ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print)

УДК 539.374

don https://doi.org/10.14498/vsgtu1877

# Пластическое течение и ползучесть в полом цилиндре с жестким внешним покрытием под действием внутреннего давления

# С. В. Фирсов

Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, ХФИЦ ДВО РАН, Россия, 681005, Комсомольск-на-Амуре, ул. Металлургов, 1.

#### Аннотация

Изучается изотермическое деформирование толстостенной трубы с жестким покрытием боковой поверхности под воздействием изменяющегося внутреннего давления. Рассматриваются четыре стадии нагружения: (1) плавный рост нагрузки, (2) ее фиксация на максимальном значении в течение продолжительного времени, (3) плавное уменьшение нагрузки до нуля и (4) частичная релаксация напряжений. В качестве материала взята сталь 45, разогретая до температуры 725 °C.

Изучается влияние ползучести на процесс пластического течения и на изменение уровня напряжений и деформаций в течение процесса деформирования, а также на их остаточные значения. Для изучения влияния ползучести также рассматривается задача деформирования с нулевыми скоростями ползучести. Рассматриваются два варианта нагружения: при распространении пластичности на часть среды (давление 200 МПа) и при распространении пластического течения на всю среду (давление 320 МПа при отсутствии ползучести).

По результатам расчетов получено, что ползучесть оказывает значительное влияние на распределение напряжений и деформаций в материале. Особенно сильно это проявляется на более продолжительных стадиях выдержки и релаксации. Расчеты для двух случаев нагружения давлением в 200 МПа и 320 МПа в конце стадии выдержки приводят к близким значениям напряжений, а после релаксации также сравниваются значения деформаций и перемещения. При сравнении случаев упругопластического деформирования и деформирования с учетом ползучести видим, что ползучесть замедляет распространение пластичности, а также сокращает итоговую область влияния пластического течения. Однако в связи с большими накопленными необратимыми деформациями ползучесть приводит к увеличению влияния повторного пластического течения, которое появляется раньше и затрагивает большую часть деформируемой среды.

## Научная статья

© Коллектив авторов, 2021

© СамГТУ, 2021 (составление, дизайн, макет)

∂ @④ Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru)

### Образец для цитирования

Фирсов С. В. Пластическое течение и ползучесть в полом цилиндре с жестким внешним покрытием под действием внутреннего давления // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2021. Т. 25, № 4. С. 696–715. https://doi.org/10.14498/vsgtu1877.

#### Сведения об авторе

Сергей Викторович Фирсов 🖄 🕒 https://orcid.org/0000-0001-7446-6231 младший научный сотрудник; е-mail:firsov.s.new@yandex.ru **Ключевые слова:** цилиндр, толстостенная труба, труба с внешним жестким покрытием, ползучесть и пластическое течение, вязкопластичность, внутреннее давление, плоская деформация, малые деформации.

Получение: 23 августа 2021 г. / Исправление: 30 ноября 2021 г. / Принятие: 6 декабря 2021 г. / Публикация онлайн: 23 декабря 2021 г.

Введение. В работе рассматривается задача накопления необратимых деформаций вследствие механизмов вязкого и пластичного деформирования, где под вязким подразумевается механизм накопления деформаций ползучести, а под пластичным — деформаций пластического течения. Более подробно рассматривается вопрос о том, какое влияние оказывает процесс ползучести на распределение напряжений и деформаций в образце в то время, когда в части образца напряжения достигают поверхности нагружения. Данный процесс рассматривается на примере типовой задачи изотермического деформирования трубы под воздействием внутреннего давления при повышенных температурах. Решению подобной задачи посвящено множество работ. К ним можно отнести работу Надаи [1], в которой было получено решение для идеально-пластического материала. Работа Хилла [2] посвящена изучению данной задачи деформирования, где наряду с пластическими деформациями, задаваемыми с помощью условия пластичности Треска, также учитываются сжимающие упругие деформации. Данная статья является одной из первых, в которых рассматривалось упругопластическое деформирование трубы под действием внутреннего давления. По данной теме также был опубликован ряд работ [3-8], сравнительный обзор части из которых приведен в статье [9]. В приведенных ранее работах расчеты производятся в рамках теории малых деформаций. Изучению конечных деформаций в трубах под давлением посвящены статьи [10–15]. В работах [16,17] рассматривалось деформирование упругопластического материала с учетом упрочнения. В работе [18] приводится расчет вращающегося цилиндрического сосуда под давлением, сделанного из функционально-градиентного материала.

Параллельно с пластическим деформированием толстостенной трубы под давлением также изучается вопрос вязкого деформирования. Среди первых можно отметить работы [19,20]. Наряду с трубами рассматривалось также деформирование тонкостенных цилиндрических оболочек [21-25]. Много работ посвящено изучению сосудов под давлением, сделанных из материалов, обладающих анизотропными свойствами. Так, работы [26,27] являются одними из первых, в которых изучается деформирование сосудов под давлением из ортотропных материалов в рамках теории ползучести. В работе [28] рассматривались большие деформации толстостенной цилиндрической трубы изготовленной, как из изотропного, так и ортотропного материала. В данной работе рассматривалась задача деформирования как под действием только внутреннего давления, так и под совместным действием внутреннего и внешнего давлений. Было отмечено, что анизотропия значительно влияет на радиальные напряжения и деформации, и что внешнее давление, приложенное к боковой поверхности, снижает скорость накопления деформаций ползучести. В последнее время в связи с широким распространением композитных материалов также изучаются задачи деформирования труб из трансверсальноизотропных (или транстропных) материалов [29, 30].

В большинстве случаев для описания ползучести используется степенная зависимость деформаций от напряжений, однако в работе [31] было отмечено, что для ряда термостойких материалов в определенном диапазоне напряжений характерна линейная зависимость скоростей ползучести от напряжений. В приведенной работе была представлена модель, которая совмещает в себе как линейную, так и степенную зависимость скоростей ползучести от напряжений, что позволяет описывать поведение подобных материалов.

Помимо анизотропных в последнее время приобрели популярность неоднородные материалы, такие как функционально-градиентные. Работы [32,33] являются одними из первых, в которых рассматриваются деформации ползучести сосудов под давлением, сделанных из функционально-градиентных материалов. В работе [34] к данной задаче также добавляется температурное поле, а в [35] — магнитное. Деформации ползучести в сосуде под давлением, изготовленном из функционально-градиентного материала, при наличии накопленных остаточных напряжений рассматривались в работе [36]. Ряд задач был решен в рамках теории Сета [29, 37, 38].

В данной работе будет рассматриваться поведение сосуда под давлением, разогретого до высоких температур и подверженного большой нагрузке, достаточной для выхода напряжений на поверхность нагружения. В связи с этим в материале можем наблюдать как пластические деформации, так и деформации ползучести. Так, в работах [39-41] рассматривается необратимое деформирование материала, связанное как с пластичностью, так и с ползучестью. В работе [42] данный процесс рассматривается на примере сосуда под давлением. В приведенных работах считается, что до выхода напряжений на поверхность нагружения накопление необратимых деформаций происходит в связи с ползучестью. При этом в областях, в которых началось пластическое деформирование, скорости ползучести считаются неизменными и равными тем скоростям, которых достигла ползучесть в момент выхода напряжений на поверхность нагружения. В тоже время в других работах [43–45] предполагается, что скорости ползучести продолжат изменяться даже после выхода напряжений на поверхность нагружения. Здесь будет использоваться последний подход к совместному учету механизмов накопления необратимых деформаций.

В качестве модельного материала рассмотрим сталь 45, широко использующуюся в производстве стержней и труб. Деформации ползучести данной марки стали при высоких температурах рассматривались в работах [46,47]. Воспользуемся здесь коэффициентами ползучести при температуре в 725 °C, приведенными в работе [46].

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу деформирования толстостенной трубы с зафиксированными торцами и жестким покрытием боковой поверхности под действием внутреннего давления. Решение будем искать в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$ . Данная задача обладает осевой симметрией, из-за зафиксированных торцов труба находится в состоянии плоского деформирования. Ненулевые компоненты вектора перемещений запишем в форме  $u = u_r(r, t)$ . Внутренний и внешний радиусы трубы обозначим соответственно  $R_1$  и  $R_2$ . К поверхности внутренней полости  $r = R_1$  прикладывается давление P = P(t). Считаем, что на боковую поверхность  $r = R_2$  нанесено жесткое покрытие (например, из сплава на основе бериллия), предотвращающее расширение трубы  $u(R_2, t) = 0$ . Будем рассматривать квазистатический процесс деформирования, то есть заданная нагрузка P = P(t) будет претерпевать малые изменения с течением времени. Это позволяет разбить весь процесс деформирования на временные шаги, каждый из которых может рассматриваться как отдельная задача с заданной статической нагрузкой. Предполагаем, что деформации, возникающие при данном нагружении, будут малыми. Соответственно, тензор малых деформаций Альманси в нашем случае примет вид

$$d_{rr} = e_{rr} + p_{rr} = u_{,r}, \quad d_{\varphi\varphi} = e_{\varphi\varphi} + p_{\varphi\varphi} = r^{-1}u, \quad d_{zz} = e_{zz} + p_{zz} = 0.$$
 (1)

Напряжения будем определять согласно закону Гука:

$$\sigma_{rr} = \lambda \left( e_{rr} + e_{\varphi\varphi} + e_{zz} \right) + 2\mu e_{rr},$$
  

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \lambda \left( e_{rr} + e_{\varphi\varphi} + e_{zz} \right) + 2\mu e_{\varphi\varphi},$$
  

$$\sigma_{zz} = \lambda \left( e_{rr} + e_{\varphi\varphi} + e_{zz} \right) + 2\mu e_{zz}.$$
(2)

Уравнения равновесия для данной кинематической постановки сведутся к одному уравнению:

$$\sigma_{rr,r} + r^{-1}(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) = 0.$$
(3)

Используя соотношения (1), (2), уравнение равновесия (3) можно свести к дифференциальному уравнению второго порядка относительно перемещения:

$$u_{,rr} + r^{-1}u_{,r} - r^{-2}u = r^{-1}\frac{2\mu}{\lambda + 2\mu}(p_{rr} - p_{\varphi\varphi}) + p_{rr,r} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}(p_{\varphi\varphi}, r + p_{zz}, r).$$
(4)

Представив левую часть уравнения (4) в форме [48]

$$u_{,rr} + r^{-1}u_{,r} - r^{-2}u = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}(ur)\right),$$

проинтегрируем его и получим соотношение для нахождения компоненты вектора перемещений:

$$u(r,t) = \frac{1}{2}C_{1}(t)r + C_{2}(t)r^{-1} + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}rI_{1}(r,t) + r^{-1}I_{2}(r,t),$$

$$I_{1}(r,t) = \int_{R_{1}}^{r} x^{-1} \left( p_{rr}(x,t) - p_{\varphi\varphi}(x,t) \right) dx,$$

$$I_{2}(r,t) = \int_{R_{1}}^{r} x \left( \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \left( p_{rr}(x,t) + p_{\varphi\varphi}(x,t) \right) + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} p_{zz}(x,t) \right) dx.$$
(5)

Ненулевые компоненты тензора напряжений примут вид

$$\sigma_{rr} = (\lambda + \mu)C_1 - 2\mu C_2 r^{-2} + 2\mu \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} I_1 - 2\mu r^{-1} I_2,$$

699

$$\sigma_{\varphi\varphi} = (\lambda + \mu)C_1 + 2\mu C_2 r^{-2} + 2\mu \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} I_1 + 2\mu r^{-1} I_2 - \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} (\lambda p_{zz} + 2(\lambda + \mu) p_{\varphi\varphi}), \tag{6}$$

$$\sigma_{zz} = \lambda C_1 + 2\mu \left(\frac{\lambda}{\lambda - \mu} I_1 - 2\frac{\lambda + \mu}{\lambda - \mu} p_{zz} - \frac{\lambda}{\lambda - \mu} p_{\varphi\varphi}\right).$$

$$\sigma_{zz} = \lambda C_1 + 2\mu \Big( \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} I_1 - 2 \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} p_{zz} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} p_{\varphi\varphi} \Big).$$

Коэффициенты интегрирования  $C_1(t)$  <br/>и $C_2(t)$ найдем из граничных условий

$$\sigma_{rr}(R_1, t) = p(t) = -P(t), \quad u(R_2, t) = 0.$$
(7)

Здесь p(t) — значение нормальной компоненты тензора напряжений на внутренней граничной поверхности, которая должна компенсировать приложенное к поверхности полости давление P(t).

Подставив полученные значения перемещения (5) и напряжений (6) в граничные условия (7), найдем

$$C_{1}(t) = \frac{p(t)R_{1}^{2}}{(\lambda + \mu)R_{1}^{2} + \mu R_{2}^{2}} - 2\mu I_{3}(t),$$

$$C_{2}(t) = -\frac{R_{1}^{2}}{2} \frac{p(t)R_{2}^{2}}{(\lambda + \mu)R_{1}^{2} + \mu R_{2}^{2}} - (\lambda + \mu)R_{1}^{2}I_{3}(t),$$

$$I_{3}(t) = \frac{1}{(\lambda + \mu)R_{1}^{2} + \mu R_{2}^{2}} \Big(\frac{\mu R_{2}^{2}}{\lambda + 2\mu} I_{1}(R_{2}, t) + I_{2}(R_{2}, t)\Big).$$
(8)

С учетом коэффициентов (8) перемещение (5) запишется в виде

$$u(r,t) = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} r I_1(r,t) + r^{-1} I_2(r,t) - \frac{1}{2} r^{-1} \frac{R_1^2 (r^2 - R_2^2)}{(\lambda + \mu) R_1^2 + \mu R_2^2} p(t) + \left(r\mu + (\lambda + \mu) R_1^2 r^{-1}\right) I_3(t).$$
(9)

Напряжения (6) будут находиться согласно формулам

$$\sigma_{rr} = 2\mu \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} I_1(r, t) - 2\mu r^{-1} I_2(r, t) + + R_1^2 r^{-2} \frac{(\lambda + \mu)r^2 + \mu R_2^2}{(\lambda + \mu)R_1^2 + \mu R_2^2} p(t) - 2(r^2 - R_1^2)r^{-2}\mu(\lambda + \mu)I_3(t), \sigma_{\varphi\varphi} = 2\mu \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} I_1(r, t) + 2\mu r^{-1} I_2(r, t) - \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} (\lambda p_{zz} + 2(\lambda + \mu)p_{\varphi\varphi}) + + R_1^2 r^{-2} \frac{(\lambda + \mu)r^2 - \mu R_2^2}{(\lambda + \mu)R_1^2 + \mu R_2^2} p(t) - 2(r^2 + R_1^2)r^{-2}\mu(\lambda + \mu)I_3(t),$$
(10)  
$$\sigma_{zz} = 2\mu \Big(\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} I_1(r, t) - 2\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} p_{zz} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} p_{\varphi\varphi}\Big) + + \frac{\lambda R_1^2}{(\lambda + \mu)R_1^2 + \mu R_2^2} p(t) - 2\lambda \mu I_3(t).$$

Полученные соотношения (9), (10) можно использовать для нахождения напряженно-деформированного состояния трубы при заданной нагрузке p(t) на поверхности полости  $r = R_1$  и известных накопленных необратимых деформациях  $p_{ij}$  на данном временном шаге. На внутренней  $(r = R_1)$  и внешней  $(r = R_2)$  боковых поверхностях трубы данные соотношения примут более простой вид. Для поверхности внутренней полости  $(r = R_1)$  получим

$$u(R_{1},t) = -\frac{1}{2} \frac{R_{1}(R_{2}^{2} - R_{1}^{2})}{(\lambda + \mu)R_{1}^{2} + \mu R_{2}^{2}} p(t) - (\lambda + 2\mu)R_{1}I_{3}(t),$$

$$\sigma_{rr}(R_{1},t) = p(t),$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}(R_{1},t) = \frac{(\lambda + \mu)R_{1}^{2} - \mu R_{2}^{2}}{(\lambda + \mu)R_{1}^{2} + \mu R_{2}^{2}} p(t) - 4\mu(\lambda + \mu)I_{3}(t) - -\frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} (\lambda p_{zz}(R_{1},t) + 2(\lambda + \mu)p_{\varphi\varphi}(R_{1},t)),$$

$$\sigma_{zz}(R_{1},t) = \frac{\lambda R_{1}^{2}}{(\lambda + \mu)R_{1}^{2} + \mu R_{2}^{2}} p(t) - 2\lambda\mu I_{3}(t) - -2\mu \Big(2\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}p_{zz}(R_{1},t) + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}p_{\varphi\varphi}(R_{1},t)\Big).$$
(11)

На боковой поверхности  $(r = R_2)$  они примут вид

$$u(R_{2},t) = 0,$$

$$\sigma_{rr}(R_{2},t) = 2\mu(\lambda+2\mu)I_{4}(t) + \frac{(\lambda+2\mu)R_{1}^{2}}{(\lambda+\mu)R_{1}^{2}+\mu R_{2}^{2}}p(t),$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}(R_{2},t) = \frac{\lambda R_{1}^{2}}{(\lambda+\mu)R_{1}^{2}+\mu R_{2}^{2}}p(t) + 2\lambda\mu I_{4}(t) - - -\frac{2\mu}{\lambda+2\mu}(\lambda p_{zz}(R_{2},t)+2(\lambda+\mu)p_{\varphi\varphi}(R_{2},t)),$$

$$\sigma_{zz}(R_{2},t) = \frac{\lambda R_{1}^{2}}{(\lambda+\mu)R_{1}^{2}+\mu R_{2}^{2}}p(t) + 2\lambda\mu I_{4}(t) - - 2\mu\left(2\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}p_{zz}(R_{2},t)+\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}p_{\varphi\varphi}(R_{2},t)\right),$$

$$I_{4}(t) = \frac{1}{(\lambda+\mu)R_{1}^{2}+\mu R_{2}^{2}}\left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}R_{1}^{2}I_{1}(R_{2},t)-I_{2}(R_{2},t)\right).$$
(12)

**2.** Задание источника необратимых деформаций. Соотношения (9), (10) вместе с упрощенными формулами для границ расчетной области (11), (12) позволяют найти напряженно-деформированное состояние в теле в любой фиксированный момент времени при заданной нагрузке p(t) и известных накопленных необратимых деформациях  $p_{ij}$ . Следовательно, осталось найти, как будут изменяться необратимые деформации при переходе с одного временного шага на следующий. Так как наибольший интерес в данной задаче представляет изучение вопроса о влиянии ползучести на процесс пластического течения, будем рассматривать процесс деформирования при высоких

температурах. Это позволит при относительно небольших нагрузках и малой продолжительности времени наблюдать влияние на процесс деформирования как пластического течения, так и ползучести.

Для расчетов воспользуемся предположением, что скорость накопления необратимых деформаций равна сумме скоростей деформаций ползучести  $\varepsilon_{ij}^{v}$  и пластичности  $\varepsilon_{ij}^{p}$  [43–45]:

$$\frac{dp_{ij}}{dt} = \gamma_{ij} = \varepsilon^v_{ij} + \varepsilon^p_{ij}.$$
(13)

Для нахождения скоростей деформаций ползучести воспользуемся теорией типа течения [49] с потенциалом, соответствующим степенному закону Нортона [50] с октаэдрической мерой напряжения:

$$\varepsilon_{ij}^{v} = \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma} \frac{\partial \Sigma}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma} = B\Sigma^{n}, \quad \Sigma = \sqrt{\frac{3}{2}\tau_{ij}\tau_{ji}},$$
  
$$\tau_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}, \quad \sigma = \frac{1}{3}\left(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz}\right),$$
  
$$\varepsilon_{ij}^{v} = \frac{3}{2}B\Sigma^{n-1}\tau_{ij}.$$
 (14)

Здесь *B*, *n*—параметры ползучести, которые для стали 45 при температуре 725 °C согласно [46] примут соответственно значения  $B = 3.5 \cdot 10^{-14} \text{ M}\Pi \text{a}^{-n} \cdot \text{c}^{-1}$  и n = 5.22. В рассматриваемом случае соотношения (14) сведутся к

$$\varepsilon_{rr}^{v} = \frac{1}{2} B \Sigma^{n-1} \left( 2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz} \right),$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi}^{v} = \frac{1}{2} B \Sigma^{n-1} \left( 2\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr} - \sigma_{zz} \right),$$

$$\varepsilon_{zz}^{v} = \frac{1}{2} B \Sigma^{n-1} \left( 2\sigma_{zz} - \sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} \right),$$

$$\Sigma = \sqrt{\sigma_{rr}^{2} + \sigma_{\varphi\varphi}^{2} + \sigma_{zz}^{2} - \sigma_{rr}\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}\sigma_{zz} - \sigma_{\varphi\varphi}\sigma_{zz}}.$$
(15)

Для нахождения скоростей деформаций пластичности воспользуемся теорией пластического течения с обобщенным условием максимальных октаэдрических напряжений Мизеса для случая вязкопластического течения:

$$\varepsilon_{ij}^{p} = \phi \frac{\partial f}{\partial \tau_{ij}}, \quad f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^{p}) = \sqrt{\frac{3}{2} (\tau_{ij} - \eta \varepsilon_{ij}^{p}) (\tau_{ji} - \eta \varepsilon_{ji}^{p})} - \sigma_{0},$$
  

$$\varepsilon_{ij}^{p} = \frac{\phi}{1 + \phi \eta} \tau_{ij}, \quad \phi = \frac{1}{\eta} \left( \frac{1}{2\sigma_{0}} \sqrt{\frac{3}{2} \tau_{ij} \tau_{ij}} - 1 \right),$$
  

$$\varepsilon_{ij}^{p} = \frac{1}{\eta} \frac{\Sigma - \sigma_{0}}{\Sigma} \tau_{ij}.$$
(16)

В рассматриваемом случае скорости деформации пластичности (16) примут

вид

$$\varepsilon_{rr}^{p} = \frac{1}{3\eta} \frac{\Sigma - \sigma_{0}}{\Sigma} \left( 2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz} \right),$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi}^{p} = \frac{1}{3\eta} \frac{\Sigma - \sigma_{0}}{\Sigma} \left( 2\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr} - \sigma_{zz} \right),$$

$$\varepsilon_{zz}^{p} = \frac{1}{3\eta} \frac{\Sigma - \sigma_{0}}{\Sigma} \left( 2\sigma_{zz} - \sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} \right).$$
(17)

Здесь  $\eta$  — коэффициент вязкого сопротивления пластическому течению,  $\sigma_0$  — предел текучести материала.

Исходя из формул (13), (15), (17) получим, что скорость необратимых деформаций до начала пластического течения (при  $\Sigma < \sigma_0$ ) будет находиться из соотношений (15), в то время как в области пластического течения (где выполняется неравенство  $\Sigma(r,t) \ge \sigma_0$ ) они будут находиться из соотношений

$$\frac{dp_{rr}}{dt} = \chi \left( 2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz} \right), \qquad \frac{dp_{\varphi\varphi}}{dt} = \chi \left( 2\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr} - \sigma_{zz} \right), 
\frac{dp_{zz}}{dt} = \chi \left( 2\sigma_{zz} - \sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} \right), \qquad \chi(r,t) = \frac{1}{6\Sigma} \left( 3B\Sigma^n + \frac{2}{\eta} (\Sigma - \sigma_0) \right).$$
(18)

К сожалению, нахождение аналитического решения для полученных соотношений (15), (18) затруднительно, поэтому будем искать их решение численно. Для этого расчетную область разобьем на прямоугольные ячейки; значения функций в узлах полученной сетки будем обозначать как  $f_i^j = f(r_i, t^j)$ , где  $i = 0, 1, \ldots, n, j = 0, 1, \ldots, m$ . Соответственно,  $r_0 = R_1, r_n = R_2, t^0 = 0$ . Запишем производную по времени через конечную разность и получим явную разностную схему:

$$p_{lm_i^{j+1}} = p_{lm_i^j} + \gamma_{lm_i^j} \Delta t, \qquad (19)$$

где  $\gamma_{lm}$  находится соответственно либо из соотношений (15), либо из (18). Значения  $\sigma_{lm_i}^{j}$ , которые будут использоваться в соотношениях (19), будем находить из уравнений (10) при значениях  $r = r_i$  и  $t = t^j$ .

**3. Результаты расчетов.** Рассмотрим деформирование трубы из стали 45 при температуре 725 °C. Параметры материала возьмем согласно [46]:

$$\begin{split} \lambda &= 113 \cdot 10^9 \text{ }\Pi\text{a}, \quad \mu = 59 \cdot 10^9 \text{ }\Pi\text{a}, \quad R_1 = 0.003 \text{ }\text{m}, \quad R_2 = 0.008 \text{ }\text{m}, \\ \sigma_0 &= 80 \cdot 10^6 \text{ }\Pi\text{a}, \quad \eta = 600 \cdot 10^6 \text{ }\Pi\text{a}, \quad B = 1.675 \cdot 10^{-45} \text{ }\Pi\text{a}^{-n} \cdot \text{c}^{-1} \quad n = 5.22. \end{split}$$

Функцию нагружения p(t) зададим следующим образом:

$$p(t) = \begin{cases} p_{\max}\left(\frac{t}{t_1} - \frac{1}{2\pi}\sin\frac{2\pi t}{t_1}\right), & 0 \leqslant t < t_1, \\ p_{\max}, & t_1 \leqslant t < t_2, \\ p_{\max}\left(1 - \frac{t - t_2}{t_3 - t_2} + \frac{1}{2\pi}\sin\frac{2\pi(t - t_2)}{t_3 - t_2}\right), & t_2 \leqslant t < t_3, \\ 0, & t_3 \leqslant t \leqslant t_4. \end{cases}$$

Будем считать, что рост давления до максимального значения происходит за 10 секунд ( $t_1 = 10$  с), труба выдерживается при данном давлении в течение 10 минут ( $t_2 = 610$  с), затем происходит снятие давления также за 10 секунд

 $(t_3 = 620 \text{ c})$  и еще в течение 3 минут продолжаем следить за релаксацией напряжений. Это в сумме приводит к общей продолжительности рассматриваемого процесса  $t_4 = 800 \text{ c}$ .

Для оценки нагрузки, достаточной для появления пластического течения, рассмотрим чисто упругое деформирование. Из условия начала пластического течения ( $\Sigma = \sigma_0$ ) получим выражение

$$p = \pm \frac{(\lambda + \mu)R_1^2 + \mu R_2^2}{\mu R_1^2 \sqrt{r^4 + 3R_2^4}} \sigma_0 r^2.$$

Полученная в правой части последнего выражения функция является монотонно возрастающей по абсолютной величине. Следовательно, свое наименьшее значение она принимает при минимально допустимом значении r. В нашем случае это  $r = R_1$ . Это показывает, что пластическое течение зарождается на поверхности внутренней полости ( $r = R_1$ ) при величине нагрузки

$$p = \pm \frac{(\lambda + \mu)R_1^2 + \mu R_2^2}{\mu \sqrt{R_1^4 + 3R_2^4}} \sigma_0 \approx \pm 64.9096 \cdot 10^6 \text{ IIa.}$$

Однако в рассматриваемом случае ползучесть оказывает существенное влияние на снижение уровня напряжений в деформируемой среде, что в свою очередь приводит к увеличению значения нагрузки, необходимой для достижения напряжениями поверхности нагружения. Причем чем медленнее растет нагрузка, тем сильнее напряжения успевают релаксировать. Это, в свою очередь, приводит к увеличению минимальной нагрузки, необходимой для начала пластического течения. В связи с этим рассмотрим два случая со значениями максимальной нагрузки, равными соответственно  $p_{\rm max}^1 = -200 \ {
m M}\Pi{
m a}$ и  $p_{\rm max}^2 = -320$  МПа. Чтобы оценить, какое влияние оказывает ползучесть на процесс деформирования, найдем решение данных задач без учета ползучести, то есть положив скорость деформации ползучести  $\varepsilon_{ij}^v$  всегда равной нулю. Обозначим данные случаи через  $pl_1$  и  $pl_2$ , в то время как случаи решения исходных задач будем обозначать через  $cr_1$  и  $cr_2$  при соответствующих максимальных нагрузках  $p_{\text{max}}^1$  и  $p_{\text{max}}^2$ . Полученные результаты представлены на рис. 1 и 2. Для оценки уровня необратимых деформаций использовалась октаэдрическая мера деформаций, аналогичная таковой для напряжений (15):

$$P = \sqrt{p_{rr}^2 + p_{\varphi\varphi}^2 + p_{zz}^2 - p_{rr}p_{\varphi\varphi} - p_{rr}p_{zz} - p_{\varphi\varphi}p_{zz}}$$

Представленные на рисунках данные показывают, что при отсутствии ползучести (случаи  $pl_1$  и  $pl_2$ ) пластическое течение начинается у полости  $(r = R_1)$  и с ростом нагрузки постепенно распространяется в направлении боковой поверхности  $(r = R_2)$  (см. рис. 1, а). При достаточном значении нагрузки упругопластическая граница достигает боковой поверхности (случай  $pl_2$ ). При фиксации нагрузки пластическое течение останавливается, то есть скорости деформаций пластичности становятся равными нулю ( $\varepsilon_{ij}^p = 0$ ), но напряжения продолжают находиться на поверхности нагружения ( $\Sigma = \sigma_0$ ), что хорошо видно из рис. 1, с и 1, d.

При уменьшении нагрузки уровень напряжений начинает снижаться, однако в связи с накопленными необратимыми деформациями  $p_{ij}$  с определенного момента октаэдрическое напряжение  $\Sigma$  снова начинает расти и повторно



Рис. 1. Деформирование полой трубы с заданным максимальным внутренним давлением  $P_{\max}^1 = 200 \text{ МПа и } P_{\max}^2 = 320 \text{ МПа}$ с учетом деформации ползучести (случаи  $cr_1$  и  $cr_2$  соответственно) и без нее (случаи  $pl_1$  и  $pl_2$ ). Движение упругопластической границы на стадии увеличения внутреннего давления (а) и на стадии его уменьшения (b). Распределение октаэдрического напряжения  $\Sigma$  при  $t = t_1$  (c),  $t = t_2$  (d) и  $t = t_4$  (e)



[Figure 1. Deformation of thick-walled cylinder under internal pressures  $P_{\text{max}}^1 = 200$  MPa and  $P_{\text{max}}^2 = 320$  MPa with creep properties (for  $cr_1$  and  $cr_2$  respectively) and without it (for  $pl_1$  and  $pl_2$ ). Evolution of the plastic regions with increasing (a) and decreasing (b) inner pressure. Stresses at time  $t = t_1$  (c),  $t = t_2$  (d) and  $t = t_4$  (e)]

достигает поверхности нагружения (см. рис. 1, е), что, в свою очередь, приводит к появлению вторичного (повторного) пластического течения. Как и при росте нагрузки ( $t \in [0; t_1]$ ), область пластического течения начинает распространяться от внутренней полости ( $r = R_1$ ) к боковой поверхности ( $r = R_2$ ) и накопление пластических деформаций останавливается при прекращении изменения нагрузки p(t) (см. рис. 1, b). Можно заметить, что при бо́льших накопленных необратимых деформациях (см. рис. 2, d), то есть при бо́льшем значении изначальной нагрузки (случай  $pl_2$ ) повторное пластическое течение затрагивает большую область деформируемой среды. Из-за повторной пластичности уровень необратимых деформаций в окрестности внутренней полости ( $r = R_1$ ) уменьшается (см. рис. 2, e).

Если же к рассмотрению добавить ползучесть материала (случаи  $cr_1$  и  $cr_2$ ), то можно заметить, что ползучесть оказывает значительное влияние на рас-





Рис. 2. Деформирование полой трубы с заданным максимальным внутренним давлением  $P_{\max}^1 = 200 \text{ МПа и } P_{\max}^2 = 320 \text{ МПа}$ с учетом деформации ползучести (случаи  $cr_1$  и  $cr_2$  соответственно) и без нее (случаи  $pl_1$  и  $pl_2$ ). Перемещение точек среды при  $t = t_2$  (а) и  $t = t_4$  (b). Распределение октаэдрической меры необратимых деформаций P при  $t = t_1$  (c),  $t = t_2$  (d) и  $t = t_4$  (e)

[Figure 2. Deformation of thick-walled cylinder under internal pressures  $P_{\text{max}}^1 = 200$  MPa and  $P_{\text{max}}^2 = 320$  MPa with creep properties (for  $cr_1$  and  $cr_2$  respectively) and without it (for  $pl_1$  and  $pl_2$ ). Displacements at time  $t = t_2$  (a) and  $t = t_4$  (b). Irreversible strains at time  $t = t_1$  (c),  $t = t_2$  (d) and  $t = t_4$  (e)]

пределение напряжений (см. рис. 1) и деформаций (см. рис. 2) в деформируемой среде. Так как с ростом напряжений в среде влияние ползучести становится более явным, можно заметить, что пластическое течение начинается лишь немного позднее (см. рис. 1, *a*), в то время как по мере распространения пластичности и уменьшения скорости роста нагрузки упругопластическая граница движется все медленнее. Это происходит вплоть до того момента, когда скорость релаксации напряжений начинает превышать скорость их прироста, связанного с увеличением нагрузки, что приводит к сходу напряжений с поверхности нагружения и сокращению области пластического течения еще во время роста нагрузки p(t) (см. рис. 1, *a*). Наряду с сокращением уровня напряжений в среде ползучесть также приводит к их перераспределению (см. рис. 1, *c*), а именно к их оттоку из наиболее загруженного участка (в окрестности внутренней полости) к наименее загруженному (в окрестности боковой поверхности), что также хорошо видно на рис. 1, с.

Интересно, что после выдержки в течение 10 минут при фиксированной максимальной нагрузке уровень напряжений для двух рассматриваемых случаев становится практически одинаковым (см. рис. 1, d), в то время как перемещения и накопленные необратимые деформации остаются различными (см. рис. 2, a и 2, d). При уменьшении нагрузки также появляется повторное пластическое течение (см. рис. 1, b), и, как и ранее, чем больше накопленные необратимые деформации см. рис. 2, d), тем раньше напряжения выходят на поверхность нагружения и тем большую область затрагивает пластическое течение. Однако, как и при нагрузке, ползучесть приводит к релаксации напряжений, что сказывается на распространении пластического течения (см. рис. 1, b).

После снятия нагрузки и выдержки в течение трех минут напряжения релаксируют и опять становятся одинаковыми для рассматриваемых случаев  $cr_1$  и  $cr_2$  (см. рис. 1, e). Аналогичным образом сократятся и сравняются перемещения (см. рис. 2, b) и необратимые деформации (см. рис. 2, e). Это связано с тем, что после снятия нагрузки ползучесть приводит к интенсивной релаксации напряжений за счет сокращения деформаций и, соответственно, перемещений. При указанной выдержке в три минуты релаксация достаточно велика, чтобы нивелировать разницу между двумя рассматриваемыми случаями нагружения  $p_{\text{max}}^1$  и  $p_{\text{max}}^2$ .

Заключение (выводы). В результате проделанной работы составлена математическая модель, позволяющая рассчитать перемещения и напряжения в толстостенной трубе с жестким покрытием при заданном внутреннем давлении и известном распределении необратимых деформаций. Произведен расчет по данной модели для случая деформирования особо толстостенной трубы с наружным диаметром 16 мм и толщиной стенки 5 мм из стали 45 под давлением 200 и 320 МПа при температуре 725 °C.

Результаты расчетов показали, что при заданных условиях ползучесть оказывает значительное влияние на процесс деформирования даже при относительно небольших временных промежутках. Ползучесть значительно сокращает область влияния пластического течения (см. рис. 1, a) и при длительном воздействии сокращает и выравнивает уровень напряжений в деформируемой среде (см. рис. 1, d). Однако это происходит за счет значительного роста деформаций и, соответственно, перемещений (см. рис. 2).

После снятия нагрузки наблюдается постепенная релаксация напряжений (см. рис. 1, е), также сопровождающаяся сокращением деформаций и перемещений (см. рис. 2, b и 2, е). В результате данного процесса в течение трех минут напряжения, перемещения и деформации в материале снижаются до определенного уровня, практически одинакового для двух рассматриваемых случаев. Если увеличить время выдержки, то напряжения и деформации продолжат уменьшаться и разница между двумя рассматриваемыми случаями станет еще меньше. Стоит отметить, что уровень остаточных деформаций и перемещений при учете ползучести все еще выше случая упругопластического деформирования при давлении 200 МПа, однако ниже, чем при давлении 320 МПа.

Данные выводы сделаны только для рассматриваемых граничных условий, и неизвестно, останутся ли они справедливыми при других граничных условиях. Как было показано ранее в работах [43–45], при различных граничных условиях и кинематических постановках для задач вращения цилиндров ползучесть будет вести себя по-разному. Соответственно, в дальнейшем планируется рассмотреть задачу деформирования трубы и сравнить полученные значения с приведенными здесь результатами, что позволит узнать, какое влияние оказывает наличие жесткого покрытия на боковой стенке на эволюцию напряжений и деформаций в среде. Ведь в трубе, по крайней мере, пластическое течение начнется при меньших значениях внутреннего давления, что легко можно получить из упругого решения:

$$p = \pm \frac{(\lambda + \mu)(R_2^2 - R_1^2)}{\sqrt{\mu^2 R_1^4 + 3(\lambda + \mu)^2 R_2^4}} \sigma_0 \approx \pm 39.6774 \text{ MIIa}$$

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

**Авторская ответственность.** Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Работа проводилась в рамках госзадания ХФИЦ ДВО РАН.

**Благодарность.** Автор благодарен рецензентам за тщательное прочтение статьи и ценные предложения и комментарии.

#### Библиографический список

- 1. Nadai A. Plasticity. New York, London: McGraw Hill Book Comp., 1931. 392 pp.
- 2. Hill R., Lee E. H., Tupper S. J. The theory of combined plastic and elastic deformation with particular reference to a thick tube under internal pressure // *Proc. R. Soc. Lond., Ser. A*, 1947. vol. 191, no. 1026. pp. 278–303. https://doi.org/10.1098/rspa.1947.0116.
- Cook G. The stresses in thick-walled cylinders of mild steel overstrained by internal pressure // Proc. Inst. Mech. Eng., 1934. vol. 126, no. 1. pp. 407-455. https://doi.org/ 10.1243/PIME\_PROC\_1934\_126\_019\_02.
- Allen D. N., Sopwith D. G. The stresses and strains in a partly plastic thick tube under internal pressure and end-load // Proc. R. Soc. Lond., Ser. A, 1951. vol. 205, no. 1080. pp. 69– 83. https://doi.org/10.1098/rspa.1951.0018.
- Steele M. C. Partially plastic thick-walled cylinder theory // J. Appl. Mech., 1952. vol. 19, no. 2. pp. 133–140. https://doi.org/10.1115/1.4010436.
- 6. Соколовский В. В. Теория пластичности. М.: Высш. школа, 1969. 608 с.
- Chu S. C., Vasilakis J. D. Inelastic behavior of thick-walled cylinders subjected to nonproportionate loading // Exp. Mech., 1973. vol. 13, no. 3. pp. 113–119. https://doi.org/ 10.1007/BF02323968.
- 8. Gao X.-L. An exact elasto-plastic solution for an open-ended thick-walled cylinder of a strain-hardening material // Int. J. Pres. Ves. Pip., 1992. vol. 52, no. 1. pp. 129–144. https://doi.org/10.1016/0308-0161(92)90064-M.
- Chu S.-C. A more rational approach to the problem of an elastoplastic thick-walled cylinder // J. Franklin Inst., 1972. vol. 294, no. 1. pp. 57–65. https://doi.org/10.1016/ 0016-0032(72)90113-5.
- Gao X.-L. An exact elasto-plastic solution for a closed-end thick-walled cylinder of elastic linear-hardening material with large strains // Int. J. Pres. Ves. Pip., 1993. vol. 56, no. 3. pp. 331–350. https://doi.org/10.1016/0308-0161(93)90004-D.

- Durban D. Large strain solution for pressurized elasto/plastic tubes // J. Appl. Mech., 1979. vol. 46, no. 1. pp. 228–330. https://doi.org/10.1115/1.3424511.
- Bonn R., Haupt P. Exact solutions for large elastoplastic deformations of a thick-walled tube under internal pressure // Int. J. Plast., 1995. vol. 11, no. 1. pp. 99–118. https://doi. org/10.1016/0749-6419(94)00040-9.
- MacGregor C. W., Coffin L. F., Fisher J. C. The plastic flow of thick-walled tubes with large strains // J. Appl. Phys., 1948. vol. 19, no. 3. pp. 291-297. https://doi.org/10.1063/ 1.1715060.
- Durban D. Finite straining of pressurized compressible elasto-plastic tubes // Int. J. Eng. Sci., 1988. vol. 26, no. 9. pp. 939–950. https://doi.org/10.1016/0020-7225(88)90023-7.
- Durban D., Kubi M. A general solution for the pressurized elastoplastic tube // J. Appl. Mech., 1992. vol. 59, no. 1. pp. 20-26. https://doi.org/10.1115/1.2899431.
- 16. Gao X.-L. Elasto-plastic analysis of an internally pressurized thick-walled cylinder using a strain gradient plasticity theory // Int. J. Solids Struct., 2003. vol. 40, no. 23. pp. 6445–6455. https://doi.org/10.1016/S0020-7683(03)00424-4.
- Darijani H., Kargarnovin M. H., Naghdabadi R. Design of thick-walled cylindrical vessels under internal pressure based on elasto-plastic approach // Mat. Des., 2009. vol. 30, no. 9. pp. 3537–3544. https://doi.org/10.1016/j.matdes.2009.03.010.
- Nejad M. Z., Alamzadeh N., Hadi A. Thermoelastoplastic analysis of FGM rotating thick cylindrical pressure vessels in linear elastic-fully plastic condition // Compos. B. Eng., 2018. vol. 154. pp. 410-422. https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.09.022.
- Coffin L. F., Jr., Shepler P. R., Cherniak G. S. Primary creep in the design of internalpressure vessels // J. Appl. Mech., 1949. vol. 16, no. 3. pp. 229–241. https://doi.org/10. 1115/1.4009970.
- Weir C. D. The creep of thick tubes under internal pressure // J. Appl. Mech., 1957. vol. 24, no. 3. pp. 464–466. https://doi.org/10.1115/1.4011565.
- Sankaranarayanan R. Steady creep of circular cylindrical shells under combined lateral and axial pressures // Int. J. Solids Struct., 1969. vol. 5, no. 1. pp. 17–32. https://doi.org/ 10.1016/0020-7683(69)90066-3.
- 22. Murakami S., Iwatsuki S. Transient creep of circular cylindrical shells // Int. J. Solids Struct., 1969. vol. 11, no. 11. pp. 897–912. https://doi.org/10.1016/0020-7403(69)90016-2.
- Murakami S., Iwatsuki S. Steady-state creep of circular cylindrical shells // Bull. JSME, 1971. vol. 14, no. 73. pp. 615–623. https://doi.org/10.1299/jsme1958.14.615.
- Murakami S., Suzuki K. On the creep analysis of pressurized circular cylindrical shells // Int. J. Non-Linear Mech., 1971. vol. 6, no. 3. pp. 377-392. https://doi.org/10.1016/ 0020-7462(71)90016-3.
- Murakami S., Tanaka E. On the creep buckling of circular cylindrical shells // Int. J. Mech. Sci., 1976. vol. 18, no. 4. pp. 185–194. https://doi.org/10.1016/0020-7403(76)90024-2.
- 26. Pai D. H. Steady-state creep analysis of thick-walled orthotropic cylinders // Int. J. Mech. Sci., 1967. vol. 9, no. 6. pp. 335–348. https://doi.org/10.1016/0020-7403(67)90039-2.
- Bhatnagar N. S., Gupta S. K. Analysis of thick-walled orthotropic cylinder in the theory of creep // J. Phys. Soc. Japan, 1969. vol. 27, no. 6. pp. 1655–1661. https://doi.org/10. 1143/JPSJ.27.1655.
- Bhatnagar N. S., Arya V. K. Large strain creep analysis of thick-walled cylinders // Int. J. Non-Linear Mech., 1974. vol.9, no.2. pp. 127-140. https://doi.org/10.1016/ 0020-7462(74)90004-3.
- Sharma S., Sahni M., Kumar R. Thermo creep transition of transversely isotropic thickwalled rotating cylinder under internal pressure // Int. J. Contemp. Math. Sci., 2010. vol. 5, no. 11. pp. 517–527.

- Singh T., Gupta V. K. Effect of anisotropy on steady state creep in functionally graded cylinder // Compos. Struct., 2011. vol.93, no.2. pp. 747-758. https://doi.org/10.1016/ j.compstruct.2010.08.005.
- Altenbach H., Gorash Y., Naumenko K. Steady-state creep of a pressurized thick cylinder in both the linear and the power law ranges // Acta Mech., 2008. vol. 195, no. 1. pp. 263-274. https://doi.org/10.1007/s00707-007-0546-5.
- 32. Chen J. J., Tu S. T., Xuan F. Z., Wang Z. D. Creep analysis for a functionally graded cylinder subjected to internal and external pressure // J. Strain Anal. Eng. Des., 2007. vol. 42, no. 2. pp. 69–77. https://doi.org/10.1243/03093247JSA237.
- You L. H., Ou H., Zheng Z. Y. Creep deformations and stresses in thick-walled cylindrical vessels of functionally graded materials subjected to internal pressure // Compos. Struct., 2007. vol. 78, no. 2. pp. 285-291. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2005.10.002.
- Jamian S., Sato H., Tsukamoto H., Watanabe Y. Creep Analysis of functionally graded material thick-walled cylinder // Appl. Mech. Mater., 2013. vol. 315. pp. 867-871. https:// doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.315.867.
- Loghman A., Ghorbanpour Arani A., Amir S., Vajedi A. Magnetothermoelastic creep analysis of functionally graded cylinders // Int. J. Pres. Ves. Pip., 2010. vol. 87, no. 7. pp. 389–395. https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2010.05.001.
- 36. Singh T., Gupta V. K. Analysis of steady state creep in Whisker reinforced functionally graded thick cylinder subjected to internal pressure by considering residual stress // Mech. Adv. Mater. Struct., 2014. vol. 21, no. 5. pp. 384–392. https://doi.org/10.1080/15376494. 2012.697600.
- Gupta S. K., Pathak S. Thermo creep transition in a thick-walled circular cylinder under internal pressure // Indian J. Pure Appl. Math., 2001. vol. 32, no. 2. pp. 237–253.
- Sharma S., Sahay I., Kumar R. Creep transition in non homogeneous thick-walled circular cylinder under internal and external pressure // Appl. Math. Sci., 2012. vol. 6, no. 122. pp. 6075–6080.
- 39. Ковтанюк Л. В., Панченко Г. Л. Об изменяющихся механизмах производства больших необратимых деформаций в условиях прямолинейного движения в цилиндрическом слое // Изв. РАН. МТТ, 2020. № 2. С. 10–21. https://doi.org/10.31857/ S0572329920020099.
- 40. Галимзянова К. Н., Ковтанюк Л. В., Панченко Г. Л. Ползучесть и пластическое течение материала сферического вязкоупругопластического слоя при его нагрузке и разгрузке // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2019. Т. 23, № 2. С. 270–283. https://doi.org/10.14498/vsgtu1687.
- 41. Бегун А. С., Ковтанюк Л. В., Лемза А. О. Ползучесть и релаксация напряжений при нагружении и разгрузке цилиндрического слоя с учетом развития и торможения вязкопластического течения // ПМТФ, 2019. Т. 60, № 4 (356). С. 183–193. https://doi.org/ 10.15372/PMTF20190420.
- Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Панченко Г. Л. Ползучесть и пластическое течение материала толстостенной цилиндрической трубы вследствие действия равномерного внутреннего давления // Вестн. ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния, 2020. № 3 (45). С. 72–79. https://doi.org/10.37972/chgpu.2020.91.51.007.
- 43. Фирсов С. В. Необратимые деформации вращающегося цилиндра // Изв. Алт. гос. ун-та., 2018. Т. 102, № 4. С. 114–117. https://doi.org/10.14258/izvasu(2018)4-21.
- 44. Фирсов С. В., Прокудин А. Н. Ползучесть и пластическое течение во вращающемся полом цилиндре // Вестн. ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния, 2019. № 4 (42). С. 45–55. https://doi.org/10.26293/chgpu.2019.42.4.005.
- 45. Фирсов С. В., Прокудин А. Н., Буренин А. А. Ползучесть и пластическое течение во вращающемся цилиндре с жестким включением // Сиб. эсурн. индустр. матем., 2019. T. 22, № 4. С. 121–133. https://doi.org/10.33048/sibjim.2019.22.412.

- 46. Банщикова И. А., Горев Б. В., Сухоруков И. В. Двумерные задачи формообразования стержней в условиях ползучести // ПМТФ, 2002. Т. 43, № 3. С. 129–139.
- 47. Кузнецов Е. Б., Леонов С. С. Методика выбора функций определяющих уравнений ползучести и длительной прочности с одним скалярным параметром поврежденности // ПМТФ, 2016. Т. 57, № 2. С. 202–211. https://doi.org/10.15372/PMTF20160221.
- 48. Буренин А. А., Ткачева А. В. О сборке двухслойной металлической трубы способом горячей посадки // Изв. РАН. МТТ, 2019. № 3. С. 86–99. https://doi.org/10.1134/ S0572329919030073.
- 49. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 2014. 752 с.
- 50. Norton F. H. The Creep of Steel at High Temperatures / Classic Reprint Series. London: Forgotten Books, 2017. 102 pp.

#### MSC: 34B05, 74C10

# Plastic and creep deformations of thick-walled cylinder with a rigid casing under internal pressure

### S. V. Firsov

Institute of Machinery and Metallurgy, KhFRC FEB RAS, 1, Metallurgov street, Komsomolsk-na-Amure, 681005, Russian Federation.

#### Abstract

The creep and plastic flow of cylindrical pressurized vessel with rigid casing was considered. To combine creep and plastic deformations the vessel was heated and subjected to the high inner pressure. The semi-analytical solution for plain strain problem of a thick-walled cylinder with rigid casing in the frame of small strain theory was obtained in this paper. This solution consists of analytical formula for displacement distribution with asking values of pressure and irreversible strains (plastic and creep) and a numerical solution for irreversible strain values. The Norton power law and advanced Mises condition for viscoplasticity, associated with flow rules have been used to describe creep and plastic behavior of medium.

Four stages of the deformation process were considered: pressure increasing, pressure fixed on maximum value for a long time, pressure decreasing and relaxing stage with zero pressure. Two cases of maximum pressure values of 200 MPa and 320 MPa were studied. An additional case of elastoplastic deformation was considered to investigate the influence of creep on the deformational process. It has been observed that creep has a significant influence on stress and strain evolution in medium, especially on stages with maximum and zero pressure. Also, because of the creep plastic flow evolves slower and stoppes earlier on the loading stage. In the unloading stage, the plastic flow starts earlier and affects greater area due to greater irreversible strains. Creep leads to sufficient stress relaxation and stresses for two pressure cases get similar values at the end of the stage with maximum pressure value. At the end of the relaxing stage besides stresses displacement and deformation also became similar for the two cases.

**Keywords:** cylinder, thick-walled tube, tube with a rigid casing, creep and plastic flow, viscoplasticity, internal pressure, plain strain, small strain.

Received:  $23^{rd}$  August, 2021 / Revised:  $30^{th}$  November, 2021 / Accepted:  $6^{th}$  December, 2021 / First online:  $23^{rd}$  December, 2021

# **Research Article**

#### Please cite this paper in press as:

#### Author's Details:

Sergey V. Firsov 🖄 🕒 https://orcid.org/0000-0001-7446-6231 Junior Researcher; e-mail:firsov.s.new@yandex.ru

<sup>©</sup> Authors, 2021

Samara State Technical University, 2021 (Compilation, Design, and Layout)

 Omega Of The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Firsov S. V. Plastic and creep deformations of thick-walled cylinder with a rigid casing under internal pressure, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 4, pp. 696–715. https://doi.org/10.14498/vsgtu1877 (In Russian).

Competing interests. I have no competing interests.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submit the final manuscript to print. I approved the final version of the manuscript.

**Funding.** The work was carried out within the framework of the state task of the KhFRC FEB RAS.

**Acknowledgments.** The author is grateful to the reviewers for carefully reading of the paper and for valuable suggestions and comments.

# References

- 1. Nadai A. Plasticity. New York, London, McGraw Hill Book Comp., 1931, 392 pp.
- 2. Hill R., Lee E. H., Tupper S. J. The theory of combined plastic and elastic deformation with particular reference to a thick tube under internal pressure, *Proc. R. Soc. Lond., Ser. A*, 1947, vol. 191, no. 1026, pp. 278–303. https://doi.org/10.1098/rspa.1947.0116.
- Cook G. The stresses in thick-walled cylinders of mild steel overstrained by internal pressure, Proc. Inst. Mech. Eng., 1934, vol. 126, no. 1, pp. 407–455. https://doi.org/10.1243/PIME\_ PROC\_1934\_126\_019\_02.
- Allen D. N., Sopwith D. G. The stresses and strains in a partly plastic thick tube under internal pressure and end-load, *Proc. R. Soc. Lond., Ser. A*, 1951, vol. 205, no. 1080, pp. 69– 83. https://doi.org/10.1098/rspa.1951.0018.
- Steele M. C. Partially plastic thick-walled cylinder theory, J. Appl. Mech., 1952, vol. 19, no. 2, pp. 133–140. https://doi.org/10.1115/1.4010436.
- Sokolovsky V. V. Teoriia plastichnosti [Theory of Plasticity]. Moscow, Vyssh. Shkola, 1969, 608 pp. (In Russian)
- Chu S. C., Vasilakis J. D. Inelastic behavior of thick-walled cylinders subjected to nonproportionate loading, *Exp. Mech.*, 1973, vol. 13, no. 3, pp. 113–119. https://doi.org/ 10.1007/BF02323968.
- Gao X.-L. An exact elasto-plastic solution for an open-ended thick-walled cylinder of a strain-hardening material, *Int. J. Pres. Ves. Pip.*, 1992, vol. 52, no. 1, pp. 129–144. https:// doi.org/10.1016/0308-0161(92)90064-M.
- Chu S.-C. A more rational approach to the problem of an elastoplastic thick-walled cylinder, J. Franklin Inst., 1972, vol. 294, no. 1, pp. 57–65. https://doi.org/10.1016/ 0016-0032(72)90113-5.
- Gao X.-L. An exact elasto-plastic solution for a closed-end thick-walled cylinder of elastic linear-hardening material with large strains, *Int. J. Pres. Ves. Pip.*, 1993, vol. 56, no. 3, pp. 331–350. https://doi.org/10.1016/0308-0161(93)90004-D.
- Durban D. Large strain solution for pressurized elasto/plastic tubes, J. Appl. Mech., 1979, vol. 46, no. 1, pp. 228–330. https://doi.org/10.1115/1.3424511.
- Bonn R., Haupt P. Exact solutions for large elastoplastic deformations of a thick-walled tube under internal pressure, *Int. J. Plast.*, 1995, vol. 11, no. 1, pp. 99–118. https://doi. org/10.1016/0749-6419(94)00040-9.
- MacGregor C. W., Coffin L. F., Fisher J. C. The plastic flow of thick-walled tubes with large strains, J. Appl. Phys., 1948, vol. 19, no. 3, pp. 291–297. https://doi.org/10.1063/ 1.1715060.
- Durban D. Finite straining of pressurized compressible elasto-plastic tubes, Int. J. Eng. Sci., 1988, vol. 26, no. 9, pp. 939–950. https://doi.org/10.1016/0020-7225(88)90023-7.
- Durban D., Kubi M. A general solution for the pressurized elastoplastic tube, J. Appl. Mech., 1992, vol. 59, no. 1, pp. 20–26. https://doi.org/10.1115/1.2899431.
- Gao X.-L. Elasto-plastic analysis of an internally pressurized thick-walled cylinder using a strain gradient plasticity theory, Int. J. Solids Struct., 2003, vol. 40, no. 23, pp. 6445–6455. https://doi.org/10.1016/S0020-7683(03)00424-4.

- Darijani H., Kargarnovin M. H., Naghdabadi R. Design of thick-walled cylindrical vessels under internal pressure based on elasto-plastic approach, *Mat. Des.*, 2009, vol. 30, no. 9, pp. 3537–3544. https://doi.org/10.1016/j.matdes.2009.03.010.
- Nejad M. Z., Alamzadeh N., Hadi A. Thermoelastoplastic analysis of FGM rotating thick cylindrical pressure vessels in linear elastic-fully plastic condition, *Compos. B. Eng.*, 2018, vol. 154, pp. 410–422. https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.09.022.
- Coffin L. F., Jr., Shepler P. R., Cherniak G. S. Primary creep in the design of internalpressure vessels, J. Appl. Mech., 1949, vol. 16, no. 3, pp. 229–241. https://doi.org/10. 1115/1.4009970.
- Weir C. D. The creep of thick tubes under internal pressure, J. Appl. Mech., 1957, vol. 24, no. 3, pp. 464–466. https://doi.org/10.1115/1.4011565.
- Sankaranarayanan R. Steady creep of circular cylindrical shells under combined lateral and axial pressures, Int. J. Solids Struct., 1969, vol. 5, no. 1, pp. 17–32. https://doi.org/10. 1016/0020-7683(69)90066-3.
- 22. Murakami S., Iwatsuki S. Transient creep of circular cylindrical shells, *Int. J. Solids Struct.*, 1969, vol. 11, no. 11, pp. 897–912. https://doi.org/10.1016/0020-7403(69)90016-2.
- Murakami S., Iwatsuki S. Steady-state creep of circular cylindrical shells, Bull. JSME, 1971, vol. 14, no. 73, pp. 615–623. https://doi.org/10.1299/jsme1958.14.615.
- Murakami S., Suzuki K. On the creep analysis of pressurized circular cylindrical shells, Int. J. Non-Linear Mech., 1971, vol. 6, no. 3, pp. 377–392. https://doi.org/10.1016/ 0020-7462(71)90016-3.
- Murakami S., Tanaka E. On the creep buckling of circular cylindrical shells, Int. J. Mech. Sci., 1976, vol. 18, no. 4, pp. 185–194. https://doi.org/10.1016/0020-7403(76)90024-2.
- 26. Pai D. H. Steady-state creep analysis of thick-walled orthotropic cylinders, Int. J. Mech. Sci., 1967, vol. 9, no. 6, pp. 335–348. https://doi.org/10.1016/0020-7403(67)90039-2.
- Bhatnagar N. S., Gupta S. K. Analysis of thick-walled orthotropic cylinder in the theory of creep, J. Phys. Soc. Japan, 1969, vol. 27, no. 6, pp. 1655–1661. https://doi.org/10.1143/ JPSJ.27.1655.
- Bhatnagar N. S., Arya V. K. Large strain creep analysis of thick-walled cylinders, Int. J. Non-Linear Mech., 1974, vol. 9, no. 2, pp. 127–140. https://doi.org/10.1016/ 0020-7462(74)90004-3.
- Sharma S., Sahni M., Kumar R. Thermo creep transition of transversely isotropic thickwalled rotating cylinder under internal pressure, *Int. J. Contemp. Math. Sci.*, 2010, vol. 5, no. 11, pp. 517–527.
- Singh T., Gupta V. K. Effect of anisotropy on steady state creep in functionally graded cylinder, *Compos. Struct.*, 2011, vol.93, no.2, pp. 747-758. https://doi.org/10.1016/j. compstruct.2010.08.005.
- Altenbach H., Gorash Y., Naumenko K. Steady-state creep of a pressurized thick cylinder in both the linear and the power law ranges, *Acta Mech.*, 2008, vol. 195, no. 1, pp. 263–274. https://doi.org/10.1007/s00707-007-0546-5.
- 32. Chen J. J., Tu S. T., Xuan F. Z., Wang Z. D. Creep analysis for a functionally graded cylinder subjected to internal and external pressure, J. Strain Anal. Eng. Des., 2007, vol. 42, no. 2, pp. 69–77. https://doi.org/10.1243/03093247JSA237.
- You L. H., Ou H., Zheng Z. Y. Creep deformations and stresses in thick-walled cylindrical vessels of functionally graded materials subjected to internal pressure, *Compos. Struct.*, 2007, vol. 78, no. 2, pp. 285–291. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2005.10.002.
- Jamian S., Sato H., Tsukamoto H., Watanabe Y. Creep analysis of functionally graded material thick-walled cylinder, *Appl. Mech. Mater.*, 2013, vol. 315, pp. 867–871. https:// doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.315.867.
- Loghman A., Ghorbanpour Arani A., Amir S., Vajedi A. Magnetothermoelastic creep analysis of functionally graded cylinders, *Int. J. Pres. Ves. Pip.*, 2010, vol. 87, no. 7, pp. 389–395. https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2010.05.001.

- Singh T., Gupta V. K. Analysis of steady state creep in Whisker reinforced functionally graded thick cylinder subjected to internal pressure by considering residual stress, *Mech. Adv. Mater. Struct.*, 2014, vol. 21, no. 5, pp. 384–392. https://doi.org/10.1080/15376494. 2012.697600.
- Gupta S. K., Pathak S. Thermo creep transition in a thick-walled circular cylinder under internal pressure, *Indian J. Pure Appl. Math.*, 2001, vol. 32, no. 2, pp. 237–253.
- Sharma S., Sahay I., Kumar R. Creep transition in non homogeneous thick-walled circular cylinder under internal and external pressure, *Appl. Math. Sci.*, 2012, vol. 6, no. 122, pp. 6075–6080.
- Kovtanyuk L. V., Panchenko G. L. On the changing mechanisms of the production of large irreversible deformations in the conditions of rectilinear motion in a cylindrical layer, *Mech. Solids*, 2020, vol. 55, no. 2, pp. 162–171. https://doi.org/10.3103/S0025654420020132.
- Galimzyanova K. N., Kovtanyuk L. V., Panchenko G. L. Creep and plastic flow of a spherical viscoelastic layer material at its loading and unloading, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ.*, *Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 2, pp. 270–283 (In Russian). https://doi.org/10.14498/vsgtu1687.
- Begun A. S., Kovtanyuk L. V., Lemza A. O. Creep and stress relaxation in the case of loading and unloading of a cylindrical layer with allowance for the development and deceleration of a viscoplastic flow, J. Appl. Mech. Tech. Phys., 2019, vol. 60, no. 4, pp. 748–757. https:// doi.org/10.1134/S0021894419040205.
- 42. Burenin A. A., Kovtanyuk L. V., Panchenko G. L. Creep and plastic flow of a material of a thick-walled cylindrical pipe under the action of uniform internal pressure, Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Ser. Mechanics of Limit State, 2020, no.3 (45), pp. 72–79 (In Russian). https://doi.org/10.37972/chgpu.2020.91.51.007.
- 43. Firsov S. V. Irreversible deformations of a rotating cylinder, *Izv. Altai State Univ.*, 2018, vol. 102, no. 4, pp. 114–117 (In Russian). https://doi.org/10.14258/izvasu(2018)4-21.
- Firsov S. V., Prokudin A. N. Creep and plastic flow in rotating hollow cylinder, Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Ser. Mechanics of Limit State, 2019, no.4 (42), pp. 45–55 (In Russian). https://doi.org/10.26293/chgpu.2019.42.4.005.
- Firsov S. V., Prokudin A. N., Burenin A. A. Creep and plastic flow in a rotating cylinder with a rigid inclusion, J. Appl. Ind. Math., 2019, vol. 13, no. 4, pp. 642–652. https://doi. org/10.1134/S1990478919040070.
- Banshchikova I. A., Gorev B. V., Sukhorukov I. V. Twodimensional problems of beam forming under conditions of creep, J. Appl. Mech. Tech. Phys., 2002, vol. 43, no. 3, pp. 448– 456. https://doi.org/10.1023/A:1015382723827.
- Kuznetsov E. B., Leonov S. S. Technique for selecting the functions of the constitutive equations of creep and long-term strength with one scalar damage parameter, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2016, vol. 57, no. 2, pp. 369–377. https://doi.org/10.1134/ S0021894416020218.
- Burenin A. A., Tkacheva V. E. Assembly of a two-layered metal pipe by using shrink fit, *Mech. Solids*, 2019, vol. 54, no. 4, pp. 559–569. https://doi.org/10.3103/ S0025654419040095.
- 49. Rabotnov Yu. N. Creep Problems in Structural Members. Amsterdam, London, North-Holland Publ. Co., 1969, xiv+822 pp.
- 50. Norton F. H. The Creep of Steel at High Temperatures, Classic Reprint Series. London, Forgotten Books, 2017, 102 pp.