K-1}) = \\ = \frac{Km}{2} \ln(2\pi) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{K} \left\{ \ln[\det(D_{\Sigma_{\nu,k}})] + \bar{\nu}_k^\top D_{\Sigma_{\nu,k}}^{-1} \bar{\nu}_k \right\}, \quad (12)$$

где диагональная матрица $D_{\Sigma_{\nu,k}}$ и вектор $\bar{\nu}_k$ доступны на каждом шаге работы алгоритма 2.

5. Численный анализ эффективности предложенного подхода. Рассмотрим на численных примерах работоспособность и преимущества предложенного подхода. Пусть требуется идентифицировать параметры v и α следующей модели:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + v\frac{\partial c}{\partial x} = \alpha\frac{\partial^2 c}{\partial^2 x}, \tag{13}$$

$$c(x,0) = 0, \tag{14}$$

$$c(0,t) = 4t|\sin \pi t|, \tag{15}$$

$$c(1,t) = t, \tag{16}$$

или

$$\frac{\partial c(1,t)}{\partial x} = -[c(1,t) - t], \tag{17}$$

где $c(x,t)$ — концентрация вещества в одномерном потоке; $x \in [0;1]$; $t \in [0;2]$; начальное условие (14) соответствует концентрации вещества в начальный момент времени; граничное условие (15) — периодическому изменению концентрации вещества с возрастающей амплитудой на левом конце отрезка; граничное условие (16) — линейному возрастанию концентрации вещества на правом конце отрезка; граничное условие (17) — линейному возрастанию концентрации вещества в окружающей среде на правом конце отрезка.

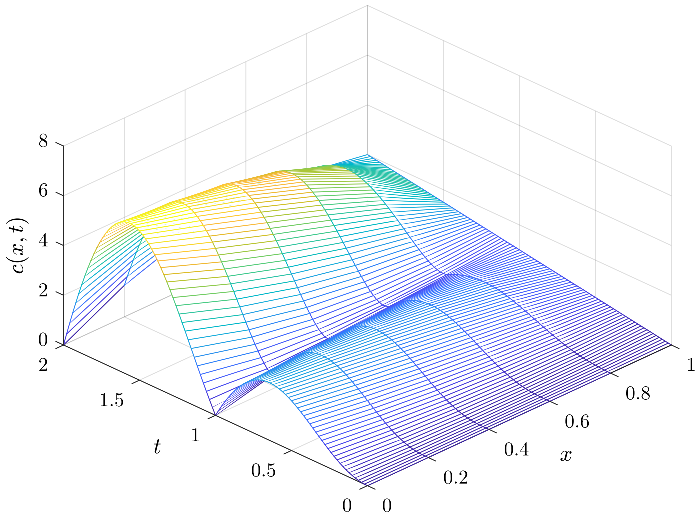
Пусть в уравнении (13) $v = 2$, $\alpha = 1$. Процесс идентификации будем моделировать в системе MATLAB при помощи специализированного программного комплекса авторской разработки. Зададим на отрезке $[0;1]$ пространственную сетку с 6 узлами по оси Ox ($\Delta x = 0.2$). Шаг по оси Ot выберем из условия устойчивости конечно-разностной схемы: $\Delta t \leqslant \frac{(\Delta x)^2}{2} = 0.02$, что соответствует $K = 101$. Получим решения рассматриваемой задачи методом конечных разностей для различных комбинаций граничных условий. На рис. 1 приведены графики соответствующих решений.

Рассмотрим процесс идентификации коэффициентов уравнения (13) по результатам зашумленных измерений в узлах пространственной сетки, соответствующих первой и последней компонентам вектора состояния. В этом случае для задачи с граничными условиями (15), (16) измеритель будет иметь вид

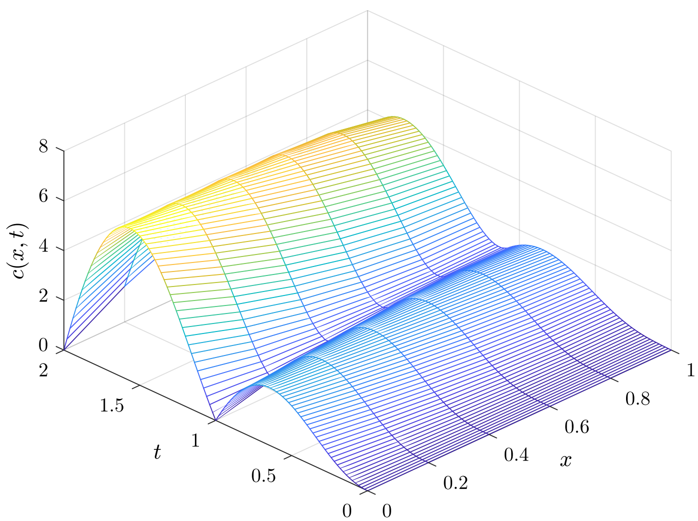
$$\begin{bmatrix} z_1^k \\ z_2^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1^k \\ c_2^k \\ c_3^k \\ c_4^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi_1^k \\ \xi_2^k \end{bmatrix}, \quad k = 1,2,\ldots,K,$$

а для задачи с граничными условиями (15), (17):

$$\begin{bmatrix} z_1^k \\ z_2^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1^k \\ c_2^k \\ c_3^k \\ c_4^k \\ c_5^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi_1^k \\ \xi_2^k \end{bmatrix}, \quad k = 1,2,\ldots,K.$$



a



b

Рис. 1. Графики решения задачи с граничными условиями (15), (16) (a) и (15), (17) (b)
[Figure 1. Plots of solutions of problem with boundary conditions (15), (16) (a) and (15), (17) (b)]

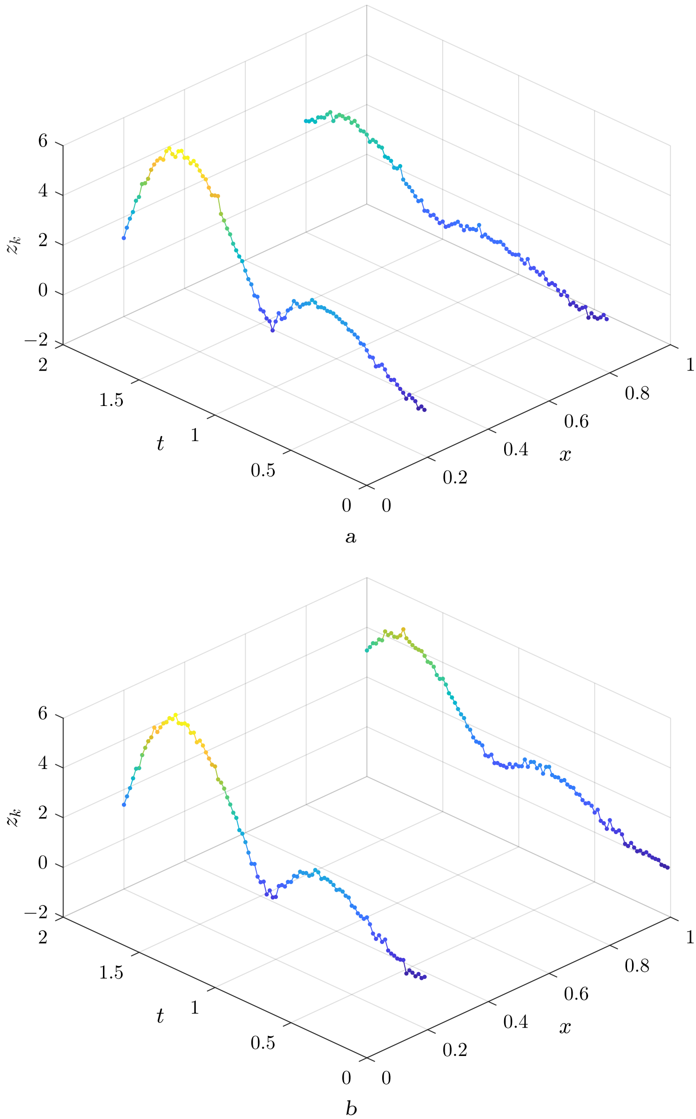


Рис. 2. Графики измерений для задачи с граничными условиями (15), (16) (a) и (15), (17) (b)
[Figure 2. Plots of measurements for problem with boundary conditions (15), (16) (a) and (15), (17) (b)]

Таблица 1

Средние значения параметров и ошибки идентификации для $R = R_0$ и граничных условий (15), (16) [Mean values and identification errors for $R = R_0$ and boundary conditions (15), (16)]

Algorithm	Mean values		RMSE		MAPE	
	v	α	v	α	v	α
CKF	1.9951	0.9962	$4.63 \cdot 10^{-2}$	$2.23 \cdot 10^{-2}$	1.8242	1.8325
SVD	1.9951	0.9962	$4.63 \cdot 10^{-2}$	$2.23 \cdot 10^{-2}$	1.8242	1.8325

Таблица 2

Средние значения параметров и ошибки идентификации для $R = R_0$ и граничных условий (15), (17) [Mean values and identification errors for $R = R_0$ and boundary conditions (15), (17)]

Algorithm	Mean values		RMSE		MAPE	
	v	α	v	α	v	α
CKF	1.9996	0.9984	$4.99 \cdot 10^{-2}$	$2.31 \cdot 10^{-2}$	1.9539	1.8660
SVD	1.9996	0.9984	$4.99 \cdot 10^{-2}$	$2.31 \cdot 10^{-2}$	1.9539	1.8660

Таблица 3

Средние значения параметров и ошибки идентификации для $R = R_1$ и граничных условий (15), (16) [Mean values and identification errors for $R = R_1$ and boundary conditions (15), (16)]

δ	Algorithm	Mean values		RMSE		MAPE	
		v	α	v	α	v	α
10^{-10}	CKF	2.0000	1.0000	$4.55 \cdot 10^{-6}$	$2.34 \cdot 10^{-6}$	$1.80 \cdot 10^{-4}$	$1.80 \cdot 10^{-4}$
	SVD	2.0000	1.0000	$4.55 \cdot 10^{-6}$	$2.34 \cdot 10^{-6}$	$1.80 \cdot 10^{-4}$	$1.85 \cdot 10^{-4}$
10^{-11}	CKF	2.0000	1.0000	$1.47 \cdot 10^{-6}$	$7.09 \cdot 10^{-7}$	$5.91 \cdot 10^{-5}$	$5.78 \cdot 10^{-5}$
	SVD	2.0000	1.0000	$1.47 \cdot 10^{-6}$	$7.10 \cdot 10^{-7}$	$5.91 \cdot 10^{-5}$	$5.78 \cdot 10^{-5}$
10^{-12}	CKF	2.0000	1.0000	$5.09 \cdot 10^{-7}$	$1.94 \cdot 10^{-7}$	$1.99 \cdot 10^{-5}$	$1.56 \cdot 10^{-5}$
	SVD	2.0000	1.0000	$5.09 \cdot 10^{-7}$	$1.94 \cdot 10^{-7}$	$1.99 \cdot 10^{-5}$	$1.55 \cdot 10^{-5}$
10^{-13}	CKF	2.0000	1.0000	$1.65 \cdot 10^{-7}$	$6.73 \cdot 10^{-8}$	$6.60 \cdot 10^{-6}$	$5.40 \cdot 10^{-6}$
	SVD	2.0000	1.0000	$1.65 \cdot 10^{-7}$	$6.74 \cdot 10^{-8}$	$6.60 \cdot 10^{-6}$	$5.40 \cdot 10^{-6}$
10^{-14}	CKF	2.0909	1.1295	$3.72 \cdot 10^{-1}$	$2.45 \cdot 10^{-1}$	13.3856	18.2959
	SVD	2.0000	1.0000	$4.95 \cdot 10^{-8}$	$2.44 \cdot 10^{-8}$	$2.00 \cdot 10^{-6}$	$1.97 \cdot 10^{-6}$
10^{-15}	CKF	2.4525	2.4007	$4.92 \cdot 10^{-1}$	1.4422	24.2181	141.0602
	SVD	2.0000	1.0000	$2.84 \cdot 10^{-8}$	$1.38 \cdot 10^{-8}$	$1.24 \cdot 10^{-6}$	$1.21 \cdot 10^{-6}$
10^{-16}	CKF	—	—	—	—	—	—
	SVD	2.0000	1.0000	$2.77 \cdot 10^{-8}$	$1.29 \cdot 10^{-8}$	$1.36 \cdot 10^{-6}$	$1.26 \cdot 10^{-6}$

Таблица 4

Средние значения параметров и ошибки идентификации для $R = R_2$ и граничных условий (15), (16) [Mean values and identification errors for $R = R_2$ and boundary conditions (15), (16)]

δ	Algorithm	Mean values		RMSE		MAPE	
		v	α	v	α	v	α
10^{-10}	CKF SVD	1.9998 1.9998	1.0002 1.0002	$8.53 \cdot 10^{-3}$ $8.53 \cdot 10^{-3}$	$3.97 \cdot 10^{-3}$ $3.97 \cdot 10^{-3}$	$3.45 \cdot 10^{-1}$ $3.45 \cdot 10^{-1}$	$3.09 \cdot 10^{-1}$ $3.09 \cdot 10^{-1}$
10^{-11}	CKF SVD	1.9996 1.9996	1.0003 1.0003	$8.72 \cdot 10^{-3}$ $8.72 \cdot 10^{-3}$	$3.81 \cdot 10^{-3}$ $3.81 \cdot 10^{-3}$	$3.44 \cdot 10^{-1}$ $3.44 \cdot 10^{-1}$	$2.98 \cdot 10^{-1}$ $2.98 \cdot 10^{-1}$
10^{-12}	CKF SVD	1.9998 1.9999	1.0003 1.0003	$9.17 \cdot 10^{-3}$ $9.17 \cdot 10^{-3}$	$3.58 \cdot 10^{-3}$ $3.58 \cdot 10^{-3}$	$3.70 \cdot 10^{-1}$ $3.70 \cdot 10^{-1}$	$2.91 \cdot 10^{-1}$ $2.91 \cdot 10^{-1}$
10^{-13}	CKF SVD	2.0008 2.0008	0.9999 0.9999	$9.03 \cdot 10^{-3}$ $9.04 \cdot 10^{-3}$	$3.80 \cdot 10^{-3}$ $3.80 \cdot 10^{-3}$	$3.58 \cdot 10^{-1}$ $3.58 \cdot 10^{-1}$	$3.06 \cdot 10^{-1}$ $3.07 \cdot 10^{-1}$
10^{-14}	CKF SVD	2.0011 1.9998	1.1824 1.0000	$3.80 \cdot 10^{-1}$ $8.23 \cdot 10^{-3}$	$3.53 \cdot 10^{-1}$ $3.70 \cdot 10^{-3}$	8.5127 $3.36 \cdot 10^{-1}$	18.6786 $2.96 \cdot 10^{-1}$
10^{-15}	CKF SVD	2.0556 1.9998	1.2045 1.0000	$6.08 \cdot 10^{-1}$ $8.67 \cdot 10^{-3}$	$3.75 \cdot 10^{-1}$ $3.25 \cdot 10^{-3}$	21.0730 $3.30 \cdot 10^{-1}$	23.0515 $2.64 \cdot 10^{-1}$
10^{-16}	CKF SVD	2.1827 2.0002	1.2980 1.0001	$7.79 \cdot 10^{-1}$ $9.15 \cdot 10^{-3}$	$6.69 \cdot 10^{-1}$ $3.57 \cdot 10^{-3}$	29.2086 $3.59 \cdot 10^{-1}$	41.3944 $2.79 \cdot 10^{-1}$

Таблица 5

Средние значения параметров и ошибки идентификации для $R = R_3$ и граничных условий (15), (16) [Mean values and identification errors for $R = R_3$ and boundary conditions (15), (16)]

δ	Algorithm	Mean values		RMSE		MAPE	
		v	α	v	α	v	α
10^{-10}	CKF SVD	2.0000 2.0000	1.0000 1.0000	$5.88 \cdot 10^{-6}$ $4.79 \cdot 10^{-6}$	$2.97 \cdot 10^{-6}$ $2.97 \cdot 10^{-6}$	$2.40 \cdot 10^{-4}$ $2.40 \cdot 10^{-4}$	$2.40 \cdot 10^{-4}$ $2.40 \cdot 10^{-4}$
10^{-11}	CKF SVD	2.0000 2.0000	1.0000 1.0000	$1.67 \cdot 10^{-6}$ $1.67 \cdot 10^{-6}$	$9.22 \cdot 10^{-7}$ $9.21 \cdot 10^{-7}$	$6.49 \cdot 10^{-5}$ $6.48 \cdot 10^{-5}$	$7.50 \cdot 10^{-5}$ $7.49 \cdot 10^{-5}$
10^{-12}	CKF SVD	2.0000 2.0000	1.0000 1.0000	$5.63 \cdot 10^{-7}$ $5.63 \cdot 10^{-7}$	$2.94 \cdot 10^{-7}$ $2.94 \cdot 10^{-7}$	$2.25 \cdot 10^{-5}$ $2.25 \cdot 10^{-5}$	$2.41 \cdot 10^{-5}$ $2.42 \cdot 10^{-5}$
10^{-13}	CKF SVD	2.0000 2.0000	1.0000 1.0000	$2.04 \cdot 10^{-7}$ $2.05 \cdot 10^{-7}$	$9.85 \cdot 10^{-8}$ $9.85 \cdot 10^{-8}$	$8.06 \cdot 10^{-6}$ $8.08 \cdot 10^{-6}$	$7.78 \cdot 10^{-6}$ $7.78 \cdot 10^{-6}$
10^{-14}	CKF SVD	2.4218 2.0000	2.3225 1.0000	$5.04 \cdot 10^{-1}$ $6.59 \cdot 10^{-8}$	1.3914 $3.38 \cdot 10^{-8}$	23.2788 $2.60 \cdot 10^{-6}$	132.5812 $2.56 \cdot 10^{-6}$
10^{-15}	CKF SVD	2.0530 2.0000	1.2871 1.0000	$6.02 \cdot 10^{-1}$ $4.32 \cdot 10^{-8}$	$3.99 \cdot 10^{-1}$ $2.13 \cdot 10^{-8}$	24.6737 $1.94 \cdot 10^{-6}$	30.9475 $1.93 \cdot 10^{-6}$
10^{-16}	CKF SVD	3.0785 2.0000	1.6264 1.0000	1.1877 $3.54 \cdot 10^{-8}$	0.6924 $1.79 \cdot 10^{-8}$	55.5319 $1.74 \cdot 10^{-6}$	63.5329 $1.76 \cdot 10^{-6}$

Таблица 6

Средние значения параметров и ошибки идентификации для $R = R_1$ и граничных условий (15), (17) [Mean values and identification errors for $R = R_1$ and boundary conditions (15), (17)]

δ	Algorithm	Mean values		RMSE		MAPE	
		v	α	v	α	v	α
10^{-10}	CKF SVD	2.0000 2.0000	1.0000 1.0000	$5.06 \cdot 10^{-6}$ $5.06 \cdot 10^{-6}$	$2.23 \cdot 10^{-6}$ $2.23 \cdot 10^{-6}$	$2.03 \cdot 10^{-4}$ $2.03 \cdot 10^{-4}$	$1.81 \cdot 10^{-4}$ $1.81 \cdot 10^{-4}$
10^{-11}	CKF SVD	2.0000 2.0000	1.0000 1.0000	$1.47 \cdot 10^{-6}$ $1.47 \cdot 10^{-6}$	$7.24 \cdot 10^{-7}$ $7.25 \cdot 10^{-7}$	$5.80 \cdot 10^{-5}$ $5.80 \cdot 10^{-5}$	$5.89 \cdot 10^{-5}$ $5.90 \cdot 10^{-5}$
10^{-12}	CKF SVD	2.2732 2.0000	1.8860 1.0000	$5.42 \cdot 10^{-1}$ $4.81 \cdot 10^{-7}$	1.1367 $2.51 \cdot 10^{-7}$	19.9823 $1.80 \cdot 10^{-5}$	88.8022 $1.97 \cdot 10^{-5}$
10^{-13}	CKF SVD	2.0295 2.0000	1.5567 1.0000	$4.69 \cdot 10^{-1}$ $1.54 \cdot 10^{-7}$	$8.75 \cdot 10^{-1}$ $7.30 \cdot 10^{-8}$	15.5471 $6.09 \cdot 10^{-6}$	56.4061 $5.92 \cdot 10^{-6}$
10^{-14}	CKF SVD	1.7208 2.0000	1.8216 1.0000	$9.00 \cdot 10^{-1}$ $5.17 \cdot 10^{-8}$	1.06342 $2.34 \cdot 10^{-8}$	36.9710 $2.06 \cdot 10^{-6}$	85.6284 $1.85 \cdot 10^{-6}$
10^{-15}	CKF SVD	— 2.0000	— 1.0000	— $1.86 \cdot 10^{-8}$	— $8.75 \cdot 10^{-9}$	— $7.55 \cdot 10^{-7}$	— $7.05 \cdot 10^{-7}$
10^{-16}	CKF SVD	— 2.0000	— 1.0000	— $1.02 \cdot 10^{-8}$	— $6.07 \cdot 10^{-9}$	— $4.54 \cdot 10^{-7}$	— $5.55 \cdot 10^{-7}$

Таблица 7

Средние значения параметров и ошибки идентификации для $R = R_2$ и граничных условий (15), (17) [Mean values and identification errors for $R = R_2$ and boundary conditions (15), (17)]

δ	Algorithm	Mean values		RMSE		MAPE	
		v	α	v	α	v	α
10^{-10}	CKF SVD	1.9998 1.9998	1.0000 1.0000	$1.12 \cdot 10^{-2}$ $1.12 \cdot 10^{-2}$	$6.20 \cdot 10^{-3}$ $6.20 \cdot 10^{-3}$	$4.48 \cdot 10^{-1}$ $4.48 \cdot 10^{-1}$	$5.00 \cdot 10^{-1}$ $5.00 \cdot 10^{-1}$
10^{-11}	CKF SVD	2.0011 2.0011	1.0004 1.0004	$1.20 \cdot 10^{-2}$ $1.20 \cdot 10^{-2}$	$6.30 \cdot 10^{-3}$ $6.30 \cdot 10^{-3}$	$4.82 \cdot 10^{-1}$ $4.82 \cdot 10^{-1}$	$5.02 \cdot 10^{-1}$ $5.02 \cdot 10^{-1}$
10^{-12}	CKF SVD	2.0867 2.0008	1.1835 1.0000	$4.46 \cdot 10^{-1}$ $1.18 \cdot 10^{-2}$	$4.78 \cdot 10^{-1}$ $5.00 \cdot 10^{-3}$	8.9741 $4.63 \cdot 10^{-1}$	19.0136 $4.60 \cdot 10^{-1}$
10^{-13}	CKF SVD	1.7084 2.0000	1.4499 1.0000	$8.48 \cdot 10^{-1}$ $1.14 \cdot 10^{-2}$	$6.67 \cdot 10^{-1}$ $6.37 \cdot 10^{-3}$	28.9005 $4.53 \cdot 10^{-1}$	45.2698 $5.07 \cdot 10^{-1}$
10^{-14}	CKF SVD	1.3955 1.9994	1.3397 1.0004	$8.62 \cdot 10^{-1}$ $1.19 \cdot 10^{-2}$	$5.20 \cdot 10^{-1}$ $6.03 \cdot 10^{-3}$	32.7939 $4.54 \cdot 10^{-1}$	34.9237 $4.66 \cdot 10^{-1}$
10^{-15}	CKF SVD	1.5160 1.9988	1.2420 1.0006	$8.89 \cdot 10^{-1}$ $1.12 \cdot 10^{-2}$	$4.28 \cdot 10^{-1}$ $6.11 \cdot 10^{-3}$	37.9516 $4.40 \cdot 10^{-1}$	30.0707 $4.85 \cdot 10^{-1}$
10^{-16}	CKF SVD	— 2.0004	— 1.0001	— $1.04 \cdot 10^{-2}$	— $6.32 \cdot 10^{-3}$	— $4.18 \cdot 10^{-1}$	— $5.09 \cdot 10^{-1}$

Таблица 8

Средние значения параметров и ошибки идентификации для $R = R_3$ и граничных условий (15), (17) [Mean values and identification errors for $R = R_3$ and boundary conditions (15), (17)]

δ	Algorithm	Mean values		RMSE		MAPE	
		v	α	v	α	v	α
10^{-10}	CKF SVD	2.0000 2.0000	1.0000 1.0000	$5.90 \cdot 10^{-6}$ $5.90 \cdot 10^{-6}$	$2.82 \cdot 10^{-6}$ $2.82 \cdot 10^{-6}$	$2.38 \cdot 10^{-4}$ $2.38 \cdot 10^{-4}$	$2.24 \cdot 10^{-4}$ $2.24 \cdot 10^{-4}$
10^{-11}	CKF SVD	2.0000 2.0000	1.0000 1.0000	$1.76 \cdot 10^{-6}$ $1.76 \cdot 10^{-6}$	$8.62 \cdot 10^{-7}$ $8.62 \cdot 10^{-7}$	$7.07 \cdot 10^{-5}$ $7.07 \cdot 10^{-5}$	$6.86 \cdot 10^{-5}$ $6.86 \cdot 10^{-5}$
10^{-12}	CKF SVD	2.2020 2.0000	1.7162 1.0000	$4.04 \cdot 10^{-1}$ $6.42 \cdot 10^{-7}$	1.0238 $2.59 \cdot 10^{-7}$	13.9583 $2.65 \cdot 10^{-5}$	71.8292 $2.05 \cdot 10^{-5}$
10^{-13}	CKF SVD	2.4736 2.0000	2.4251 1.0000	$4.86 \cdot 10^{-1}$ $1.64 \cdot 10^{-7}$	1.4618 $9.01 \cdot 10^{-8}$	23.6781 $6.53 \cdot 10^{-6}$	142.5113 $7.16 \cdot 10^{-6}$
10^{-14}	CKF SVD	1.9462 2.0000	2.2192 1.0000	$7.26 \cdot 10^{-1}$ $5.46 \cdot 10^{-8}$	1.3157 $2.38 \cdot 10^{-8}$	29.1861 $2.21 \cdot 10^{-6}$	121.9198 $1.91 \cdot 10^{-6}$
10^{-15}	CKF SVD	2.3016 2.0000	2.2533 1.0000	$6.05 \cdot 10^{-1}$ $1.88 \cdot 10^{-8}$	1.3677 $9.76 \cdot 10^{-9}$	27.1425 $7.56 \cdot 10^{-7}$	128.7952 $7.76 \cdot 10^{-7}$
10^{-16}	CKF SVD	— 2.0000	— 1.0000	— $1.12 \cdot 10^{-8}$	— $5.98 \cdot 10^{-9}$	— $4.86 \cdot 10^{-7}$	— $5.43 \cdot 10^{-7}$

Решение задачи получим при следующих вариантах матрицы ковариации шума R в измерителе:

$$R_0 = \begin{bmatrix} 10^{-2} & 0 \\ 0 & 10^{-2} \end{bmatrix}, \quad R_1 = \begin{bmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix}, \quad R_2 = \begin{bmatrix} \delta & 0 \\ 0 & 10^{-4} \end{bmatrix}, \quad R_3 = \begin{bmatrix} 10^{-4} & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix},$$

где $\delta = 10^{-10}, 10^{-11}, \ldots, 10^{-16}$. При уменьшении δ погрешность измерений соответствующего сенсора уменьшается, что соответствует случаю «почти точных» измерений, которые могут приводить к вырожденности и плохой обусловленности ковариационной матрицы ошибок оценивания в стандартном фильтре Калмана.

На рис. 2 приведены примеры графиков смоделированных измерений с матрицей ковариации шума $R = R_0$ для рассматриваемой задачи с различными комбинациями граничных условий.

В качестве критериев идентификации возьмем логарифмические функции правдоподобия (11) и (12).

В табл. 1–8 приведены результаты численных экспериментов по идентификации коэффициентов v и α для различных значений матрицы R и граничных условий. Минимизация критериев идентификации выполнялась в области $D(\theta) = \{\theta = (v, \alpha)^\top \mid v \in [0; 5], \alpha \in [0; 5]\}$ при помощи функции `fmincon` системы `MATLAB`. В качестве начальной точки для функции `fmincon` выбирался центр области D. Для каждого варианта матрицы R и каждого значения δ выполнялось усреднение найденных параметров и вычисление ошибок RMSE и MAPE по результатам 200 запусков.

Полученные данные численных экспериментов показывают, что сначала для обоих алгоритмов с увеличением точности измерений средние значения идентифицированных параметров v и α стремятся к истинным (2 и 1 соответственно), а ошибки RMSE и MAPE уменьшаются. Однако начиная со значения $\delta = 10^{-14}$ для граничных условий (15), (16) и $\delta = 10^{-13}$ для граничных условий (15), (17) ошибки процедуры идентификации на основе стандартного фильтра Калмана начинают быстро нарастать вплоть до аварийного завершения работы функции минимизации fmincon (прочерки в таблицах). Данный факт обусловлен расходимостью стандартного фильтра Калмана (резким ухудшением обусловленности ковариационной матрицы при увеличении точности измерений) и, как следствие, некорректным вычислением значений критерия идентификации (11). В то же время процедура идентификации на основе SVD-фильтра выполняется корректно для всех значений δ.

Таким образом, при использовании рекуррентных методов параметрической идентификации непосредственное влияние на качество идентификации могут оказывать вычислительные свойства алгоритма оптимальной дискретной фильтрации, на основе которого вычисляются значения критерия идентификации.

Заметим, что все вычисления в системе `MATLAB` по умолчанию проводятся с двойной точностью, однако на практике встречаются ситуации, когда вычисления необходимо проводить с одинарной точностью, например, во встраиваемых системах [28]. В этом случае использование SVD-фильтра, несмотря на больший объем вычислений, будет более предпочтительным.

Заключение. Рассмотрена задача математического моделирования процесса параметрической идентификации моделей конвективно-диффузионного переноса, описываемых уравнениями в частных производных с начальным и граничными условиями, с применением SVD-модификации фильтра Калмана. Рассматриваются одномерные модели с постоянными коэффициентами, граничными условиями первого рода или смешанными граничными условиями первого и третьего рода. Начальное и граничные условия предполагаются известными.

Метод решения задачи основан на переходе от исходной непрерывной модели с уравнением в частных производных к модели, описываемой линейной дискретной динамической системой в пространстве состояний, с известными входными воздействиями, двумя неизвестными параметрами, соответствующими скорости конвекции v и коэффициенту диффузии α, и с зашумленными измерениями, моделирующими экспериментальные данные.

В работе показано, что для выполнения условия полной наблюдаемости моделей достаточно, чтобы матрица измерений H состояла всего из двух строк, соответствующих наличию в модели измерителя двух сенсоров.

Основным результатом работы является новый рекуррентный метод параметрической идентификации моделей конвективно-диффузионного переноса, основанный на использовании метода максимального правдоподобия с построением критерия идентификации (функции правдоподобия) на основе величин, вычисляемых SVD-модификацией фильтра Калмана. Оптимизация критерия идентификации выполнена с помощью функции `fmincon` системы `MATLAB`.

С помощью компьютерного моделирования в системе `MATLAB` проведен сравнительный анализ численной эффективности алгоритма параметрической идентификации с применением стандартного фильтра Калмана и SVD-фильтра. Результаты численных экспериментов подтверждают работоспособность предложенного метода и его надежность в плане численной устойчивости к ошибкам машинного округления при решении задачи параметрической идентификации.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Ульяновской области в рамках научного проекта № 19–41–730009.

Библиографический список

1. Леонтьев А. И., Кожинов И. А., Исаев С. И. и др. *Теория тепломассообмена.* М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2018. 462 с.
2. Farlow S. J. *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers.* New York: Dover Publ., 1982. ix+414 pp.
3. Денисов А. М. *Введение в теорию обратных задач.* М.: МГУ, 1994. 208 с.
4. Мацевитый Ю. М., Мултановский А. В. Идентификация параметров теплообмена методом оптимальной динамической фильтрации // *Теплофизика высоких температур*, 1979. Т. 17, № 5. С. 1053–1060.
5. Карпов А. А., Тихонова Т. А. Восстановление нестационарных тепловых потоков по экспериментальным данным // *Матем. модел.*, 2000. Т. 12, № 5. С. 101–106.
6. Симбирский Г. Д., Лантрат В. К. Применение цифрового фильтра Калмана для параметрической идентификации высокотемпературного термопреобразователя // *Автомобиль и электроника. Современные технологии*, 2017. № 11. С. 68–75.
7. Пилипенко Н. В. *Применение фильтра Калмана в нестационарной теплометрии.* СПб.: Унив. ИТМО, 2017. 36 с.
8. Матвеев М. Г., Копытин А. В., Сирота Е. А. Комбинированный метод идентификации параметров распределенной динамической модели / *Информационные технологии и нанотехнологии (ИТНТ-2018): сборник трудов 4-й Международной конференции и молодежной школы.* Самара, 2018. С. 1651–1657.
9. Пилипенко Н. В., Заричняк Ю. П., Иванов В. А., Халявин А. М. Параметрическая идентификация дифференциально-разностных моделей теплопереноса в одномерных телах на основе алгоритмов фильтра Калмана // *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики*, 2020. Т. 20, № 4. С. 584–588. https://doi.org/10.17586/2226-1494-2020-20-4-584-588.
10. Grewal M. S., Andrews A. P. *Kalman Filtering. Theory and Practice with MATLAB.* Hoboken, NJ: John Wiley and Sons, 2015. xvii+617 pp. https://doi.org/10.1002/9781118984987.
11. Tsyganov A. V., Tsyganova Yu. V., Kuvshinova A. N., Tapia Garza H. R. Metaheuristic algorithms for identification of the convection velocity in the convection-diffusion transport model / *CEUR Workshop Proceedings.* vol. 2258, 2018. pp. 188–196. http://ceur-ws.org/Vol-2258/paper24.pdf.
12. Кувшинова А. Н. Динамическая идентификация смешанных граничных условий в модели конвективно-диффузионного переноса в условиях зашумленных измерений // *Журнал СВМО*, 2019. Т. 21, № 4. С. 469–479. https://doi.org/10.15507/2079-6900.21.201904.469-479.
13. Kuvshinova A. N., Tsyganov A. V., Tsyganova Yu. V., Tapia Garza H. R. Parameter identification algorithm for convection-diffusion transport model // *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2021. vol. 1745, 012110. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1745/1/012110.
14. Фомин В. Н. *Рекуррентное оценивание и адаптивная фильтрация.* М.: Наука, 1984. 288 с.

15. Maybeck P. S. *Stochastic Models, Estimation, and Control.* vol. 1 / Mathematics in Science and Engineering. vol. 141. New York, San Francisco, London: Academic Press, 1979. xix+423 pp.
16. Кувшинова А. Н. Анализ дискретной линейной стохастической модели конвективно-диффузионного переноса // *Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии*, 2019. № 1. С. 65–69.
17. Åström K. J. Maximum likelihood and prediction error methods // *Automatica*, 1980. vol. 16, no. 5. pp. 551–574. https://doi.org/10.1016/0005-1098(80)90078-3.
18. Васильев В. П. *Численные методы решения экстремальных задач.* М.: Мир, 1982. 520 с.
19. Цыганова Ю. В., Куликова М. В. О современных ортогонализованных алгоритмах оптимальной дискретной фильтрации // *Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование*, 2018. Т. 11, № 4. С. 5–30. https://doi.org/10.14529/mmp180401.
20. Björck Å. *Numerical Methods in Matrix Computations* / Texts in Applied Mathematics. vol. 59. Cham: Springer, 2015. xvi+800 pp. https://doi.org/10.1007/978-3-319-05089-8.
21. Oshman Y., Bar-Itzhack I. Y. Square root filtering via covariance and information eigenfactors // *Automatica*, 1986. vol. 22, no. 5. pp. 599–604. https://doi.org/10.1016/0005-1098(86)90070-1.
22. Oshman Y. Square root information filtering using the covariance spectral decomposition / *Proc. of the 27th Conf. on Decision and Control*, 1988. pp. 382–387. https://doi.org/10.1109/CDC.1988.194335.
23. Oshman Y. Maximum likelihood state and parameter estimation via derivatives of the V-Lambda filter // *J. Guid. Control Dyn.*, 1992. vol. 15, no. 3. pp. 717–726. https://doi.org/10.2514/3.20896.
24. Wang L., Libert G., Manneback P. Kalman filter algorithm based on singular value decomposition / *Proc. of the 31st Conf. on Decision and Control*, 1992. pp. 1224–1229. https://doi.org/10.1109/IECON.1992.254406.
25. Zhang Y., Dai G., Zhang H., Li Q. A SVD-based extended Kalman filter and applications to aircraft flight state and parameter estimation / *Proc. of 1994 American Control Conf.*, 1994. pp. 1809–1813. https://doi.org/10.1109/ACC.1994.752384.
26. Kulikova M. V., Tsyganova J. V. Improved discrete-time Kalman filtering within singular value decomposition // *IET Control Theory Appl.*, 2017. vol. 11, no. 15. pp. 2412–2418, arXiv: 1611.03686 [math.OC]. https://doi.org/10.1049/iet-cta.2016.1282.
27. Tsyganova J. V., Kulikova M. V. SVD-based Kalman filter derivative computation // *IEEE Trans. Autom. Control*, 2017. vol. 62, no. 9. pp. 4869–4875, arXiv: 1612.04777 [cs.SY]. https://doi.org/10.1109/TAC.2017.2694350.
28. Alessandrini M., Biagetti G., Crippa P., Falaschetti L., Manoni L., Turchetti C. Singular value decomposition in embedded systems based on ARM Cortex-M architecture // *Electronics*, 2021. vol. 10, no. 1, 34. https://doi.org/10.3390/electronics10010034.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 4, pp. 716–737
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1876

MSC: 93A30, 65C20

Mathematical modeling of parameter identification process of convection-diffusion transport models using the SVD-based Kalman filter

***A. N. Kuvshinova*[1], *A. V. Tsyganov*[1], *Yu. V. Tsyganova*[2]**

[1] Ilya Ulyanov State Pedagogical University,
4/5, Lenin Square, Ulyanovsk, 432071, Russian Federation.
[2] Ulyanovsk State University,
42, L. Tolstoy st., Ulyanovsk, 432017, Russian Federation.

Abstract

The paper addresses a problem of mathematical modeling of the process of identifying the coefficients of a partial differential equation in convection-diffusion transport models based on the results of noisy measurements of the function values. Identification process is performed using a new method belonging to the class of recurrent parameter identification methods based on optimal discrete Kalman-type filtering algorithms. One-dimensional models with constant coefficients, boundary conditions of first kind, or mixed boundary conditions of first and third kind are considered.

The proposed method is based on the transition from the initial continuous model with a partial differential equation to the model described by the state-space linear discrete-time dynamic system and the application of the maximum likelihood method to it with construction of an identification criterion (likelihood function) based on the values calculated by the SVD algorithm of the Kalman filtering. This filter is based on the singular value decomposition of error covariance matrix and works stably even in cases when it is close to singular. The SVD filter has proven itself well in solving various problems of discrete filtering and parameter identification. It has several advantages over the traditionally used conventional Kalman filter. The main of which is robustness against machine roundoff errors.

Research Article

Please cite this paper in press as:
Kuvshinova A. N., Tsyganov A. V., Tsyganova Yu. V. Mathematical modeling of parameter identification process of convection-diffusion transport models using the SVD-based Kalman filter, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 4, pp. 716–737. https://doi.org/10.14498/vsgtu1876 (In Russian).

Authors' Details:
Anastasia N. Kuvshinova https://orcid.org/0000-0002-3496-5981
Postgraduate Student; Dept. of Higher Mathematics; e-mail: kuvanulspu@yandex.ru

Andrey V. Tsyganov https://orcid.org/0000-0002-4173-5199
Cand. Phys. & Math. Sci; Professor; Dept. of Higher Mathematics;
e-mail: andrew.tsyganov@gmail.com

Yulia V. Tsyganova https://orcid.org/0000-0001-8812-6035
Dr. Phys. & Math. Sci.; Professor; Dept. of Information Technology;
e-mail: tsyganovajv@gmail.com

Computer modeling of parameter identification has been processed with the MATLAB system using a specialized software package. The results of numerical experiments confirm the efficiency of the proposed method and its advantages compared to the similar one based on the conventional Kalman filter.

Keywords: convection-diffusion transport model, parameter identification, Kalman filter, SVD filter.

Received: 3rd August, 2021 / Revised: 7th December, 2021 / Accepted: 21st December, 2021 / First online: 28th December, 2021

Competing interests. We have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely responsible for submit the final manuscript to print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. The reported study was funded by RFBR and Ulyanovsk region, project no. 19–41–730009.

References

1. Leont'ev A. I., Kozhinov I. A., Isaev S. I., et al. *Teoriia teplomassoobmena* [Theory of Heat and Mass Transfer]. Moscow, Bauman Moscow State Techn. Univ., 2018, 462 pp. (In Russian)
2. Farlow S. J. *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*. New York, Dover Publ., 1982, ix+414 pp.
3. Denisov A. M. *Vvedenie v teoriiu obratnykh zadach* [Introduction to the Theory of Inverse Problems]. Moscow, Moscow State Univ., 1994, 208 pp. (In Russian)
4. Matsevityi Yu. M., Multanovskii A. V. Identification of heat transfer parameters by the method of optimal dynamic filtering, *High Temperature*, 1979, vol. 17, no. 5, pp. 1053–1060 (In Russian).
5. Karpov A. A., Tikhonova T. A. Recovery of non-stationary heat flows from experimental data, *Matem. Mod.*, 2000, vol. 12, no. 5, pp. 101–106 (In Russian).
6. Simbirskiy G. D., Lantrat V. K. Application of the Kalman digital filter for parametric identification high-temperature thermocouple, *Autom. Electron. Modern Technology*, 2017, no. 11, pp. 68–75 (In Russian).
7. Pilipenko N. V. *Primenenie fil'tra Kalmana v nestatsionarnoi teplometrii* [Applying the Kalman Filter in Non-Stationary Heat Metering]. St. Petersburg, ITMO Univ., 2017, 36 pp. (In Russian)
8. Matveev M. G., Kopytin A. V., Sirota E. A. Combined method for identifying the parameters of a distributed dynamic model, In: *Proc. IV Int. Conf. (ITNT, 2018)*. Samara, 2018, pp. 1651–1657 (In Russian).
9. Pilipenko N. V., Zarichnyak Yu. P., Ivanov V. A., Khalyavin A. M. Parametric identification of differencial-difference models of heat transfer in one-dimensional bodies based on Kalman filter algorithms, *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2020, vol. 20, no. 4, pp. 584–588 (In Russian). https://doi.org/10.17586/2226-1494-2020-20-4-584-588.
10. Grewal M. S., Andrews A. P. *Kalman Filtering. Theory and Practice with MATLAB*. Hoboken, NJ, John Wiley and Sons, 2015, xvii+617 pp. https://doi.org/10.1002/9781118984987.
11. Tsyganov A. V., Tsyganova Yu. V., Kuvshinova A. N., Tapia Garza H. R. Metaheuristic algorithms for identification of the convection velocity in the convection-diffusion transport

model, In: *CEUR Workshop Proceedings*, vol. 2258, 2018, pp. 188–196. http://ceur-ws.org/Vol-2258/paper24.pdf.

12. Kuvshinova A. N. Dynamic identification of boundary conditions for convection-diffusion transport model in the case of noisy measurements, *Zhurnal SVMO*, 2019, vol. 21, no. 4, pp. 469–479 (In Russian). https://doi.org/10.15507/2079-6900.21.201904.469-479.
13. Kuvshinova A. N., Tsyganov A. V., Tsyganova Yu. V., Tapia Garza H. R. Parameter identification algorithm for convection-diffusion transport model, *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2021, vol. 1745, 012110. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1745/1/012110.
14. Fomin V. N. *Rekurrentnoe otsenivanie i adaptivnaia fil'tratsiia* [Recurrent Estimation and Adaptive Filtering]. Moscow, Nauka, 1984, 288 pp. (In Russian)
15. Maybeck P. S. *Stochastic Models, Estimation, and Control*, vol. 1, Mathematics in Science and Engineering, vol. 141. New York, San Francisco, London, Academic Press, 1979, xix+423 pp.
16. Kuvshinova A. N. Analysis of discrete linear stochastic model of convection-diffusion transport, *Uchenye Zapiski UlGU. Ser. Matem. Inform. Tekhn.*, 2019, no. 1, pp. 65–69 (In Russian).
17. Åström K. J. Maximum likelihood and prediction error methods, *Automatica*, 1980, vol. 16, no. 5, pp. 551–574. https://doi.org/10.1016/0005-1098(80)90078-3.
18. Vasil'ev V. P. *Chislennye metody resheniia ekstremal'nykh zadach* [Numerical Methods for Solving Extreme Problems]. Moscow, Mir, 1982, 520 pp. (In Russian)
19. Tsyganova Yu. V., Kulikova M. V. On modern array algorithms for optimal discrete filtering, *Vestn. YuUrGU. Ser. Mat. Model. Progr.*, 2018, vol. 11, no. 4, pp. 5–30 (In Russian). https://doi.org/10.14529/mmp180401.
20. Björck Å. *Numerical Methods in Matrix Computations*, Texts in Applied Mathematics, vol. 59. Cham, Springer, 2015, xvi+800 pp. https://doi.org/10.1007/978-3-319-05089-8.
21. Oshman Y., Bar-Itzhack I. Y. Square root filtering via covariance and information eigenfactors, *Automatica*, 1986, vol. 22, no. 5, pp. 599–604. https://doi.org/10.1016/0005-1098(86)90070-1.
22. Oshman Y. Square root information filtering using the covariance spectral decomposition, In: *Proc. of the 27th Conf. on Decision and Control*, 1988, pp. 382–387. https://doi.org/10.1109/CDC.1988.194335.
23. Oshman Y. Maximum likelihood state and parameter estimation via derivatives of the V-Lambda filter, *J. Guid. Control Dyn.*, 1992, vol. 15, no. 3, pp. 717–726. https://doi.org/10.2514/3.20896.
24. Wang L., Libert G., Manneback P. Kalman filter algorithm based on singular value decomposition, In: *Proc. of the 31st Conf. on Decision and Control*, 1992, pp. 1224–1229. https://doi.org/10.1109/IECON.1992.254406.
25. Zhang Y., Dai G., Zhang H., Li Q. A SVD-based extended Kalman filter and applications to aircraft flight state and parameter estimation, In: *Proc. of 1994 American Control Conf.*, 1994, pp. 1809–1813. https://doi.org/10.1109/ACC.1994.752384.
26. Kulikova M. V., Tsyganova J. V. Improved discrete-time Kalman filtering within singular value decomposition, *IET Control Theory Appl.*, 2017, vol. 11, no. 15, pp. 2412–2418, arXiv: 1611.03686 [math.OC]. https://doi.org/10.1049/iet-cta.2016.1282.
27. Tsyganova J. V., Kulikova M. V. SVD-based Kalman filter derivative computation, *IEEE Trans. Autom. Control*, 2017, vol. 62, no. 9, pp. 4869–4875, arXiv: 1612.04777 [cs.SY]. https://doi.org/10.1109/TAC.2017.2694350.
28. Alessandrini M., Biagetti G., Crippa P., Falaschetti L., Manoni L., Turchetti C. Singular value decomposition in embedded systems based on ARM Cortex-M architecture, *Electronics*, 2021, vol. 10, no. 1, 34. https://doi.org/10.3390/electronics10010034.