



УДК 539.3

## Моделирование одномерных механодиффузионных процессов в ортотропном сплошном цилиндре, находящемся под действием нестационарных объемных возмущений

Н. А. Зверев<sup>1</sup>, А. В. Земсков<sup>1,2</sup>, Д. В. Тарлаковский<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Россия, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, 4.

<sup>2</sup> Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Научно-исследовательский институт механики, Россия, 119192, Москва, Мичуринский проспект, 1.

### Аннотация

Рассматривается полярно-симметричная задача механодиффузии для ортотропного сплошного многокомпонентного однородного цилиндра, находящегося под действием равномерно распределенных радиальных нестационарных объемных возмущений. В качестве математической модели используется связанная система уравнений упругой диффузии в цилиндрической системе координат, которая учитывает релаксационные диффузионные эффекты, подразумевающие конечные скорости распространения диффузионных процессов.

Решение задачи получено в интегральной форме в виде сверток функций Грина с функциями, задающими объемные возмущения. Для нахождения функций влияния применяется интегральное преобразование Лапласа по времени и разложение искомого функций влияния в ряды Фурье по специальным функциям Бесселя. Обращение преобразования Лапласа осуществляется аналитически с помощью теории вычетов и таблиц операционного исчисления.

### Научная статья

© Коллектив авторов, 2022

© СамГТУ, 2022 (составление, дизайн, макет)

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

### Образец для цитирования

Зверев Н. А., Земсков А. В., Тарлаковский Д. В. Моделирование одномерных механодиффузионных процессов в ортотропном сплошном цилиндре, находящемся под действием нестационарных объемных возмущений // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 1. С. 62–78. EDN: FSTMLU. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1880>.

### Сведения об авторах

*Николай Андреевич Зверев*  <https://orcid.org/0000-0002-0813-2863>

аспирант; каф. сопротивления материалов, динамики и прочности машин;  
e-mail: [nik.zvereff2010@yandex.ru](mailto:nik.zvereff2010@yandex.ru)

*Андрей Владимирович Земсков*  <https://orcid.org/0000-0002-2653-6378>

доктор физико-математических наук, доцент; профессор; каф. прикладные программные средства и математические методы<sup>1</sup>; ведущий научный сотрудник; лаб. динамических испытаний<sup>2</sup>; e-mail: [azemskov1975@mail.ru](mailto:azemskov1975@mail.ru)

*Дмитрий Валентинович Тарлаковский*  <https://orcid.org/0000-0002-5694-9253>

доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой; каф. сопротивления материалов, динамики и прочности машин<sup>1</sup>; заведующий лабораторией; лаб. динамических испытаний<sup>2</sup>; e-mail: [tdv902@mai.ru](mailto:tdv902@mai.ru)

На примере трехкомпонентного материала, в котором две компоненты являлись независимыми, выполнено исследование взаимодействия механического и диффузионного полей в сплошном ортотропном цилиндре.

**Ключевые слова:** упругая диффузия, интегральное преобразование Лапласа, ряды Фурье, функции Грина, полярно-симметричные задачи, нестационарные задачи, функции Бесселя, сплошной цилиндр.

Получение: 26 августа 2021 г. / Исправление: 26 декабря 2021 г. /

Принятие: 17 января 2022 г. / Публикация онлайн: 31 марта 2022 г.

**Введение.** В работе исследуются явления, обусловленные взаимодействием нестационарных механических и диффузионных полей в сплошных средах. Исследования в этой области были начаты еще в начале 20-го века и носили преимущественно экспериментальный характер. Первые модели, описывающие связанные механодиффузионные процессы, появились уже во второй половине 20-го века. В настоящее время вопрос о взаимодействии полей различной физической природы по-прежнему остается актуальным. Рассматриваются модели, в которых описывается взаимодействие механических, диффузионных, тепловых и электромагнитных полей с учетом конечной скорости распространения диффузионных потоков [1–5].

В плане решения соответствующих начально-краевых задач наиболее полно изучены модели в прямоугольной декартовой системе координат. При решении нестационарных задач в различных криволинейных системах координат основной проблемой является нахождение системы собственных функций, являющихся решением соответствующей задачи Штурма—Лиувилля. Среди публикаций, посвященных данной проблеме, можно выделить [6–20]. В работах [6–15] рассматриваются одномерные задачи для сплошных и полых цилиндрических тел (а также для полостей в пространстве). Двумерным и осесимметричным задачам посвящены публикации [11, 16–20].

При решении указанных нестационарных и квазистационарных задач использовались как численные методы, основанные на применении методов конечных разностей [16] и конечных элементов [11], так и аналитические методы, основанные на интегральных преобразованиях Лапласа и Ганкеля [6–15, 17–20]. В последнем случае обращение преобразования Лапласа осуществлялось преимущественно методом Дурбина [8, 9, 13, 14] и его модификациями [17, 18], а также с помощью алгоритма Gaver–Stehfast [20] и представления в виде ортогональных полиномов Лежандра [10]. Во всех случаях вычисление интеграла Меллина основано на использовании специальных квадратурных формул. Не вдаваясь в обсуждение достоинств и недостатков данных подходов, отметим только, что такие алгоритмы подходят лишь для определенного класса функций. При этом изображения, получающиеся при решении конкретных задач, являются настолько громоздкими, что практически проверить возможность применения того или иного метода для нахождения их оригиналов не всегда представляется возможным.

Достаточно основательный анализ существующих на сегодняшний день методов обращения преобразования Лапласа дан в работе [21]. Выводы, полученные авторами, позволяют утверждать, что универсального алгоритма

обращения преобразования Лапласа не существует. Таким образом, вопросы, связанные с разработкой аналитических методов решения нестационарных задач, в частности задач механодиффузии, также являются актуальными.

В заключение отметим, что в известных на сегодняшний день публикациях рассматривались нестационарные задачи только для бинарных систем. Таким образом, постановка данной задачи является новой. Предложенный алгоритм позволяет получить решение задачи в явном виде, что также является отличительной особенностью данной работы.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается одномерный сплошной ортотропный  $(N + 1)$ -компонентный цилиндр, на который действуют радиальные нестационарные объемные возмущения. Дифференциальные уравнения, описывающие связанные механодиффузионные процессы с учетом релаксации диффузионных потоков, имеют следующий вид (здесь и далее точка обозначает производную по времени, штрих – производную по радиальной координате) [22–24]:

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= u'' + \frac{u'}{r} - \frac{u}{r^2} - \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} \eta'^{(j)} + F_1, & \eta^{(N+1)} &= -\sum_{j=1}^N \eta^{(j)}, \\ \dot{\eta}^{(q)} + \tau_q \ddot{\eta}^{(q)} &= -\Lambda_{11}^{(q)} \left( u''' + \frac{2u''}{r} - \frac{u'}{r^2} + \frac{u}{r^3} \right) + \\ &+ D_1^{(q)} \left( \eta''^{(q)} + \frac{\eta'^{(q)}}{r} \right) + F_{q+1}. \end{aligned} \quad (1)$$

Исходя из того, что изначально цилиндр находится в невозмущенном состоянии, начальные условия в задаче полагаются нулевыми. Краевые условия, выражающие постоянный уровень концентрации диффузантов и отсутствие механических нагрузок на поверхности цилиндра, записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} \left[ u' + \frac{u}{r} - \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} \eta^{(j)} \right]_{r=1} &= 0, & \eta^{(q)}|_{r=1} &= 0, \\ u = O(1), & \eta^{(q)} = O(1) & (r \rightarrow 0). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь последние два равенства задают естественное условие ограниченности искомых величин в рассматриваемой области, в частности, в окрестности точки  $r = 0$ . В дальнейшем изложении указанные порядковые равенства будут опущены ввиду отсутствия в явной необходимости их постоянного упоминания.

В формулах (1) и (2) все величины безразмерные. Со своими размерными аналогами они связаны с помощью следующих соотношений:

$$\begin{aligned} r &= \frac{r^*}{R_0}, & u &= \frac{u_r}{R_0}, & \tau &= \frac{Ct}{R_0}, & C^2 &= \frac{C_{1111}}{\rho}, & \tau_q &= \frac{C\tau^{(q)}}{R_0}, \\ C_{\alpha\beta} &= \frac{C_{\alpha\alpha\beta\beta}}{C_{1111}}, & C_{66} &= \frac{C_{1212}}{C_{1111}}, & \alpha_1^{(q)} &= \frac{\alpha_{11}^{(q)}}{C_{1111}}, & D_1^{(q)} &= \frac{D_{11}^{(q)}}{CR_0}, \\ \Lambda_{11}^{(q)} &= \frac{m^{(q)} \alpha_{11}^{(q)} D_{11}^{(q)} n_0^{(q)}}{\rho CR_0 RT_0}, & F_i &= \frac{\rho R_0 F_i^*}{C_{1111}}, & F_{q+1} &= \frac{R_0 F^{(q)}}{C}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $t$  — время;  $u_r$  — компонента вектора механических перемещений;  $r^*$  — радиальная координата;  $\eta^{(q)} = n^{(q)} - n_0^{(q)}$  — приращение концентрации вещества;  $n^{(q)}$  и  $n_0^{(q)}$  — начальная и текущая концентрации  $q$ -го вещества в составе  $(N+1)$ -компонентной сплошной среды;  $m^{(q)}$  — молярная масса  $q$ -го вещества в составе  $(N+1)$ -компонентной сплошной среды;  $C_{ijkl}$  — компоненты тензора упругих постоянных;  $\rho$  — плотность среды;  $\alpha_{ij}^{(q)}$  — компоненты тензора диффузионных постоянных, характеризующие деформации, возникающие вследствие диффузии;  $D_{ij}^{(q)}$  — компоненты тензора самодиффузии;  $R$  — универсальная газовая постоянная;  $T_0$  — температура сплошной среды;  $F_1^*$  — удельная плотность объемных сил;  $F^{(q)}$  — объемная плотность источников массопереноса;  $\tau^{(q)}$  — время релаксации диффузионных потоков;  $R_0$  — радиус цилиндра.

**2. Алгоритм решения.** Решение поставленной задачи ищется в интегральной форме [22–24]:

$$\begin{aligned} u(r, \tau) &= \sum_{m=1}^{N+1} \int_0^\tau \int_0^1 G_{1m}(r, \xi, t) F_m(\xi, \tau - t) dt d\xi, \\ \eta_q(r, \tau) &= \sum_{m=1}^{N+1} \int_0^\tau \int_0^1 G_{q+1,m}(r, \xi, t) F_m(\xi, \tau - t) dt d\xi, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $G_{km}(r, \xi, \tau)$ ,  $k, m = \overline{1, N+1}$ ,  $0 \leq \xi \leq 1$ , — объемные функции Грина рассматриваемой задачи, т.е. решения следующих начально-краевых задач:

$$\begin{aligned} \left( G''_{1m} + \frac{G'_{1m}}{r} - \frac{G_{1m}}{r^2} \right) - \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} G'_{j+1,m} + \delta_{1m} \delta(r - \xi) \delta(\tau) &= \ddot{G}_{1m}, \\ -\Lambda_{11}^{(q)} \left( G'''_{1m} + \frac{2G''_{1m}}{r} - \frac{G'_{1m}}{r^2} + \frac{G_{1m}}{r^3} \right) + D_1^{(q)} \left( G''_{q+1,m} + \frac{G'_{q+1,m}}{r} \right) + \\ + \delta_{q+1,m} \delta(r - \xi) \delta(\tau) &= \dot{G}_{q+1,m} + \tau_q \ddot{G}_{q+1,m}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \left[ G'_{1m} + \frac{G_{1m}}{r} - \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} G_{j+1,m} \right]_{r=1} &= 0, \quad G_{q+1,m}|_{r=1} = 0, \\ G_{1m}|_{\tau=0} = \dot{G}_{1m}|_{\tau=0} = G_{q+1,m}|_{\tau=0} &= \dot{G}_{q+1,m}|_{\tau=0} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Для нахождения функций Грина применяем к (5) и (6) преобразование Лапласа. Затем первое уравнение (5) домножаем на  $rJ_1(\lambda_n r)$ , а второе — на  $rJ_0(\lambda_n r)$  и интегрируем по  $r$  в промежутке  $[0, 1]$ . Получаем (верхний индекс « $L$ » обозначает трансформанту Лапласа,  $s$  — параметр преобразования Лапласа):

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left( G''_{1m} + \frac{G'_{1m}}{r} - \frac{G_{1m}}{r^2} \right) J_1(r\lambda_n) r dr - \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} \int_0^1 G'_{j+1,m} J_1(r\lambda_n) r dr + \\ + \delta_{1m} \int_0^1 \delta(r - \xi) J_1(r\lambda_n) r dr = s^2 \int_0^1 G^L_{1m} J_1(r\lambda_n) r dr, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\Lambda_{11}^{(q)} \int_0^1 \left( G'''_{1m} + \frac{2G''_{1m}}{r} - \frac{G'_{1m}}{r^2} + \frac{G_{1m}}{r^3} \right) J_0(r\lambda_n) r dr + \\
 & \quad + D_1^{(q)} \int_0^1 \left( G''_{q+1,m} + \frac{G'_{q+1,m}}{r} \right) J_0(r\lambda_n) r dr + \\
 & \quad + \delta_{q+1,m} \int_0^1 \delta(r-\xi) J_0(r\lambda_n) r dr = (s + \tau_q s^2) \int_0^1 G^L_{q+1,m} J_0(r\lambda_n) r dr.
 \end{aligned} \tag{7}$$

$$\left[ G^L_{1m} + \frac{G_{1m}}{r} - \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} G^L_{j+1,m} \right]_{r=1} = 0, \quad G^L_{q+1,m} \Big|_{r=1} = 0. \tag{8}$$

Здесь  $J_\nu(z)$  — функции Бесселя первого рода порядка  $\nu$ ;  $\lambda_n$  — корни уравнения  $J_0(\lambda_n) = 0$ . В работе [26] показано, что  $\lambda_n$  удовлетворяют также уравнению  $J_1(\lambda_n) + \lambda_n J'_1(\lambda_n) = 0$ .

Для вычисления интегралов в (7) используем формулы, полученные в работах [22–25]:

$$\int_0^1 G^L_{q+1,m}(r, \xi, s) J_1(r\lambda_n) r dr = -\lambda_n \frac{J_1^2(\lambda_n)}{2} G^{LH_0}_{q+1,m}(\lambda_n, \xi, s),$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \left[ G''_{q+1,m}(r, \xi, s) + \frac{G'_{q+1,m}(r, \xi, s)}{r} \right] J_0(r\lambda_n) r dr = \\
 = -\lambda_n^2 \frac{J_1^2(\lambda_n)}{2} G^{LH_0}_{q+1,m}(\lambda_n, \xi, s),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \left[ G'''_{1m}(r, \xi, s) + \frac{G''_{1m}(r, \xi, s)}{r} - \frac{G'_{1m}(r, \xi, s)}{r^2} \right] J_1(r\lambda_n) r dr = \\
 = -\lambda_n^2 \frac{J_1^2(\lambda_n)}{2} G^{LH_1}_{1m}(\lambda_n, \xi, s),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \left[ G'''_{1m}(r, \xi, s) + \frac{2G''_{1m}(r, \xi, s)}{r} - \frac{G'_{1m}(r, \xi, s)}{r^2} + \frac{G_{1m}(r, \xi, s)}{r^3} \right] J_0(r\lambda_n) r dr = \\
 = -\lambda_n^3 \frac{J_1^2(\lambda_n)}{2} G^{LH_1}_{1m}(\lambda_n, \xi, s).
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 G^L_{1m}(r, \xi, s) &= \sum_{n=1}^{\infty} G^{LH_1}_{1m}(\lambda_n, \xi, s) J_1(\lambda_n r), \\
 G^{LH_1}_{1m}(\lambda_n, \xi, s) &= \frac{2}{J_1^2(\lambda_n)} \int_0^1 r G^L_{1m}(r, \xi, s) J_1(\lambda_n r) dr, \\
 G^L_{q+1,m}(r, \xi, s) &= \sum_{n=1}^{\infty} G^{LH_0}_{q+1,m}(\lambda_n, \xi, s) J_0(\lambda_n r), \\
 G^{LH_0}_{q+1,m}(\lambda_n, \xi, s) &= \frac{2}{J_1^2(\lambda_n)} \int_0^1 r G^L_{q+1,m}(r, \xi, s) J_0(\lambda_n r) dr.
 \end{aligned} \tag{9}$$

С учетом этих равенств задача (7), (8) преобразуется к следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
 k_1(\lambda_n, s)G_{1m}^{LH_1}(\lambda_n, \xi, s) - \lambda_n \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} G_{j+1,m}^{LH_0}(\lambda_n, \xi, s) &= F_1(\lambda_n, \xi), \\
 \Lambda_{11}^{(q)} \lambda_n^3 G_{1m}^{LH_1}(\lambda_n, \xi, s) - k_{q+1}(\lambda_n, s) G_{q+1,m}^{LH_0}(\lambda_n, \xi, s) &= F_{q+1}(\lambda_n, \xi), \\
 F_1(\lambda_n, \xi) &= \frac{2\delta_{1m}}{J_1^2(\lambda_n)} J_1(\lambda_n \xi) \xi, \quad F_{q+1}(\lambda_n, \xi) = -\frac{2\delta_{q+1,m}}{J_1^2(\lambda_n)} J_0(\lambda_n \xi) \xi, \\
 k_1(\lambda_n, s) &= \lambda_n^2 + s^2, \quad k_{q+1}(\lambda_n, s) = D_1^{(q)} \lambda_n^2 + \tau_q s^2 + s,
 \end{aligned}$$

решение которой имеет вид

$$\begin{aligned}
 G_{11}^{LH_1}(\lambda_n, \xi, s) &= \frac{2\xi J_1(\lambda_n \xi) P_{11}(\lambda_n, s)}{J_1^2(\lambda_n) P(\lambda_n, s)}, \\
 G_{1,q+1}^{LH_1}(\lambda_n, \xi, s) &= \frac{2\xi J_0(\lambda_n \xi) P_{1,q+1}(\lambda_n, s)}{J_1^2(\lambda_n) P(\lambda_n, s)}, \\
 G_{q+1,1}^{LH_0}(\lambda_n, \xi, s) &= \frac{2\xi J_1(\lambda_n \xi) P_{q+1,1}(\lambda_n, s)}{J_1^2(\lambda_n) Q_q(\lambda_n, s)}, \\
 G_{q+1,p+1}^{LH_0}(\lambda_n, \xi, s) &= \frac{2\xi J_0(\lambda_n \xi)}{J_1^2(\lambda_n)} \left[ \frac{\delta_{qp}}{k_{q+1}(\lambda_n, s)} + \frac{P_{q+1,p+1}(\lambda_n, s)}{Q_q(\lambda_n, s)} \right].
 \end{aligned} \tag{10}$$

В формулах (10) приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 P(\lambda_n, s) &= k_1(\lambda_n, s) \Pi(\lambda_n, s) - \lambda_n^4 \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} \Lambda_{11}^{(j)} \Pi_j(\lambda_n, s), \\
 Q_q(\lambda_n, s) &= P(\lambda_n, s) k_{q+1}(\lambda_n, s), \quad P_{11}(\lambda_n, s) = \Pi(\lambda_n, s), \\
 P_{1,q+1}(\lambda_n, s) &= -\lambda_n \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} \Pi_j(\lambda_n, s), \quad P_{q+1,k}(\lambda_n, s) = \Lambda_{11}^{(q)} \lambda_n^3 P_{1k}(\lambda_n, s), \\
 \Pi_j(\lambda_n, s) &= \prod_{k=1, k \neq j}^N k_{k+1}(\lambda_n, s), \quad \Pi(\lambda_n, s) = \prod_{j=1}^N k_{j+1}(\lambda_n, s).
 \end{aligned} \tag{11}$$

Так как все функции в (10) и (11) являются рациональными функциями параметра  $s \in \mathbb{C}$ , то оригиналы функций влияния находятся аналитически с помощью теории вычетов и стандартных таблиц операционного исчисления (штрих означает производную по параметру  $s$ ) [22–24, 26]:

$$\begin{aligned}
 G_{11}^{H_1}(\lambda_n, \xi, \tau) &= \frac{2\xi J_1(\lambda_n \xi)}{J_1^2(\lambda_n)} \sum_{k=1}^{2N+2} A_{11}^{(k)}(\lambda_n, s_k) \exp(s_k \tau), \\
 G_{1,q+1}^{H_1}(\lambda_n, \xi, \tau) &= \frac{2\xi J_0(\lambda_n \xi)}{J_1^2(\lambda_n)} \sum_{k=1}^{2N+2} A_{1,q+1}^{(k)}(\lambda_n, s_k) \exp(s_k \tau),
 \end{aligned}$$

$$G_{q+1,p+1}^{H_0}(\lambda_n, \xi, \tau) = \frac{2\xi J_1(\lambda_n \xi)^{2N+4}}{J_1^2(\lambda_n)} \sum_{k=1}^{2N+4} A_{q+1,1}^{(k)}(\lambda_n, s_k) \exp(s_k \tau),$$

$$G_{q+1,p+1}^{H_0}(\lambda_n, \xi, \tau) = \frac{2\xi J_0(\lambda_n \xi)}{J_1^2(\lambda_n)} \left[ \sum_{l=1}^2 \frac{\delta_{qp} \exp(\chi_l \tau)}{k_{q+1}(\lambda_n, \chi_l)} + \sum_{k=1}^{2N+4} A_{q+1,p+1}^{(k)}(\lambda_n, s_k) \exp(s_k \tau) \right],$$

$$A_{1m}^{(k)}(\lambda_n, s_k) = \frac{P_{1m}(\lambda_n, s_k)}{P'(\lambda_n, s_k)}, \quad A_{q+1,m}^{(k)}(\lambda_n, s_k) = \frac{P_{q+1,m}(\lambda_n, s_k)}{Q'_q(\lambda_n, s_k)},$$

$$G_{1m}(r, \xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} G_{1m}^{H_1}(\lambda_n, \xi, \tau) J_1(\lambda_n r),$$

$$G_{q+1,m}(r, \xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} G_{q+1,m}^{H_0}(\lambda_n, \xi, \tau) J_0(\lambda_n r),$$

где  $s_k(\lambda_n)$  ( $k = 1, 2N+2$ ) — нули полинома  $P(\lambda_n, s)$ , а  $\chi_j(\lambda_n)$  — дополнительные нули полинома  $Q_q(\lambda_n, s)$ ,

$$\chi_1(\lambda_n) = s_{2N+3}(\lambda_n) = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4\tau_q D_1^{(q)} \lambda_n^2}}{2\tau_q},$$

$$\chi_2(\lambda_n) = s_{2N+4}(\lambda_n) = \frac{-1 - \sqrt{1 - 4\tau_q D_1^{(q)} \lambda_n^2}}{2\tau_q}.$$

Полагая  $\tau_q = 0$ , получаем классическую модель механо-диффузии с бесконечной скоростью распространения диффузионных потоков. При  $\tau_q \rightarrow 0$  степень многочлена  $P(\lambda_n, s)$  изменяется с  $2N+2$  до  $N+2$ , а для дополнительных нулей имеют место следующие предельные переходы:

$$\chi_1(\lambda_n) \rightarrow -D_1^{(q)} \lambda_n^2, \quad \chi_2(\lambda_n) \rightarrow -\infty \quad (\tau_q \rightarrow 0).$$

Тогда

$$\exp(\chi_1 \tau) \rightarrow \exp(-D_1^{(q)} \lambda_n^2 \tau), \quad \exp(\chi_2 \tau) \rightarrow 0 \quad (\tau_q \rightarrow 0).$$

Полагая далее  $\alpha_1^{(q)} = 0$ , переходим к классическим моделям упругости и массопереноса для сплошного цилиндра. Соответствующие им функции Грина будем обозначать через  $\tilde{G}_{11}(r, \xi, \tau)$ ,  $\tilde{G}_{q+1,p+1}(r, \xi, \tau)$  и представлять в виде следующих рядов:

$$\tilde{G}_{11}(r, \xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_{11}^{H_1}(\lambda_n, \xi, \tau) J_1(\lambda_n r),$$

$$\tilde{G}_{q+1,p+1}(r, \xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_{q+1,p+1}^{H_0}(\lambda_n, \xi, \tau) J_0(\lambda_n r).$$

Коэффициенты этих рядов находятся из равенств (9) путем предельного перехода при  $\alpha_1^{(q)} \rightarrow 0$ . Имеем (здесь учтено, что  $\Lambda_{11}^{(q)} \rightarrow 0$  при  $\alpha_1^{(q)} \rightarrow 0$ )

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha_1^{(j)} \rightarrow 0} P_{11}(\lambda_n, s) &= \Pi(\lambda_n, s), & \lim_{\alpha_1^{(j)} \rightarrow 0} P_{1,q+1}(\lambda_n, s) &= 0, \\ \lim_{\alpha_1^{(j)} \rightarrow 0} P_{q+1,k}(\lambda_n, s) &= 0, & \lim_{\alpha_1^{(j)} \rightarrow 0} P(\lambda_n, s) &= k_1(\lambda_n, s)\Pi(\lambda_n, s), \\ \lim_{\alpha_1^{(j)} \rightarrow 0} Q_q(\lambda_n, s) &= k_{q+1}(\lambda_n, s)k_1(\lambda_n, s)\Pi(\lambda_n, s). \end{aligned}$$

Тогда в пространстве преобразования Лапласа функции Грина для несвязанных задач упругости и диффузии запишутся так:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{11}^{LH_1}(\lambda_n, \xi, s) &= \frac{2\xi J_1(\lambda_n \xi)}{J_1^2(\lambda_n)k_1(\lambda_n, s)}, \\ \tilde{G}_{q+1,p+1}^{LH_0}(\lambda_n, \xi, s) &= \frac{2\xi J_0(\lambda_n \xi)\delta_{pq}}{J_1^2(\lambda_n)k_{q+1}(\lambda_n, s)}. \end{aligned}$$

Здесь переход в пространство оригиналов осуществляется непосредственно с помощью таблиц операционного исчисления [26]:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{11}^{H_1}(\lambda_n, \xi, \tau) &= \frac{2\xi J_1(\lambda_n \xi) \sin \lambda_n \tau}{J_1^2(\lambda_n)\lambda_n} H(\tau), \\ \tilde{G}_{q+1,p+1}^{H_0}(\lambda_n, \xi, \tau) &= \frac{2\xi J_0(\lambda_n \xi)\delta_{pq}}{J_1^2(\lambda_n)} \sum_{r=1}^2 \frac{\exp(s_r \tau)}{k'_{q+1}(\lambda_n, s_r)}. \end{aligned} \tag{12}$$

**3. Расчетный пример.** В качестве примера рассмотрим цилиндр радиуса 0.5 мм из трехкомпонентного сплава ( $N = 2$ , независимые компоненты [27] цинк 1.0 % и медь 4.5 % диффундируют в дюралюминии), физические характеристики которого после применения процедуры перехода к безразмерным величинам (3) следующие:

$$\begin{aligned} C_{12} &= 4.92 \cdot 10^{-1}, & C_{66} &= 2.54 \cdot 10^{-1}, \\ \alpha_1^{(1)} &= \alpha_2^{(1)} = 6.32 \cdot 10^{-4}, & \alpha_1^{(2)} &= \alpha_2^{(2)} = 5.92 \cdot 10^{-4}, \\ D_1^{(1)} &= D_2^{(1)} = 4.17 \cdot 10^{-13}, & D_1^{(2)} &= D_2^{(2)} = 4.60 \cdot 10^{-16}, \\ \Lambda_{11}^{(1)} &= \Lambda_{12}^{(1)} = \Lambda_{21}^{(1)} = \Lambda_{22}^{(1)} &= 1.13 \cdot 10^{-15}, \\ \Lambda_{11}^{(2)} &= \Lambda_{12}^{(2)} = \Lambda_{21}^{(2)} = \Lambda_{22}^{(2)} &= 5.18 \cdot 10^{-18}. \end{aligned}$$

Задаем объемные возмущения в следующем виде:

$$F_1(r, \tau) = rJ_1(\lambda_1 r)H(\tau), \quad F_{q+1}(r, \tau) = 0,$$

где  $H(\tau)$  — функция Хевисайда.

Тогда, вычисляя свертки (4), получаем

$$\begin{aligned}
 u(r, \tau) &= \int_0^\tau \int_0^1 G_{11}(r, \xi, t) F_1(\xi, \tau - t) dt d\xi = \\
 &= J_1(\lambda_1 r) \sum_{l=1}^{2N+2} A_{11}^{(l)}(\lambda_1) \frac{\exp(s_l \tau) - 1}{s_l}, \\
 \eta_q(r, \tau) &= \int_0^\tau \int_0^1 G_{q+1,1}(r, \xi, t) F_1(\xi, \tau - t) dt d\xi = \\
 &= J_0(\lambda_1 r) \sum_{l=1}^{2N+4} A_{q+1,1}^{(l)}(\lambda_1) \frac{\exp(s_l \tau) - 1}{s_l}.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Для вычисления рядов (13) использовалось  $N_\lambda = 100$  членов. Дальнейшее увеличение членов ряда не приводит к видимому изменению результатов.

Результаты вычислений по формулам (13) представлены на рис. 1–5. Здесь одна безразмерная единица времени соответствует  $1.24 \cdot 10^7$  сек.

Диффузионные поля, изображенные на рис. 2 и 3, инициируются механическими нагрузками, что демонстрирует влияние механического поля на кинетику массопереноса в сплошных средах. Компоненты сплава цинк и медь диффундируют с различной скоростью, величина которой определяется значением коэффициента диффузии. Для цинка по рис. 2 можно примерно оценить момент выхода диффузионного процесса на статический режим ( $\tau \approx 10^{13}$ , около 9.5 суток).

При этом видно, что механические воздействия очень незначительно влияют на массоперенос. Даже по истечении достаточно большого промежутка времени (9.5 суток для цинка и 95 суток для меди) приращения концентраций имеют порядок  $10^{-5}$ . Такой результат в общем и целом подтверждается результатами экспериментальных исследований, согласно которым упругие

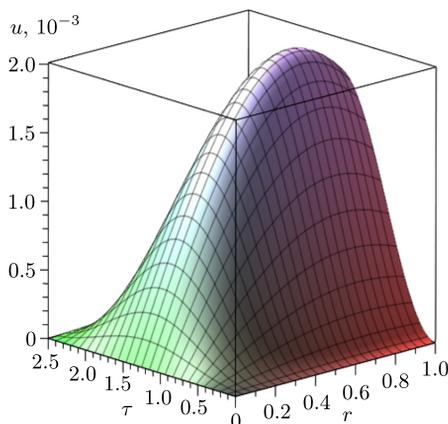


Рис. 1. Зависимость перемещения  $u$  от времени  $\tau$  и от координаты  $r$

[Figure 1. Dependence of the displacement  $u$  on the time  $\tau$  and on the coordinate  $r$ ]

деформации действительно слабо влияют на диффузионные процессы в твердых телах [28, 29].

Решение упругой задачи с учетом (12) будет иметь вид

$$u^{(el)}(r, \tau) = \int_0^\tau \int_0^1 \tilde{G}_{11}(r, \xi, t) F_1(\xi, \tau - t) dt d\xi = J_1(\lambda_1 r) \frac{1 - \cos(\lambda_1 \tau)}{\lambda_1^2}.$$

Сравнение решений упругой и упругодиффузионных задач показано на рис. 4. Показано, что начиная с некоторого момента времени ( $\tau \sim 10^9$ , при-

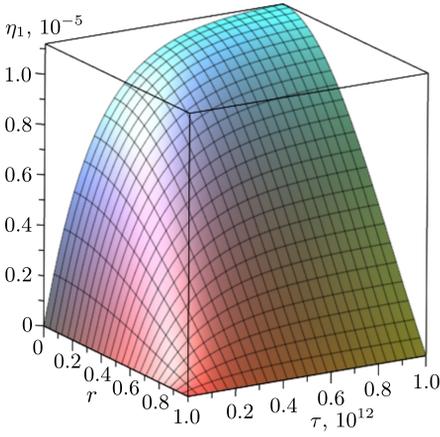


Рис. 2. Зависимость приращения концентрации  $\eta_1$  (цинк) от времени  $\tau$  и от координаты  $r$

[Figure 2. Dependence of the concentration increment  $\eta_1$  (Zinc) on the time  $\tau$  and on the coordinate  $r$ ]

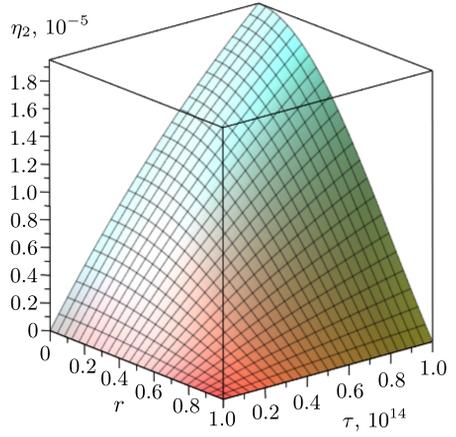


Рис. 3. Зависимость приращения концентрации  $\eta_2$  (медь) от времени  $\tau$  и от координаты  $r$

[Figure 3. Dependence of the concentration increment  $\eta_2$  (Copper) on the time  $\tau$  and on the coordinate  $r$ ]

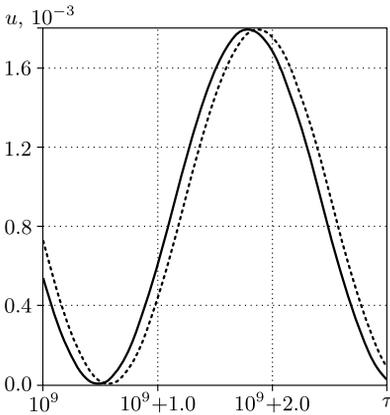
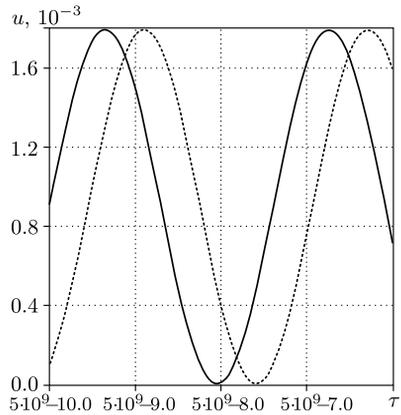


Рис. 4. Зависимость перемещения  $u$  от времени  $\tau$  при  $r = 1$ . Сплошная линия соответствует решению упругодиффузионной задачи, пунктирная — упругой

[Figure 4. Dependence of the displacement  $u$  on the time  $\tau$  for  $r = 1$ . The solid line corresponds to the solution of the elastic diffusion problem, the dotted line corresponds to the elastic problem]



мерно 80 сек) механические процессы с учетом влияния диффузии начинают сдвигаться относительно чисто упругих.

На рис. 5 на примере первого компонента вещества (цинк) показано влияние релаксации на кинетику массопереноса. Видно, что релаксационные эффекты существенно проявляются на ограниченном промежутке времени и с течением времени затухают.

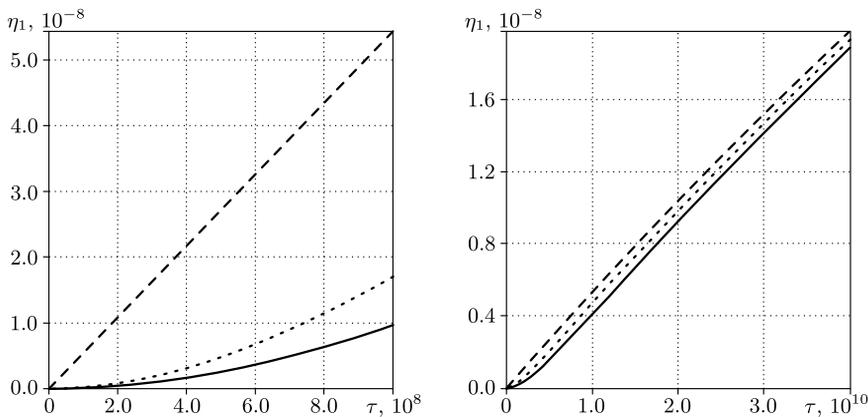


Рис. 5. Зависимость приращения концентрации  $\eta_1$  (цинк) от времени  $\tau$  при  $r = 0.1$ . Сплошная линия соответствует времени релаксации  $\tau^{(a)} = 200$  сек, пунктирная —  $\tau^{(a)} = 100$  сек, штриховая —  $\tau^{(a)} = 0$

Figure 5. Dependence of the concentration increment  $\eta_1$  (Zinc) on the time  $\tau$  for  $r = 1$ . The solid line corresponds to the relaxation time  $\tau^{(a)} = 200$  sec, the dotted line corresponds to  $\tau^{(a)} = 100$  sec, the dashed line corresponds to  $\tau^{(a)} = 0$

**Заключение.** Предложена модель, описывающая связанные нестационарные механо-диффузионные процессы в сплошных средах. Модель содержит линейаризованные уравнения движения сплошной среды и массопереноса. Связь между физическими полями учитывается с помощью обобщенного закона Гука и выражений для диффузионных потоков с учетом их конечной скорости распространения. Несмотря на то, что речь идет о диффузии в многокомпонентных твердых телах, данная модель может описывать также диффузию газов и жидкостей в твердых телах, так как все указанные процессы в линейном приближении описываются одинаковыми уравнениями и фактическое отличие этих явлений в данном случае определяется только величиной коэффициента диффузии.

Изложен алгоритм решения одномерной полярно-симметричной нестационарной задачи упругой диффузии для ортотропного сплошного многокомпонентного цилиндра с учетом релаксации диффузионных потоков. Найдены функции влияния, позволяющие определять поля механических перемещений и приращения концентраций компонент сплошной среды по заданным нестационарным объемным возмущениям. Важно отметить, что предложенный алгоритм, основанный, по сути, на использовании интегрального преобразования Лапласа и метода разделения переменных Фурье, позволяет получить решение рассматриваемой задачи в аналитической форме, что дает широкие возможности для проведения различного рода численных экспериментов. Результаты вычислений представлены в виде графиков зависимости искомых полей от времени в различных точках цилиндра.

На примере трехкомпонентного сплошного цилиндра, находящегося под действием нестационарных объемных сил, исследованы эффекты связанности механического и диффузионных полей, а также влияние релаксационных процессов на кинетику массопереноса. Показано, что, с одной стороны, нестационарные деформации инициируют процесс массопереноса. С другой стороны, диффузия влияет на поле перемещений, что проявляется в виде фазового сдвига механодиффузионных колебаний относительно чисто механических. Отмечено также, что релаксационные эффекты, обуславливающие конечную скорость распространения диффузионных возмущений, проявляются только на конечном промежутке времени, соизмеримом с временем релаксации диффузионных потоков.

Результаты выполненных расчетов на качественном уровне совпадают с результатами экспериментальных исследований, которые, с одной стороны, подтверждают эффекты взаимной связанности механического и диффузионного полей, а с другой стороны, показывают, что эта взаимосвязь существенно проявляется в основном при пластических деформациях и совсем незначительно — при упругих. Поэтому полученные в работе результаты можно рассматривать как начальный этап моделирования механодиффузионных процессов в сплошных средах.

**Конкурирующие интересы.** Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

**Авторский вклад и ответственность.** Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

**Финансирование.** Исследование выполнялось без финансирования.

## Библиографический список

1. Aouadi M. Variable electrical and thermal conductivity in the theory of generalized thermoelastic diffusion // *ZAMP*, 2005. vol. 57, no. 2. pp. 350–366. <https://doi.org/10.1007/s00033-005-0034-5>.
2. Bachher M., Sarkar N. Fractional order magneto-thermoelasticity in a rotating media with one relaxation time // *Math. Models Eng.*, 2016. vol. 2, no. 1. pp. 57–68. <https://www.extrica.com/article/17103>.
3. Deswal S., Kalkal K. A two-dimensional generalized electro-magneto-thermoviscoelastic problem for a half-space with diffusion // *Int. J. Thermal Sci.*, 2011. vol. 50, no. 5. pp. 749–759. <https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2010.11.016>.
4. Kumar R., Chawla V. Fundamental solution for two-dimensional problem in orthotropic piezothermoelastic diffusion media // *Mater. Phys. Mech.*, 2013. vol. 16, no. 2. pp. 159–174. <https://mpm.spbstu.ru/en/article/2013.27.7/>.
5. Zhang J., Li Y. A two-dimensional generalized electromagneto-thermoelastic diffusion problem for a rotating half-space // *Math. Probl. Eng.*, 2014. vol. 2014. pp. 1–12. <https://doi.org/10.1155/2014/964218>.
6. Abbas A. I. The effect of thermal source with mass diffusion in a transversely isotropic thermoelastic infinite medium // *J. Meas. Eng.*, 2014. vol. 2, no. 4. pp. 175–184. <https://www.extrica.com/article/15667>.
7. Abbas A. I. Eigenvalue approach on fractional order theory of thermoelastic diffusion problem for an infinite elastic medium with a spherical cavity // *Appl. Math. Model.*, 2015. vol. 39, no. 20. pp. 6196–6206. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2015.01.065>.

8. Aouadi M. A generalized thermoelastic diffusion problem for an infinitely long solid cylinder // *Int. J. Math. Math. Sci.*, 2006. vol. 2006. pp. 1–15. <https://doi.org/10.1155/IJMMS/2006/25976>.
9. Aouadi M. A problem for an infinite elastic body with a spherical cavity in the theory of generalized thermoelastic diffusion // *Int. J. Solids Struct.*, 2007. vol. 44, no. 17. pp. 5711–5722. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2007.01.019>.
10. Bhattacharya D., Kanoria M. The influence of two-temperature fractional order generalized thermoelastic diffusion inside a spherical shell // *IJAIEEM*, 2014. vol. 3, no. 8. pp. 096–108.
11. Xia R. H., Tian X. G., Shen Y. P. The influence of diffusion on generalized thermoelastic problems of infinite body with a cylindrical cavity // *Int. J. Eng. Sci.*, 2009. vol. 47, no. 5–6. pp. 669–679. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2009.01.003>.
12. Bhattacharya D., Pal P., Kanoria M. Finite element method to study elasto-thermodiffusive response inside a hollow cylinder with three-phase-lag effect // *Int. J. Comp. Sci. Eng.*, 2019. vol. 7, no. 1. pp. 148–156. <https://doi.org/10.26438/ijcse/v7i1.148156>.
13. Elhagary M. A. Generalized thermoelastic diffusion problem for an infinitely long hollow cylinder for short times // *Acta Mech.*, 2011. vol. 218, no. 3–4. pp. 205–215. <https://doi.org/10.1007/s00707-010-0415-5>.
14. Elhagary M. A. Generalized thermoelastic diffusion problem for an infinite medium with a spherical cavity // *Int. J. Thermophys.*, 2012. vol. 33, no. 1. pp. 172–183. <https://doi.org/10.1007/s10765-011-1138-0>.
15. Shvets R. M. On the deformability of anisotropic viscoelastic bodies in the presence of thermodiffusion // *J. Math. Sci.*, 1999. vol. 97, no. 1. pp. 3830–3839. <https://doi.org/10.1007/bf02364922>.
16. Минов А. В. Исследование напряженно-деформированного состояния полого цилиндра, подверженного термодиффузионному воздействию углерода в осесимметричном тепловом поле, переменном по длине // *Изв. вузов. Машиностроение*, 2008. № 10. С. 21–26.
17. Deswal S., Kalkal K. K., Sheoran S. S. Axi-symmetric generalized thermoelastic diffusion problem with two-temperature and initial stress under fractional order heat conduction // *Phys. B – Condensed Matter.*, 2016. vol. 496. pp. 57–68. <https://doi.org/10.1016/j.physb.2016.05.008>.
18. Kumar R., Devi S. Deformation of modified couple stress thermoelastic diffusion in a thick circular plate due to heat sources // *CMST*, 2019. vol. 25, no. 4. pp. 167–176. <https://doi.org/10.12921/cmst.2018.0000034>.
19. Olesiak Z. S., Pyryev Yu. A. A coupled quasi-stationary problem of thermodiffusion for an elastic cylinder // *Int. J. Eng. Sci.*, 1995. vol. 33, no. 6. pp. 773–780. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(94\)00099-6](https://doi.org/10.1016/0020-7225(94)00099-6).
20. Tripathi J. J., Kedar G. D., Deshmukh K. C. Generalized thermoelastic diffusion in a thick circular plate including heat source // *Alexandria Eng. J.*, 2016. vol. 55, no. 3. pp. 2241–2249. <https://doi.org/10.1016/j.aej.2016.06.003>.
21. Порошина Н. И., Рябов В. М. О методах обращения преобразования Лапласа // *Вестник СПбГУ. Сер. 1*, 2011. № 3. С. 55–64.
22. Zemskov A. V., Tarlakovskii D. V. Polar-symmetric problem of elastic diffusion for isotropic multi-component plane // *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2016. vol. 158, 012101. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/158/1/012101>.
23. Земсков А. В., Тарлаковский Д. В. Полярно-симметричная задача упругой диффузии для многокомпонентной среды // *Проблемы прочности и пластичности*, 2018. Т. 80, № 1. С. 5–14. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2018-80-1-5-14>.
24. Зверев Н. А., Земсков А. В., Тарлаковский Д. В. Моделирование нестационарных связанных механодиффузионных процессов в изотропном сплошном цилиндре // *Проблемы прочности и пластичности*, 2020. Т. 82, № 2. С. 156–167. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-2-156-167>.

25. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. *Основные дифференциальные уравнения математической физики*. М.: Наука, 1962. 768 с.
26. Диткин В. А., Прудников А. П. *Справочник по операционному исчислению*. М.: Высш. шк., 1965. 568 с.
27. Бабичев А. П., Бабушкина Н. А., Братковский А. М. и др. *Физические величины: Справочник*. М.: Энергоатомиздат, 1991. 1232 с.
28. Nachtrieb N. H., Handler G. S. A relaxed vacancy model for diffusion in crystalline metals // *Acta Metal.*, 1954. vol. 2, no. 6. pp. 797–802. [https://doi.org/10.1016/0001-6160\(54\)90031-0](https://doi.org/10.1016/0001-6160(54)90031-0).
29. Petit J., Nachtrieb N. H. Self-diffusion in liquid gallium // *J. Chem. Phys.*, 1956. vol. 24, no. 5. pp. 1027–1028. <https://doi.org/10.1063/1.1742671>.

MSC: 74B05, 74N99

## Modelling one-dimensional elastic diffusion processes in an orthotropic solid cylinder under unsteady volumetric perturbations

N. A. Zverev<sup>1</sup>, A. V. Zemskov<sup>1,2</sup>, D. V. Tarlakovskii<sup>1,2</sup><sup>1</sup> Moscow Aviation Institute (National Research University),  
4, Volokolamskoe shosse, Moscow, 125993, Russian Federation.<sup>2</sup> Lomonosov Moscow State University, Institute of Mechanics,  
1, Michurinsky prospekt, Moscow, 119192, Russian Federation.

### Abstract

A polar-symmetric elastic diffusion problem is considered for an orthotropic multicomponent homogeneous cylinder under uniformly distributed radial unsteady volumetric perturbations. Coupled elastic diffusion equations in a cylindrical coordinate system is used as a mathematical model. The model takes into account a relaxation of diffusion effects implying finite propagation speed of diffusion perturbations.

The solution of the problem is obtained in the integral convolution form of Green's functions with functions specifying volumetric perturbations. The integral Laplace transform in time and the expansion into the Fourier series by the special Bessel functions are used to find the Green's functions. The theory of residues and tables of operational calculus are used for inverse Laplace transform.

A calculus example based on a three-component material, in which two components are independent, is considered. The study of the mechanical and diffusion fields interaction in a solid orthotropic cylinder is carried out.

---

### Research Article

© Authors, 2022

© Samara State Technical University, 2022 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

#### Please cite this paper in press as:

Zverev N. V., Zemskov A. V., Tarlakovskii D. V. Modelling one-dimensional elastic diffusion processes in an orthotropic solid cylinder under unsteady volumetric perturbations, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 1, pp. 62–78. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1880> (In Russian).

#### Authors' Details:

**Nikolay A. Zverev**  <https://orcid.org/0000-0002-0813-2863>Postgraduate Student; Dept. of Strength of Materials, Dynamics and Strength of Machines;  
e-mail: [nik.zvereff2010@yandex.ru](mailto:nik.zvereff2010@yandex.ru)**Andrei V. Zemskov**  <https://orcid.org/0000-0002-2653-6378>Dr. Phys. & Math. Sci., Associate Professor; Professor; Dept. of Applied Software and Mathematical Methods<sup>1</sup>; Leading Researcher; Lab. of Dynamic Testing<sup>2</sup>;e-mail: [azemskov1975@mail.ru](mailto:azemskov1975@mail.ru)**Dmitrii V. Tarlakovskii**  <https://orcid.org/0000-0002-5694-9253>Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Head of Dept.; Dept. of Strength of Materials, Dynamics and Strength of Machines<sup>1</sup>; Head of Lab.; Lab. of Dynamic Testing<sup>2</sup>; e-mail: [tdv902@mai.ru](mailto:tdv902@mai.ru)

**Keywords:** elastic diffusion, Laplace transform, Fourier series, Green's functions, polar symmetric problems, unsteady problems, Bessel functions, cylinder.

Received: 26<sup>th</sup> August, 2021 / Revised: 26<sup>th</sup> December, 2021 /  
Accepted: 17<sup>th</sup> January, 2022 / First online: 31<sup>st</sup> March, 2022

---

**Competing interests.** We declare that we have no competing interests.

**Author's Responsibilities.** Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. We take full responsibility for submit the final manuscript to print. We approved the final version of the manuscript.

**Funding.** Not applicable.

## References

1. Aouadi M. Variable electrical and thermal conductivity in the theory of generalized thermoelastic diffusion, *ZAMP*, 2005, vol. 57, no. 2, pp. 350–366. <https://doi.org/10.1007/s00033-005-0034-5>.
2. Bachher M., Sarkar N. Fractional order magneto-thermoelasticity in a rotating media with one relaxation time, *Math. Models Eng.*, 2016, vol. 2, no. 1, pp. 57–68. <https://www.extrica.com/article/17103>.
3. Deswal S., Kalkal K. A two-dimensional generalized electro-magneto-thermoviscoelastic problem for a half-space with diffusion, *Int. J. Thermal Sci.*, 2011, vol. 50, no. 5, pp. 749–759. <https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2010.11.016>.
4. Kumar R., Chawla V. Fundamental solution for two-dimensional problem in orthotropic piezothermoelastic diffusion media, *Mater. Phys. Mech.*, 2013, vol. 16, no. 2, pp. 159–174. <https://mpm.spbstu.ru/en/article/2013.27.7/>.
5. Zhang J., Li Y. A two-dimensional generalized electromagnetothermoelastic diffusion problem for a rotating half-space, *Math. Probl. Eng.*, 2014, vol. 2014, pp. 1–12. <https://doi.org/10.1155/2014/964218>.
6. Abbas A. I. The effect of thermal source with mass diffusion in a transversely isotropic thermoelastic infinite medium, *J. Meas. Eng.*, 2014, vol. 2, no. 4, pp. 175–184. <https://www.extrica.com/article/15667>.
7. Abbas A. I. Eigenvalue approach on fractional order theory of thermoelastic diffusion problem for an infinite elastic medium with a spherical cavity, *Appl. Math. Model.*, 2015, vol. 39, no. 20, pp. 6196–6206. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2015.01.065>.
8. Aouadi M. A generalized thermoelastic diffusion problem for an infinitely long solid cylinder, *Int. J. Math. Math. Sci.*, 2006, vol. 2006, pp. 1–15. <https://doi.org/10.1155/IJMMS/2006/25976>.
9. Aouadi M. A problem for an infinite elastic body with a spherical cavity in the theory of generalized thermoelastic diffusion, *Int. J. Solids Struct.*, 2007, vol. 44, no. 17, pp. 5711–5722. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2007.01.019>.
10. Bhattacharya D., Kanoria M. The influence of two-temperature fractional order generalized thermoelastic diffusion inside a spherical shell, *IJAEM*, 2014, vol. 3, no. 8, pp. 096–108.
11. Xia R. H., Tian X. G., Shen Y. P. The influence of diffusion on generalized thermoelastic problems of infinite body with a cylindrical cavity, *Int. J. Eng. Sci.*, 2009, vol. 47, no. 5–6, pp. 669–679. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2009.01.003>.
12. Bhattacharya D., Pal P., Kanoria M. Finite element method to study elasto-thermodiffusive response inside a hollow cylinder with three-phase-lag effect, *Int. J. Comp. Sci. Eng.*, 2019, vol. 7, no. 1, pp. 148–156. <https://doi.org/10.26438/ijcse/v7i1.148156>.
13. Elhagary M. A. Generalized thermoelastic diffusion problem for an infinitely long hollow cylinder for short times, *Acta Mech.*, 2011, vol. 218, no. 3–4, pp. 205–215. <https://doi.org/10.1007/s00707-010-0415-5>.

14. Elhagary M. A. Generalized thermoelastic diffusion problem for an infinite medium with a spherical cavity, *Int. J. Thermophys.*, 2012, vol. 33, no. 1, pp. 172–183. <https://doi.org/10.1007/s10765-011-1138-0>.
15. Shvets R. M. On the deformability of anisotropic viscoelastic bodies in the presence of thermodiffusion, *J. Math. Sci.*, 1999, vol. 97, no. 1, pp. 3830–3839. <https://doi.org/10.1007/bf02364922>.
16. Minov A. V. Study of the stress-strain state of a hollow cylinder subjected to the thermal diffusion effect of carbon in an axisymmetric thermal field variable in length, *Izv. Vuzov. Mashinostroenie*, 2008, no. 10, pp. 21–26 (In Russian).
17. Deswal S., Kalkal K. K., Sheoran S. S. Axi-symmetric generalized thermoelastic diffusion problem with two-temperature and initial stress under fractional order heat conduction, *Phys. B – Condensed Matter.*, 2016, vol. 496, pp. 57–68. <https://doi.org/10.1016/j.physb.2016.05.008>.
18. Kumar R., Devi S. Deformation of modified couple stress thermoelastic diffusion in a thick circular plate due to heat sources, *CMST*, 2019, vol. 25, no. 4, pp. 167–176. <https://doi.org/10.12921/cmst.2018.0000034>.
19. Olesiak Z. S., Pyryev Yu. A. A coupled quasi-stationary problem of thermodiffusion for an elastic cylinder, *Int. J. Eng. Sci.*, 1995, vol. 33, no. 6, pp. 773–780. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(94\)00099-6](https://doi.org/10.1016/0020-7225(94)00099-6).
20. Tripathi J. J., Kedar G. D., Deshmukh K. C. Generalized thermoelastic diffusion in a thick circular plate including heat source, *Alexandria Eng. J.*, 2016, vol. 55, no. 3, pp. 2241–2249. <https://doi.org/10.1016/j.aej.2016.06.003>.
21. Poroshina N. I., Ryabov V. M. Methods for Laplace transform inversion, *Vestnik St. Petersburg Univ. Math.*, 2011, vol. 44, no. 3, pp. 214–222. <https://doi.org/10.3103/S1063454111030071>.
22. Zemskov A. V., Tarlakovskii D. V. Polar-symmetric problem of elastic diffusion for isotropic multi-component plane, *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2016, vol. 158, 012101. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/158/1/012101>.
23. Zemskov A. V., Tarlakovskii D. V. Polar-symmetric problem of elastic diffusion for a multicomponent medium, *Problems of Strength and Plasticity*, 2018, vol. 80, no. 1, pp. 5–14 (In Russian). <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2018-80-1-5-14>.
24. Zverev N. A., Zemskov A. V., Tarlakovskii D. V. Modeling of unsteady coupled mechanodiffusion processes in a continuum isotropic cylinder, *Problems of Strength and Plasticity*, 2020, vol. 82, no. 2, pp. 156–167 (In Russian). <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-2-156-167>.
25. Koshlyakov N. S., Gliner E. B., Smirnov M. M. *Osnovnye differentsial'nye uravneniia matematicheskoi fiziki* [Basic Differential Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1962, 768 pp.
26. Ditkin V. A., Prudnikov A. P. *Spravochnik po operatsionnomu ischisleniiu* [Guide to operational Calculus]. Moscow, Vyssh. Shk., 1965, 568 pp. (In Russian)
27. Babichev A. P., Babushkina N. A., Bratkovskii A. M., et al. *Fizicheskie velichiny: Spravochnik* [Physical Quantities: Handbook]. Moscow, Energoatomizdat, 1991, 1232 pp. (In Russian)
28. Nachtrieb N. H., Handler G. S. A relaxed vacancy model for diffusion in crystalline metals, *Acta Metal.*, 1954, vol. 2, no. 6, pp. 797–802. [https://doi.org/10.1016/0001-6160\(54\)90031-0](https://doi.org/10.1016/0001-6160(54)90031-0).
29. Petit J., Nachtrieb N. H. Self-diffusion in liquid gallium, *J. Chem. Phys.*, 1956, vol. 24, no. 5, pp. 1027–1028. <https://doi.org/10.1063/1.1742671>.