Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2022. Т. 26, № 2. С. 222–258
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1881
EDN: JNGCBE

УДК 517.956.4

Сходимость приближенных решений ядром теплопроводности для уравнения переноса-диффузии в полуплоскости

М. Аоуаоуда[1], *А. Аяди*[1], *Х. Фуджита Яшима*[2]

[1] Университет им. Л. Бен Мхиди,
Алжир, 04000, Оум-эл-Буаги.
[2] Высшая нормальная школа им. А. Джебар,
Алжир, 25000, Константина, Али Менжели.

Аннотация

Рассматривается уравнение параболического типа (уравнение переноса-диффузии), которое используется, например, в задачах распространения загрязняющих веществ в атмосферном воздухе или водной среде. Имеется нескольких классических методов решения этого параболического уравнения, но также хорошо известно и вероятностное представление решения уравнения переноса-диффузии. Поскольку плотность распределения винеровского процесса соответствует ядру уравнения теплопроводности, с использованием ядра теплопроводности и оператора переноса на каждом шаге дискретизации времени можно построить приближенные решения уравнения переноса-диффузии в $\mathbb{R}^d$. В предыдущих работах была доказана равномерная сходимость этих приближенных решений к функции, удовлетворяющей уравнению переноса-диффузии и начальному условию. Так как эти приближенные решения определяются только интегральным оператором и оператором переноса, доказательство их сходимости проводится без использования вероятностных понятий. В данной работе рассматривается уравнение переноса-диффузии в полуплоскости $\mathbb{R}^2_+$ с граничным условием на $\{x_2 = 0\}$

Дифференциальные уравнения и математическая физика
Научная статья

Образец для цитирования
Аоуаоуда М., Аяди А., Фуджита Яшима Х. Сходимость приближенных решений ядром теплопроводности для уравнения переноса-диффузии в полуплоскости // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 2. С. 222–258. EDN: JNGCBE. DOI: 10.14498/vsgtu1881.

Сведения об авторах

Мерием Аоуаоуда https://orcid.org/0000-0002-8826-374X
аспирант-математик; сотрудник лаборатории; лаб. динамических систем и управления; e-mail: meryem.aouaouda@gmail.com

Абделхамид Аяди https://orcid.org/0000-0002-5600-7493
профессор; руководитель исследовательской группы; лаб. динамических систем и управления; e-mail: facmaths@yahoo.fr

Хисао Фуджита Яшима https://orcid.org/0000-0001-9937-8406
профессор; руководитель исследовательской группы; лаб. прикладной математики и дидактики; e-mail: hisafujitayashima@yahoo.com; hisaofujitayashima@qq.com

и доказывается сходимость приближенных решений, построенных ядром теплопроводности и оператором переноса, к функции, удовлетворяющей уравнению переноса-диффузии в $\mathbb{R}^2_+$, начальному и граничному условиям. Для получения этого результата используется метод нечетного продолжения заданных в $\mathbb{R}^2_+$ функций на $\mathbb{R}^2$, поэтому применяются технические приемы предыдущих работ для задач в $\mathbb{R}^d$. Тем не менее из-за наличия граничного условия остается проблема гладкости приближенных решений, для разрешения которой получаются оценки для производных приближенных решений, на которые влияют особенные данные на $\{x_2 = 0\}$.

Ключевые слова: уравнение переноса-диффузии, приближенное решение, ядро теплопроводности.

Получение: 26 августа 2021 г. / Исправление: 5 мая 2022 г. /
Принятие: 23 мая 2022 г. / Публикация онлайн: 1 июня 2022 г.

Введение. Процесс переноса-диффузии веществ в газе или жидкости можно описать уравнением параболического типа

$$\partial_t u(t,x)+v(t,x)\cdot\nabla u(t,x) = \kappa\Delta u(t,x)+f(t,x,u(t,x)), \quad t \geqslant 0,\ x\in\Omega\subset\mathbb{R}^d, \quad (1)$$

где u — плотность вещества, v — вектор скорости переноса, κ — коэффициент диффузии, $f(t,x,u)$ — источник из-за возможной химической реакции и вклад из-за изменения плотности среды, $\nabla = (\partial_{x_1},\cdots,\partial_{x_d})^\top$, Δ — оператор Лапласа (см., например, [1], гл. VI, [2]). Это уравнение широко используется в приложениях, например, в задачах о загрязнении воздуха и воды (см. [3–9] и многие другие). С теоретической точки зрения хорошо известны некоторые методы решения уравнения этого типа, которые можно найти, например, в [10–12]. Также хорошо известно вероятностное представление решения u (см., например, [13], гл. VIII), а в случае, когда f является нелинейной функцией от u, требуются немного более сложные рассуждения (см. [14–16]). Используя вероятностное представление, языком теории вероятностей можно описать поведение решения u при $\kappa\to 0$ (см. [17]).

Так как функция

$$\frac{e^{|x|^2/(4\kappa t)}}{(4\pi\kappa t)^{d/2}}$$

является ядром уравнения теплопроводности $\partial_t u-\kappa\Delta u = 0$, мы считаем, что семейство функций $\{u_k(x)\}_{k=0,1,2,\dots}$, определенных соотношением

$$u_k(x) = \int_{\mathbb{R}^d}\frac{e^{\frac{|y|^2}{4\kappa(t_k-t_{k-1})}}}{(4\pi\kappa(t_k-t_{k-1}))^{d/2}}u_{k-1}(x-(t_k-t_{k-1})v(t_k,x)-y)dy + \\ + f(t_{k-1},x,u_{k-1}(x)), \quad k=1,2,\dots, \quad (2)$$

является естественным приближением решения $u(t,x)$ уравнения (1) в $\mathbb{R}^d$ с начальным условием $u(0,x) = u_0(x)$.

Допуская сходимость определенного в (2) приближения к решению $u(t,x)$, можно интерпретировать его как одну из аналитических версий вероятностного представления решения $u(t,x)$. Действительно, ядро интегрального оператора, использованного в (2), соответствует плотности распределения винеровского процесса. Но поскольку $u_k(x)$ определяются только интегрированием и сложением, свойства приближения (2) и их следствия также могут быть получены на языке математического анализа без использования вероятностных понятий.

Приближение (2) имеет аспекты, немного похожие на метод Эйлера—Маруямы для стохастических уравнений (см. [18]). Действительно, согласно этому методу решение X_t стохастического уравнения

$$dX_t = -v(t,X_t)dt + a(t,X_t)dW_t$$

(где $a(t,x)$ — матрица размера $m \times m'$, а W_t — броуновское движение в $\mathbb{R}^{m'}$) приближается семейством случайных величин $\{X_k\}_{k=0,1,2,\dots}$, определяемых соотношением

$$X_k = X_{k-1} - v(t_{k-1},X_{k-1})(t_k - t_{k-1}) + a(t_{k-1},X_{k-1})[W_{t_k} - W_{t_{k-1}}].$$

Изучена сходимость по математическому ожиданию этого приближения X_k к решению X_t стохастического уравнения [19–21]. Но для построения решения $u(t,x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, уравнения (1) с использованием этого приближения требуется много шагов.

В [22, 23] с использованием дискретизации по времени

$$t_k^{[n]} = k2^{-n}, \quad k = 0,1,2,\dots, \quad n = 1,2,\dots$$

и определением $u^{[n]}(t_k^{[n]},x)$ как в (2) и $u^{[n]}(t,x)$ для $t_{k-1}^{[n]} < t < t_k^{[n]}$ через соотношение

$$u^{[n]}(t,x) = \frac{t_k^{[n]} - t}{2^n} u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]},x) + \frac{t - t_{k-1}^{[n]}}{2^n} u^{[n]}(t_k^{[n]},x)$$

в предположении гладкости данных доказана равномерная сходимость функций $u^{[n]}(t,x)$ и их производных первого и второго порядка по x к решению $u(t,x)$ и его соответствующим производным в $[0,\tau] \times \mathbb{R}^d$ для любого $\tau > 0$.

В настоящей работе уравнение (1) рассматривается в полуплоскости $\mathbb{R}^2_+$ с однородным граничным условием Дирихле. Предполагается, что функция переноса $v(t,x)$ «параллельна» оси x_1. С использованием нечетного продолжения (см., например, [24], гл. III, § 3, п. 2) задача на полуплоскости $\mathbb{R}^2_+$ преобразуется в задачу на целой плоскости $\mathbb{R}^2$, поэтому мы широко используем технические приемы, разработанные в [22, 23]. Тем не менее для оценки гладкости приближенных решений наличие граничного условия значительно усложняет задачу. Для разрешения этой проблемы мы применяем приближение, немного отличное от использованного в [22, 23], а для получения оценок также используем некоторые элементарные свойства обобщенных функций (распределений) (см., например, [25]). В результате использования этих подходов мы получили сходимость приближенных решений к функции, которая удовлетворяет поточечно уравнению, начальному и граничному условиям. Также приводится простой численный эксперимент, показывающий возможность использования полученных результатов для решения конкретных задач математической физики.

Обобщение полученных результатов на случай, когда коэффициент диффузии необязательно постоянен или перенос необязательно «горизонтален», потребует дополнительного исследования.

1. Постановка задачи и основной результат. Основным результатом работы является доказательство сходимости приближенных решений $u^{[n]}(t,x)$, которые мы определим ниже, к функции, удовлетворяющей уравнению

$$\partial_t u(t,x) + v(t,x)\partial_{x_1} u(t,x) = \kappa\Delta u(t,x) + f(t,x,u(t,x)), \quad t>0, \quad x\in\Omega \tag{3}$$

и условиям

$$u(0,x) = u_0(x), \quad x\in\Omega, \tag{4}$$

$$u(t,x_1,0) = 0, \quad t\in\mathbb{R}_+, \quad x_1\in\mathbb{R}, \tag{5}$$

где

$$\Omega = \{x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : x_2>0\}, \tag{6}$$

κ — положительная постоянная, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ — оператор Лапласа. Ниже уточним условия на функции $v(t,x)$, $f(t,x,u)$ и $u_0(x)$.

1.1. Условия на заданные функции. Для уточнения условий будем использовать обозначения

$$D_x^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}}, \qquad D_{x,u}^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\partial u^{\alpha_3}},$$

где

$$|\alpha| = \alpha_1+\alpha_2 \quad \text{для} \;\; \alpha=(\alpha_1,\alpha_2),\; \alpha_1,\alpha_2 = 0,1,2,\ldots,$$

$$|\alpha| = \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \quad \text{для} \;\; \alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),\; \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 = 0,1,2,\ldots.$$

Заданные функции и их производные будут рассматриваться в $\mathbb{R}^2_+ = \overline{\Omega}$ (см. (6)). Для их производных, как обычно, рассматривается непрерывное продолжение на границе $\partial\Omega = \{x_2=0\}$. Через $C_b(\mathbb{R}^2_+)$ (соотв. $C_b(\mathbb{R}^2_+\times\mathbb{R})$) обозначим класс непрерывных ограниченных в $\mathbb{R}^2_+$ (соотв. $\mathbb{R}^2_+\times\mathbb{R}$) функций, а через $C_{b,loc}(\mathbb{R}_+;C_b(\mathbb{R}^2_+))$ (соотв. $C_{b,loc}(\mathbb{R}_+;C_b(\mathbb{R}^2_+\times\mathbb{R}))$) — класс непрерывных в $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^2_+$ (соотв. $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^2_+\times\mathbb{R}$) функций, которые ограничены в $[0,\tau]\times\mathbb{R}^2_+$ (соотв. $[0,\tau]\times\mathbb{R}^2_+\times\mathbb{R}$) при любом $\tau>0$.

Предположим, что для функций $v(t,x)$, $f(t,x,u)$ и $u_0(x)$ выполняется следующее:

$$D_x^\alpha v(t,x) \in C_{b,loc}(\mathbb{R}_+;C_b(\mathbb{R}^2_+)) \qquad \forall\alpha\in\mathbb{N}^2,\; |\alpha|\leqslant 3, \tag{7}$$

$$\partial_t D_x^\alpha v(t,x) \in C_{b,loc}(\mathbb{R}_+;C_b(\mathbb{R}^2_+)) \qquad \forall\alpha\in\mathbb{N}^2,\; |\alpha|\leqslant 2, \tag{8}$$

$$\partial_{x_2} v(t,x)\big|_{x_2=0} = 0, \tag{9}$$

$$\frac{f(t,x,u)}{1+|u|} \in C_{b,loc}(\mathbb{R}_+;C_b(\mathbb{R}^2_+\times\mathbb{R})), \tag{10}$$

$$D^{\alpha}_{x,u} f(t,x,u) \in C_{b,loc}(\mathbb{R}_+; C_b(\mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R})) \qquad \forall \alpha \in \mathbb{N}^2,\ 1 \leqslant |\alpha| \leqslant 3, \tag{11}$$

$$\partial_t D^{\alpha}_{x,u} f(t,x,u) \in C_{b,loc}(\mathbb{R}_+; C_b(\mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R})) \qquad \forall \alpha \in \mathbb{N}^2,\ |\alpha| \leqslant 2,$$

$$f(t, x_1, 0, 0) = 0, \tag{12}$$

$$D^{\alpha}_x u_0(x) \in C_b(\mathbb{R}^2_+) \qquad \forall \alpha \in \mathbb{N}^2,\ |\alpha| \leqslant 3, \tag{13}$$

$$u_0(x_1, 0) = 0 \qquad \forall x_1 \in \mathbb{R}. \tag{14}$$

1.2. Определение приближенных решений. Для определения приближенных решений определим шаги

$$\delta_n = 2^{-n}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

и соответствующую шагам δ_n дискретизацию по времени:

$$0 = t^{[n]}_0 < t^{[n]}_1 < \cdots < t^{[n]}_{k-1} < t^{[n]}_k < \cdots, \quad t^{[n]}_k = k\delta_n.$$

Для каждого $n = 1, 2, \ldots$ положим также

$$\vartheta_n(r) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\delta_n\kappa}} \exp\Big(-\frac{r^2}{4\delta_n\kappa}\Big), \quad r \in \mathbb{R}, \tag{15}$$

$$\Theta_n(x) = \Theta_n(x_1, x_2) = \vartheta_n(x_1)\vartheta_n(x_2), \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Через $\Lambda(\cdot)$ обозначим оператор нечетного продолжения заданной на $\{r > 0\}$ функции на $\mathbb{R}$:

$$\Lambda(\varphi(\,\cdot\,))(r) = \begin{cases} \varphi(r), & r > 0, \\ 0, & r = 0, \\ -\varphi(-r), & r < 0. \end{cases}$$

Полезно напомнить, что решение $\eta(t,r)$ задачи

$$\partial_t \eta(t,r) = \kappa \partial_r^2 \eta(t,r), \quad t > 0, \quad r > 0;$$

$$\eta(0,r) = \psi(r), \quad r > 0; \qquad \eta(t,0) = 0, \quad t > 0$$

может быть построено как сужение $\eta = \widetilde{\eta}\big|_{\{r \geqslant 0\}}$ на $\{r \geqslant 0\}$ решения $\widetilde{\eta}(t,r)$ задачи

$$\partial_t \widetilde{\eta}(t,r) = \kappa \partial_r^2 \widetilde{\eta}(t,r), \quad t > 0, \quad r \in \mathbb{R},$$

$$\widetilde{\eta}(0,r) = \Lambda(\psi(\,\cdot\,))(r) = \begin{cases} \psi(r), & r > 0, \\ 0, & r = 0, \\ -\psi(-r), & r < 0 \end{cases}$$

(подробности см., например, в [24, гл. III, § 3, п. 2]).

Пусть $u_0(x)$ — непрерывная ограниченная функция, определенная в Ω. Используя оператор $\Lambda(\,\cdot\,)$, определим приближенные решения $u^{[n]}(t,x)$, $n = 1, 2, \ldots$, соотношениями

$$u^{[n]}(t^{[n]}_0, x) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{16}$$

$$
\begin{aligned}
&u^{[n]}(t_k^{[n]},x)=\\
&=\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\vartheta_n(y_1)\vartheta_n(y_2)\Lambda\big(u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]},x_1-\delta_n v(t_k^{[n]},x)-y_1,\,\cdot\,)\big)(x_2-y_2)dy_1dy_2+\\
&+\delta_n\int_{\mathbb{R}}\vartheta_n(y_1)\bigg[\int_{-\infty}^{x_2}\vartheta_n(y_2)f\big(t_{k-1}^{[n]},x_1-y_1,x_2-y_2,u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]},x_1-y_1,x_2-y_2)\big)dy_2+\\
&+\int_{x_2}^{\infty}\vartheta_n(y_2)\big(-f\big(t_{k-1}^{[n]},x_1-y_1,y_2-x_2,u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]},x_1-y_1,y_2-x_2)\big)\big)dy_2\bigg]dy_1,\\
&\qquad x\in\Omega,\quad k=1,2,\ldots,
\end{aligned}
\tag{17}
$$

$$
u^{[n]}(t,x)=\frac{t_k^{[n]}-t}{\delta_n}u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]},x)+\frac{t-t_{k-1}^{[n]}}{\delta_n}u^{[n]}(t_k^{[n]},x),\quad t_{k-1}^{[n]}\leqslant t\leqslant t_k^{[n]},\quad x\in\Omega.
\tag{18}
$$

Функции $u^{[n]}(t,x)$, определенные соотношениями (16), (17) и (18), назовем приближенными решениями.

1.3. Основной результат. Для определенных в п. 1.2 приближенных решений справедливо следующее утверждение.

Теорема A. *Если функции $v(t,x)$, $f(t,x,u)$ и $u_0(x)$ удовлетворяют условиям (7)–(14), то каково бы ни было $\tau>0$, определенные в (16)–(18) функции $u^{[n]}(t,x)$ и их первые производные по x_1 и x_2 сходятся равномерно на $[0,\tau]\times\Omega$, а их вторые производные по x_1 и x_2 сходятся поточечно при всяких (t,x), $t>0$, $x\in\Omega$, причем предельная функция $u(t,x)$ удовлетворяет уравнению (3) и условиям (4) и (5).*

В следующих разделах изложено доказательство теоремы, которое, по существу, будет проводиться на продолжении $U^{[n]}(t,x)$ функций $u^{[n]}(t,x)$ на $\mathbb{R}^2$. После некоторых замечаний, необходимых для последующих шагов, установим оценки $U^{[n]}(t,x)$ и их производных, а затем, используя эти оценки, докажем сходимость $U^{[n]}(t,x)$ и их производных по x_1 и x_2 первого и второго порядка. Наконец, путем предельного перехода докажем, что предельная функция удовлетворяет уравнению переноса-диффузии.

2. Преобразование задачи и некоторые предварительные замечания. Если положить

$$
U_0(x)=\big(\Lambda(u_0(x_1,\,\cdot\,))\big)(x_2),\qquad x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,
\tag{19}
$$

$$
V(t,x_1,x_2)=V(t,x_1,-x_2)=v(t,x_1,x_2),\quad t\geqslant 0,\quad x_1\in\mathbb{R},\quad x_2\geqslant 0,
\tag{20}
$$

$$
F(t,x_1,x_2,U)=\begin{cases} f(t,x_1,x_2,U), & x_2>0,\\ 0, & x_2=0,\\ -f(t,x_1,-x_2,-U), & x_2<0,\end{cases}
$$
$$
t\geqslant 0,\quad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,\quad U\in\mathbb{R},
\tag{21}
$$

то приближенные решения $u^{[n]}(t,x)$ можно определять другим способом. Для этого определим

$$
U^{[n]}(t_0^{[n]},x)=U_0(x),\quad x\in\mathbb{R}^2,
\tag{22}
$$

$$U^{[n]}(t_k^{[n]}, x) =$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \vartheta_n(y_1)\vartheta_n(y_2) U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x_1 - \delta_n V(t_k^{[n]}, x) - y_1, x_2 - y_2) dy_1 dy_2 +$$
$$+ \delta_n \int_{\mathbb{R}^2} \Theta_n(y) F(t_{k-1}^{[n]}, x - y, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x - y)) dy, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{23}$$

$$U^{[n]}(t, x) = \frac{t_k^{[n]} - t}{\delta_n} U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) + \frac{t - t_{k-1}^{[n]}}{\delta_n} U^{[n]}(t_k^{[n]}, x), \quad t_{k-1}^{[n]} \leqslant t \leqslant t_k^{[n]}, \quad x \in \mathbb{R}^2. \tag{24}$$

Напишем первое слагаемое правой части (23) в виде

$$\int_{\mathbb{R}^2} \Theta_n(y) U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x - \delta_n V(t_k^{[n]}, x)\vec{e}_1 - y) dy, \quad \vec{e}_1 = (1, 0)^\top \tag{25}$$

тогда, когда это удобно.

Напомним, что из условия (9) и определения (20) следует, что $V(t, x)$, $\partial_{x_2} V(t, x)$ и $\partial_{x_2}^2 V(t, x)$ непрерывны в точках $\{x_2 = 0\}$.

Сужение $U^{[n]}(t, x)$ на Ω совпадает с определенным в (16)–(18) приближенным решением $u^{[n]}(t, x)$. Чтобы убедиться в этом совпадении, вспомним следующее соотношение.

Замечание 1. *Предположим, что $U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)$ непрерывна и ограничена в $\mathbb{R}^2$ и нечетна по x_2. Тогда $U^{[n]}(t_k^{[n]}, x)$, определенная в (23), также непрерывна и ограничена в $\mathbb{R}^2$ и нечетна по x_2.*

Доказательство. Заметим, что согласно (21), если $x_2 < 0$, то имеем

$$F(t, x_1, x_2, U) = -F(t, x_1, -x_2, -U).$$

Итак, учитывая нечетность $U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)$, имеем

$$F\big(t_{k-1}^{[n]}, x_1, x_2, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x_1, x_2)\big) = -F\big(t_{k-1}^{[n]}, x_1, -x_2, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x_1, -x_2)\big).$$

Значит, функция $F\big(t_{k-1}^{[n]}, x_1, x_2, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x_1, x_2)\big)$ нечетна по x_2. Таким образом, учитывая соотношение $\vartheta_n(y_2) = \vartheta_n(-y_2)$, имеем

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \vartheta_n(y_1)\vartheta_n(y_2) F\big(t_{k-1}^{[n]}, x_1 - y_1, x_2 - y_2, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x_1 - y_1, x_2 - y_2)\big) dy_1 dy_2 =$$
$$= -\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \vartheta_n(y_1)\vartheta_n(y_2) F\big(t_{k-1}^{[n]}, x_1 - y_1, -x_2 - y_2, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x_1 - y_1, -x_2 - y_2)\big) dy_1 dy_2. \tag{26}$$

Напомним также, что согласно нашей гипотезе функция $U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)$ непрерывна по x и нечетна по x_2, поэтому $U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x_1, 0) = 0$. Таким образом, в силу (21) и (12) получим

$$F\big(t_{k-1}^{[n]}, x_1, 0, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x_1, 0)\big) = 0 = f\big(t_{k-1}^{[n]}, x_1, 0, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x_1, 0)\big). \tag{27}$$

Учитывая также (10), видим, что функция $F\bigl(t^{[n]}_{k-1}, x, U^{[n]}(t^{[n]}_{k-1}, x)\bigr)$ непрерывна по $x \in \mathbb{R}^2_+$, а в силу симметрии между x_2 и $-x_2$ она непрерывна в $\mathbb{R}^2$. Согласно условию (10), определению (21) и гипотезе ограниченности $U^{[n]}(t^{[n]}_{k-1}, x)$, функция $F\bigl(t^{[n]}_{k-1}, x, U^{[n]}(t^{[n]}_{k-1}, x)\bigr)$ ограничена.

С другой стороны, поскольку $U^{[n]}(t^{[n]}_{k-1}, x_1, x_2)$ нечетна по x_2, учитывая опять соотношение $\vartheta_n(y_2) = \vartheta_n(-y_2)$, имеем

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \vartheta_n(y_1)\vartheta_n(y_2)U^{[n]}\bigl(t^{[n]}_{k-1}, x_1 - \delta_n V(t^{[n]}_k, x_1, x_2) - y_1, x_2 - y_2\bigr)dy_1dy_2 =$$
$$= -\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \vartheta_n(y_1)\vartheta_n(y_2)U^{[n]}\bigl(t^{[n]}_{k-1}, x_1 - \delta_n V(t^{[n]}_k, x_1, -x_2) - y_1, -x_2 - y_2\bigr)dy_1dy_2. \tag{28}$$

Что касается ограниченности и непрерывности, из предположения об ограниченности и непрерывности $U^{[n]}(t^{[n]}_{k-1}, x)$ и $v(t,x)$ (и, следовательно, $V(t,x)$) выводим, что выражение

$$\int_{\mathbb{R}^2} \Theta_n(y)U^{[n]}\bigl(t^{[n]}_{k-1}, x - \delta_n V(t^{[n]}_k, x)\vec{e}_1 - y\bigr)dy$$

ограничено и непрерывно по $x \in \mathbb{R}^2$.

Оба слагаемых правой части (23) непрерывны и ограничены в $\mathbb{R}^2$ и нечетны по x_2 (см (26), (28)), так же как и их сумма, что и требовалось доказать. □

Напомним, что функция $F(t, x, U)$, определенная в (21), необязательно непрерывна в точках $(x_1, 0)$. Поэтому, чтобы доказать непрерывность функции $F\bigl(t^{[n]}_{k-1}, x, U^{[n]}(t^{[n]}_{k-1}, x)\bigr)$, нам нужно равенство (27).

Утверждение замечания 1 и рассуждения, используемые при его доказательстве, позволяют сформулировать

Замечание 2. *Функции $U^{[n]}(t,x)$, определенные в (22)–(24), непрерывны и ограничены в $\mathbb{R}^2$ и нечетны по x_2:*

$$U^{[n]}(t, x_1, x_2) = -U^{[n]}(t, x_1, -x_2), \quad t \geqslant 0, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

в частности

$$U^{[n]}(t, x_1, 0) = 0 \quad \forall (t, x_1) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}. \tag{29}$$

Кроме того, имеет место равенство

$$U^{[n]}(t, x_1, x_2) = (\Lambda(u^{[n]}(t, x_1, \,\cdot\,)))(x_2), \quad t \geqslant 0, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \tag{30}$$

где $u^{[n]}(t,x)$ — функция, определенная в (16)–(18).

Доказательство. Напомним, что согласно определениям (19), (22) и условиям (13)–(14) функция $U^{[n]}(t^{[n]}_0, x)$ непрерывна и ограничена в $\mathbb{R}^2$ и нечетна по x_2. Поэтому из утверждения замечания 1 следует, что для всех $k \in \mathbb{N}$ функция $U^{[n]}(t^{[n]}_k, x)$ непрерывна и ограничена в $\mathbb{R}^2$ и нечетна по x_2.

Из определения (24) следует также, что при любом фиксированном $t \in \mathbb{R}_+$ функция $U^{[n]}(t, x)$ непрерывна и ограничена в $\mathbb{R}^2$ и нечетна по x_2.

Рассуждая как при доказательстве замечания 1, нетрудно увидеть, что если

$$U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x_1, x_2) = \big(\Lambda(u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x_1, \,\cdot\,))\big)(x_2), \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

то

$$U^{[n]}(t_k^{[n]}, x_1, x_2) = \big(\Lambda(u^{[n]}(t_k^{[n]}, x_1, \,\cdot\,))\big)(x_2), \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Определения (18) и (24) позволяют получить (30). □

Равенство (30) позволяет определить $u^{[n]}(t, x)$ соотношением

$$u^{[n]}(t, x_1, x_2) = U^{[n]}(t, x_1, x_2), \quad t \geqslant 0, \quad x_1 \in \mathbb{R}, \quad x_2 > 0. \tag{31}$$

В дальнейшем докажем сходимость $U^{[n]}(t, x)$ при $n \to \infty$. Ясно, что из этого факта в силу равенства (31) следует сходимость $u^{[n]}(t, x)$.

3. Ограниченность приближенных решений и их производных. В этом разделе докажем ограниченность приближенных решений $U^{[n]}(t, x)$ и их производных. Для этого воспользуемся приемом из [22, 23] с учетом того факта, что нам необходимо учитывать поведение производных $U^{[n]}(t, x)$, вызванное специфическими условиями для $U_0(x)$ и $F(t, x, U)$ на $\{x_2 = 0\}$.

Для доказательства следующих лемм введем обозначение

$$\tau_\delta = \tau + \delta_1, \quad \tau > 0. \tag{32}$$

Лемма 1. *Пусть выполнены условия теоремы A. Тогда существует функция $\Phi_0(t)$, которая является непрерывной на $\mathbb{R}_+$, возрастающей независимой от n и такой, что*

$$\sup_{x \in \Omega} |U^{[n]}(t, x)| \leqslant \Phi_0(t). \tag{33}$$

Доказательство. Пусть $\tau > 0$. Положим

$$A_k^{[0,n]} = \sup_{x \in \mathbb{R}^2} |U^{[n]}(t_k^{[n]}, x)|, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad k \leqslant \frac{\tau_\delta}{\delta_n},$$

$$C_f = \sup_{(t,x,U) \in [0,\tau_\delta] \times \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}} \frac{|F(t, x, U)|}{1 + |U|}.$$

Так как

$$\int_{\mathbb{R}^2} \Theta_n(y) dy = \int_{\mathbb{R}^2} |\Theta_n(y)| dy = 1,$$

имеем

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} \Theta_n(y) U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x - \delta_n V(t_k^{[n]}, x)\vec{e}_1 - y) dy \right| \leqslant A_{k-1}^{[0,n]},$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} \Theta_n(y) F\big(t_{k-1}^{[n]}, x - y, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x - y)\big) dy \right| \leqslant C_f (1 + A_{k-1}^{[0,n]}).$$

Следовательно, из (23) получим

$$A_k^{[0,n]} \leqslant (1+\delta_n C_f) A_{k-1}^{[0,n]} + \delta_n C_f.$$

Отсюда с учетом соотношения $t_k^{[n]} = k\delta_n$ следует

$$A_k^{[0,n]} \leqslant A_0^{[0,n]}(1+\delta_n C_f)^k + \delta_n C_f \sum_{j=1}^{k} (1+\delta_n C_f)^{k-j} \leqslant A_0^{[0,n]} e^{t_k^{[n]} C_f} + e^{t_k^{[n]} C_f} - 1 \quad (34)$$

для $t_k^{[n]} \leqslant \tau_\delta$. Так как $A_0^{[0,n]} = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^2} |U_0(x)|$ не зависит от n, учитывая определение (24) и произвольность $\tau > 0$, из (34) выведем существование независимой от n функции $\Phi_0(t)$, которая удовлетворяет неравенству (33). $\square$

Лемма 2. *Пусть выполнены условия теоремы A. Тогда существует функция $\Phi_1(t)$, которая является непрерывной на $\mathbb{R}_+$, возрастающей, независимой от n и такой, что*

$$\sum_{i=1}^{2} \sup_{x\in\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} U^{[n]}(t,x) \right| \leqslant \Phi_1(t). \quad (35)$$

Доказательство. Пусть $\tau > 0$. Положим

$$w_{i,k}^{[1,n]}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} U^{[n]}(t_k^{[n]}, x), \quad i = 1,2, \quad k = 0,1,2,\dots, \quad k \leqslant \frac{\tau_\delta}{\delta_n}. \quad (36)$$

Так как дифференциальный оператор ∂_{x_i} коммутирует со сверткой, вычислив производную по x_i обеих частей (23), получим

$$\begin{aligned} w_{i,k}^{[1,n]}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y) \Big[w_{i,k-1}^{[1,n]}(\xi(x,y)) - \delta_n \frac{\partial V(t_k^{[n]}, x)}{\partial x_i} w_{1,k-1}^{[1,n]}(\xi(x,y)) \Big] dy \, + \\ + \delta_n \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y) \Big[\frac{\partial F(t_k^{[n]}, \xi, U^{[n]}(t_k^{[n]}, x))}{\partial \xi_i} \Big|_{\xi = x-y} + \\ + \frac{\partial F(t_k^{[n]}, x-y, U)}{\partial U} \Big|_{U = U^{[n]}(t_k^{[n]}, x-y)} w_{i,k-1}^{[1,n]}(x-y) \Big] dy, \quad (37) \end{aligned}$$

где

$$\xi(x,y) = x - \delta_n V(t_k^{[n]}, x)\vec{e}_1 - y. \quad (38)$$

Из равенства (37) и условий теоремы A следует, что если положим

$$A_k^{[1,n]} = \sum_{i=1}^{2} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |w_{i,k}^{[1,n]}(x)|,$$

то аналогично доказательству леммы 1 получим

$$A_k^{[1,n]} \leqslant (1+\delta_n C) A_{k-1}^{[1,n]} + \delta_n C, \quad (39)$$

где C — независимая от n постоянная. Учитывая, что

$$A_0^{[1,n]} = \sum_{i=1}^{2} \sup_{x\in\Omega} |\partial_{x_i} u_0(x)|$$

не зависит от n, аналогично доказательству леммы 1 из (39) получим существование функции $\Phi_1(t)$, удовлетворяющей неравенству (35). □

Чтобы оценить производные второго порядка функции $U^{[n]}(t,x)$ по x, напомним, что согласно условиям (13), (14) (см. также (19) и (22)), имеем

$$\lim_{x_2\to 0^+} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} U^{[n]}(t_0^{[n]}, x_1, x_2) = u_{00}''(x_1), \qquad \lim_{x_2\to 0^-} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} U^{[n]}(t_0^{[n]}, x_1, x_2) = -u_{00}''(x_1),$$

где

$$u_{00}''(x_1) = \lim_{x_2\to 0^+} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} u_0(x_1,x_2), \tag{40}$$

а вообще $u_{00}''(x_1)$ не равняется нулю, поэтому $\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} U^{[n]}(t,x)$ не определяется при $0 \leqslant t < t_1^{[n]}$, $x_2 = 0$. Но так как $u_{00}''(x_1)$ равномерно ограничен, это не вызывает трудностей для оценки $\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} U^{[n]}(t,x)$. Для упрощения записи условимся считать, что

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} U^{[n]}(t,x)\Big|_{x_2=0} = 0, \quad 0 \leqslant t < t_1^{[n]} = \delta_n.$$

Лемма 3. *Пусть выполнены условия теоремы A. Тогда существует функция $\Phi_2(t)$, которая является непрерывной на $\mathbb{R}_+$, возрастающей, независимой от n и такой, что*

$$\sum_{|\alpha|=2} \sup_{x\in\mathbb{R}^2} \left| D_x^\alpha U^{[n]}(t,x) \right| \leqslant \Phi_2(t). \tag{41}$$

Доказательство. Пусть $\tau > 0$. Для $\alpha \in \{(2,0),(1,1),(0,2)\}$ положим

$$w_{\alpha,k}^{[2,n]}(x) = D_x^\alpha U^{[n]}(t_k^{[n]}, x), \quad k = 0,1,2,\ldots, \quad k \leqslant \frac{\tau_\delta}{\delta_n}.$$

Используя введенное в (38) обозначение $\xi(x,y)$, имеем

$$\begin{aligned} D_x^\alpha U^{[n]}\big(t_{k-1}^{[n]}, \xi(x,y)\big) &= w_{\alpha,k-1}^{[2,n]}(\xi(x,y)) + \\ &+ \sum_{|\beta|=2} \sum_{m'=1}^{2} (-\delta_n)^{m'} P_{\beta,m'}(DV) w_{\beta,k-1}^{[2,n]}(\xi(x,y)) - \\ &- \delta_n w_{1,k-1}^{[1,n]}(\xi(x,y)) D^\alpha V(t_k^{[n]}, x), \end{aligned} \tag{42}$$

$$\begin{aligned} D_x^\alpha F\big(t_{k-1}^{[n]}, x, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)\big) &= \\ &= \frac{\partial}{\partial U} F\big(t_{k-1}^{[n]}, x, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)\big) w_{\alpha,k-1}^{[2,n]}(x) + R(DF, DU^{[n]}), \end{aligned} \tag{43}$$

где $P_{\beta,m'}(DV)$ — сумма произведений m' производных первого порядка функции V по x_1 или x_2, а $R(DF, DU^{[n]})$ — сумма производных второго порядка функции F, возможно, умноженных на производные первого порядка функции $U^{[n]}$ (здесь $w^{[1,n]}_{1,k-1}(\cdot)$ — функция, определенная в (36)). В случае $\alpha = (0, 2)$, как правило, производная $D^\alpha_x F$ в (43) не определена в точках $x \in \{x_2 = 0\}$. Но так как $\partial_{x_2} F$ непрерывна, значение производной $\partial^2_{x_2} F$, которое не определяется на одной линии, не влияет на результат вычисления интеграла на $\mathbb{R}^2$, который будем рассматривать для мажорирования $|D^\alpha_x U^{[n]}(t^{[n]}_k, x)|$.

Положим
$$A^{[2,n]}_k = \sum_{|\alpha|=2} \sup_{x\in\mathbb{R}^2} |w^{[2,n]}_{\alpha,k}(x)|.$$

Применяя дифференциальный оператор D^α к обеим частям (23), подставляя выражения (42), (43) под интеграл правой части (23) и принимая во внимание условия теоремы *A* и результат леммы 2, получим неравенство
$$A^{[2,n]}_k \leqslant (1 + \delta_n C_1) A^{[2,n]}_{k-1} + \delta_n R_1(t^{[n]}_k)$$
с независимой от n постоянной C_1 и возрастающей непрерывной функцией $R_1(t)$. Рассуждая аналогично доказательству лемм 1 и 2, из последнего неравенства обычным способом получим функцию $\Phi_2(t)$, удовлетворяющую (41). □

Лемма 4. *Пусть выполнены условия теоремы A. Тогда существуют функция $\Phi_3(t)$ и постоянная $\overline{C}_3$, удовлетворяющие следующим условиям:*

i) $\Phi_3(t)$ не зависит от n и является непрерывной на $\mathbb{R}_+$ и возрастающей;

ii) $\overline{C}_3$ не зависит от n;

iii) каково бы ни было $\varepsilon_1 > 0$, существует такое число $\overline{n}(\varepsilon_1) \in \mathbb{N}$, что при любом $n \geqslant \overline{n}(\varepsilon_1)$ справедливо неравенство
$$\sum_{|\alpha|=3} \sup_{x\in\mathbb{R}^2} \bigl|D^\alpha_x U^{[n]}(t, x)\bigr| \leqslant \Phi_3(t) + \frac{1}{\sqrt{t}} \overline{C}_3, \quad t \geqslant \varepsilon_1. \tag{44}$$

Замечание 3. *При каждом $\varepsilon_1 > 0$ существует убывающая функция $c_{\varepsilon_1}(\varrho)$, $\varrho > 0$, такая, что*
$$\lim_{\varrho\to 0^+} c_{\varepsilon_1}(\varrho) = +\infty, \quad \lim_{\varrho\to\infty} c_{\varepsilon_1}(\varrho) = 0;$$
$$\sum_{|\alpha|=3} \sup_{|x_2|\geqslant\varrho} |D^\alpha_x U^{[n]}(t, x)| \leqslant \Phi_3(t) + c_{\varepsilon_1}(\varrho), \qquad 0 \leqslant t \leqslant \varepsilon_1.$$

Доказательство леммы 4. Введем вспомогательные функции $\nu(x)$ и $H_{[n]k}(x)$. Функция $\nu(x) = \nu(x_1, x_2)$ определяется соотношением
$$\nu(x_1, x_2) = \begin{cases} u''_{00}(x_1)\zeta(x_2)\dfrac{x_2^2}{2}, & x_2 \geqslant 0, \\ -u''_{00}(x_1)\zeta(-x_2)\dfrac{x_2^2}{2}, & x_2 \leqslant 0, \end{cases} \tag{45}$$

где $u''_{00}(x_1)$ — определенное в (40) значение, а $\zeta(x_2)$ — убывающая функция класса $C^\infty(\mathbb{R}_+)$, такая, что

$$\zeta(x_2) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x_2 \leqslant 1, \\ 0, & x_2 \geqslant 2. \end{cases}$$

Функция $H_{[n]k}(x) = H_{[n]k}(x_1, x_2)$ определяется соотношением

$$H_{[n]k}(x_1, x_2) = \begin{cases} \lim\limits_{r\to 0^+} \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} F\big(t_k^{[n]}, x_1, r, U^{[n]}(t_k^{[n]}, x_1, r)\big), & x_2 > 0, \\ 0, & x_2 = 0, \\ \lim\limits_{r\to 0^-} \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} F\big(t_k^{[n]}, x_1, r, U^{[n]}(t_k^{[n]}, x_1, r)\big), & x_2 < 0. \end{cases} \tag{46}$$

Нетрудно видеть, что свойства, употребленные в доказательстве леммы 3, гарантируют существование пределов, находящихся в правой части (46). Положим также

$$H'_{[n]k}(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2} H_{[n]k}(x_1, x_2).$$

Здесь производная должна пониматься как обобщенная функция. Как хорошо известно, $H'_{[n]k}(x_1, x_2)$ можно выражать с помощью δ-функции Дирака. Но чтобы избежать неоднозначностей из-за слишком похожих символов, мы используем обозначение $H'_{[n]k}(x_1, x_2)$.

Введем оператор

$$G_n(\varphi)(x) = G_{n,k'}(\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \Theta_n(y)\varphi(x - \delta_n V(t_{k'}^{[n]}, x)\vec{e}_1 - y)dy. \tag{47}$$

Даже если оператор $G_{n,k'}$ зависит от $t_{k'}^{[n]}$, для упрощения записи мы пишем

$$G_n^1(\varphi)(x) = G_n(\varphi)(x) = G_{n,k'}(\varphi)(x), \quad G_n^{k+1}(\varphi)(x) = G_n(G_n^k(\varphi))(x).$$

Действительно, зависимость оператора $G_{n,k'}$ от $t_{k'}^{[n]}$ не влияет на его основные свойства, которые мы будем использовать. Используя оператор G_n, определим

$$\widetilde{z}_{\alpha,k}^{[3,n]}(x) = D_x^\alpha(G_n^k \nu)(x)$$

и разложим $D_x^\alpha U^{[n]}(t_k^{[n]}, x)$ на $\widetilde{w}_{\alpha,k}^{[3,n]}(x)$ и $\widetilde{z}_{\alpha,k}^{[3,n]}(x)$:

$$D_x^\alpha U^{[n]}(t_k^{[n]}, x) = \widetilde{w}_{\alpha,k}^{[3,n]}(x) + \widetilde{z}_{\alpha,k}^{[3,n]}(x). \tag{48}$$

Сначала рассмотрим вклад производной первого интегрального слагаемого правой части (23). Рассуждая аналогично (42) и принимая во внимание (48), имеем

$$D_x^\alpha U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, \xi(x, y)) = \widetilde{w}_{\alpha,k-1}^{[3,n]}(\xi(x, y)) + \widetilde{z}_{\alpha,k-1}^{[3,n]}(\xi(x, y)) +$$

$$+\sum_{|\beta|=3}\sum_{m'=1}^{3}(-\delta_n)^{m'}P_{\alpha,\beta,m'}(DV)\big(\widetilde{w}^{[3,n]}_{\beta,k-1}(\xi(x,y))+\widetilde{z}^{[3,n]}_{\beta,k-1}(\xi(x,y))\big)+$$

$$+\sum_{1\leqslant|\beta|\leqslant 2}\sum_{m'=1}^{2}(-\delta_n)^{m'}Q_{\alpha,\beta,m'}(DV)w^{[|\beta|,n]}_{\beta,k-1}(\xi(x,y)). \quad (49)$$

Здесь $\xi(x,y)$ — введенная в (38) функция, $P_{\alpha,\beta,m'}(DV)$ — сумма произведений m' производных первого порядка функции V по x_1 или x_2, $Q_{\alpha,\beta,m'}(DV)$ — сумма произведений m' производных q-го порядка функции V по x_1 или x_2, $q\leqslant 3$. Напомним, что поскольку перенос $V(t,x)\vec{e}_1$ идет только в направлении x_1, вычисление производной сложной функции (от $U^{[n]}$ и V) показывает, что для всех α, $|\alpha|=3$, и для всех $x\in\mathbb{R}^2$ имеем

$$P_{\alpha,(0,3),m'}(DV)=0. \quad (50)$$

Что касается вклада производной второго интегрального слагаемого правой части (23), напомним, что из условия (11) относительно гладкости функции $f(t,x,u)$ и нечетного продолжения с условием (12) с учетом соотношения (29) следует, что $\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}F(t^{[n]}_{k-1},x,U^{[n]}(t^{[n]}_{k-1},x))$ непрерывна и в точках $\{x_2=0\}$, и, следовательно, даже если $\frac{\partial^3}{\partial x_1\partial x_2^2}F(t^{[n]}_{k-1},x,U^{[n]}(t^{[n]}_{k-1},x))$ не определена в точках $\{x_2=0\}$, мы можем пренебречь этим тогда, когда выполняем интегрирование.

С другой стороны, предельные значения

$$\lim_{x_2\to 0^+}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}F(t^{[n]}_k,x_1,x_2,U^{[n]}(t^{[n]}_k,x_1,x_2))$$

и

$$\lim_{x_2\to 0^-}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}F(t^{[n]}_k,x_1,x_2,U^{[n]}(t^{[n]}_k,x_1,x_2)),$$

как правило, не совпадают. Следовательно, когда выполняем интегрирование функции

$$\frac{\partial^3}{\partial x_2^3}F(t^{[n]}_k,x_1,x_2,U^{[n]}(t^{[n]}_k,x_1,x_2)),$$

нужно рассмотреть обобщенную функцию, имеющую ненулевую меру, сосредоточенную на $\{x_2=0\}$. Для этого нам удобно отделить часть производной $D^\alpha_x F(t^{[n]}_{k-1},x,U^{[n]}(t^{[n]}_{k-1},x))$ на $\{x_2=0\}$ от ее части на $\mathbb{R}^2\backslash\{x_2=0\}$. Ясно, что часть на $\{x_2=0\}$ должна рассматриваться как обобщенная функция. Итак, рассуждая аналогично (43), имеем

$$D^\alpha_x F(t^{[n]}_{k-1},x,U^{[n]}(t^{[n]}_{k-1},x))=$$
$$=\Big[\frac{\partial}{\partial U}F(t^{[n]}_{k-1},x,U^{[n]}(t^{[n]}_{k-1},x))(\widetilde{w}^{[3,n]}_{\alpha,k-1}(x)+\widetilde{z}^{[3,n]}_{\alpha,k-1}(x))+$$
$$+R_\alpha(DF,DU^{[n]})\Big]_{\mathbb{R}^2\backslash\{x_2=0\}}+I_{\alpha,k-1}(x),$$

где $R_\alpha(DF, DU^{[n]})$ — сумма произведений производных первого, второго или третьего порядка функции F и производных первого или второго порядка функции $U^{[n]}$, а

$$I_{\alpha,k-1}(x) = \begin{cases} H'_{[n]k-1}(x), & \alpha = (0,3), \\ 0, & \alpha \neq (0,3). \end{cases} \tag{51}$$

Положим

$$\widetilde{w}_k^{[3,n]}(x) = \big(\widetilde{w}_{(3,0),k}^{[3,n]}(x), \widetilde{w}_{(2,1),k}^{[3,n]}(x), \widetilde{w}_{(1,2),k}^{[3,n]}(x), \widetilde{w}_{(0,3),k}^{[3,n]}(x)\big),$$

$$\widetilde{z}_k^{[3,n]}(x) = \big(\widetilde{z}_{(3,0),k}^{[3,n]}(x), \widetilde{z}_{(2,1),k}^{[3,n]}(x), \widetilde{z}_{(1,2),k}^{[3,n]}(x), \widetilde{z}_{(0,3),k}^{[3,n]}(x)\big).$$

Введем оператор

$$(\Pi\widetilde{w})_\alpha = -G_n\bigg(\sum_{|\beta|=3}\sum_{m'=1}^{3}(-\delta_n)^{m'-1}P_{\alpha,\beta,m'}(DV)\widetilde{w}_\beta\bigg) + \Theta_n * \Big(\frac{\partial F}{\partial U}\widetilde{w}_\alpha\Big), \tag{52}$$

который действует на $\widetilde{w} = (\widetilde{w}_{(3,0)}, \widetilde{w}_{(2,1)}, \widetilde{w}_{(1,2)}, \widetilde{w}_{(0,3)})$. Здесь и в дальнейшем $*$ обозначает свертку. Введем также функцию

$$(\Psi_k)_\alpha = -G_n\bigg(\sum_{1\leqslant|\beta|\leqslant 2}\sum_{m'=1}^{2}(-\delta_n)^{m'-1}Q_{\alpha,\beta,m'}(DV)w_{\beta,k}^{[|\beta|,n]}\bigg) + \\ + \Theta_n * \big[R_\alpha(DF, DU^{[n]})\big]_{\mathbb{R}^2\setminus\{x_2=0\}}. \tag{53}$$

Кроме того, запишем соотношение (51) в виде

$$I_k = \big(0,\ 0,\ 0,\ H'_{[n]k}(\,\cdot\,)\big).$$

Оператор Π также зависит от k. Но так как его зависимость от k не влияет на интересующие нас оценки, для упрощения записи мы пишем его без указания зависимости от k. Наконец, положим

$$D_x^{[3]} = (D_x^{(3,0)},\ D_x^{(2,1)},\ D_x^{(1,2)},\ D_x^{(0,3)}).$$

С этими обозначениями часть на $\mathbb{R}^2\setminus\{x_2 = 0\}$ производных третьего порядка формулой (23) можно переписать в виде

$$\widetilde{w}_k^{[3,n]} = (G_n + \delta_n\Pi)\widetilde{w}_{k-1}^{[3,n]} + \delta_n\Pi\widetilde{z}_{k-1}^{[3,n]} + \delta_n\Psi_{k-1} + \delta_n G_{0,n}(I_{k-1}), \quad k \geqslant 1, \tag{54}$$

где

$$G_{0,n}(I_{k-1}) = \Theta_n * I_{k-1}. \tag{55}$$

Так как $\widetilde{w}_0^{[3,n]}$ не зависит от n, положим

$$\widetilde{w}_0 = \widetilde{w}_0^{[3,n]} = D_x^{[3]}(U_0 - \nu).$$

Тогда, в частности, имеем

$$\widetilde{w}_1^{[3,n]} = (G_n + \delta_n \Pi)\widetilde{w}_0 + \delta_n \Pi \widetilde{z}_0^{[3,n]} + \delta_n \Psi_0 + \delta_n G_{0,n}(I_0),$$

$$\widetilde{w}_2^{[3,n]} = (G_n + \delta_n \Pi)^2 \widetilde{w}_0 + \delta_n \sum_{j=0}^{2-1} (G_n + \delta_n \Pi)^{2-1-j} \Pi \widetilde{z}_j^{[3,n]} + \\ + \delta_n \sum_{j=0}^{2-1} (G_n + \delta_n \Pi)^{2-1-j} \Psi_j + \delta_n \sum_{j=0}^{2-1} G_n^{2-1-j} G_{0,n}(I_j) + \\ + \delta_n^2 \sum_{h=0}^{2-2} (G_n + \delta_n \Pi)^h \Pi \sum_{j=0}^{2-2-h} G_n^{2-2-h-j} G_{0,n}(I_j). \quad (56)$$

Кроме того, если $w_k^{[3,n]}$ имеет выражение

$$\widetilde{w}_k^{[3,n]} = (G_n + \delta_n \Pi)^k \widetilde{w}_0 + \delta_n \sum_{j=0}^{k-1} (G_n + \delta_n \Pi)^{k-1-j} \Pi \widetilde{z}_j^{[3,n]} + \\ + \delta_n \sum_{j=0}^{k-1} (G_n + \delta_n \Pi)^{k-1-j} \Psi_j + \delta_n \sum_{j=0}^{k-1} G_n^{k-1-j} G_{0,n}(I_j) + \\ + \delta_n^2 \sum_{h=0}^{k-2} (G_n + \delta_n \Pi)^h \Pi \sum_{j=0}^{k-2-h} G_n^{k-2-h-j} G_{0,n}(I_j), \quad (57)$$

то из (54) следует, что $\widetilde{w}_{k+1}^{[3,n]}$ имеет выражение (57), где k заменяется на $k+1$. Таким образом, учитывая (56), выводим, что при $k \geqslant 2$, $\widetilde{w}_k^{[3,n]}$ имеет выражение (57).

Будем оценивать слагаемые правой части (57). Для этого введем обозначение

$$\|\widetilde{w}\|_A = \sum_{|\alpha|=3} \sup_{x \in \mathbb{R}^2} |\widetilde{w}_\alpha(x)|. \quad (58)$$

Теперь рассмотрим фиксированное число $\tau > 0$ и целые числа k, удовлетворяющие условию $0 \leqslant k \leqslant \tau_\delta / \delta_n$. Тогда, согласно определению (52) (см. также (7), (11)), существует постоянная C_π такая, что

$$\|\Pi \widetilde{w}\|_A \leqslant C_\pi \|\widetilde{w}\|_A \quad (59)$$

для Π, определенного в отрезке $[0, \tau_\delta]$. Аналогично, согласно определению (53) (см. также (7), (9), (11) и лемму 3), существует постоянная C_ψ такая, что

$$\|\Psi_k\|_A \leqslant C_\psi, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad k \leqslant \frac{\tau_\delta}{\delta_n}. \quad (60)$$

Чтобы оценить слагаемые, относящиеся к I_j и ν, используем лемму 5, которую докажем ниже. Действительно, поскольку, согласно условию (11) и лемме 5, для функции $H_{[n]k}(x)$, определенной в (46), существует постоянная C_H такая, что

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^2}|H_{[n]k}(x)|\leqslant C_H,\quad k=0,1,2,\ldots,\quad k\leqslant\frac{\tau_\delta}{\delta_n},$$

в силу леммы 5 имеем

$$\|G_n^{k-1-j}G_{0,n}(I_j)\|_A\leqslant\frac{2}{\sqrt{4\pi\kappa(k-j)\delta_n}}C_H\equiv\frac{1}{\sqrt{(k-j)\delta_n}}C_\eta. \tag{61}$$

Что касается $\widetilde{z}_j^{[3,n]}$, имеющей вид

$$\widetilde{z}_j^{[3,n]}(x)=D_x^{[3]}G_n^j\nu(x)=\int_{\mathbb{R}^2}\Theta_n(y)D_x^{[3]}\big[G_n^{j-1}\nu(\xi(x,y))\big]dy$$

(см. (47), (38)), полезно напомнить равенство

$$\begin{aligned}D_x^\alpha\big[G_n^{j-1}\nu(\xi(x,y))\big]&=\widetilde{z}_{\alpha,j-1}^{[3,n]}(\xi(x,y))+\\&+\sum_{|\beta|=3}\sum_{m'=1}^{3}(-\delta_n)^{m'}P_{\alpha,\beta,m'}(DV)\widetilde{z}_{\beta,j-1}^{[3,n]}(\xi(x,y))+\\&+\sum_{1\leqslant|\beta|\leqslant2}\sum_{m'=1}^{2}(-\delta_n)^{m'}Q_{\alpha,\beta,m'}(DV)D_\xi^\beta G_n^{j-1}\nu(\xi)\big|_{\xi=\xi(x,y)},\end{aligned} \tag{62}$$

которое получается аналогично (49).

Напомним также, что, рассуждая аналогично доказательству лемм 2 и 3 (но с $F=0$), нетрудно проверить, что существует возрастающая функция $\Phi_{\nu,0}(t)$ такая, что

$$\sum_{1\leqslant|\beta|\leqslant2}\sup_{x\in\mathbb{R}^2}|D_x^\beta G_n^j\nu(x)|\leqslant\Phi_{\nu,0}(j\delta_n).$$

Для $\alpha=(3,0)$, $(2,1)$, $(1,2)$ положим

$$\|D_x^{[3]}G_n^j\nu\|_{A'}=\sum_{\alpha\in\{(3,0),(2,1),(1,2)\}}\sup_{x\in\mathbb{R}^2}|D_x^\alpha G_n^j\nu(x)|.$$

Если $\alpha\in\{(3,0),(2,1),(1,2)\}$, то в силу (50) правая часть (62) не зависит от $\partial_{x_2}^3G_n^{j-1}\nu(\xi(x,y))$, что позволяет вывести из равенства (62) и определения оператора G_n (см. (47)) неравенство

$$\|D_x^{[3]}G_n^j\nu\|_{A'}\leqslant(1+C_1\delta_n)\|D_x^{[3]}G_n^{j-1}\nu\|_{A'}+\delta_nC_1\Phi_{\nu,0}((j-1)\delta_n),$$

где C_1 — независимая от n постоянная. Из этого неравенства обычным образом выводим, что существует возрастающая функция $\Phi_{\nu,1}(t)$ такая, что

$$\|D_x^{[3]}G_n^j\nu\|_{A'}\leqslant\Phi_{\nu,1}(j\delta_n). \tag{63}$$

Что касается $\tilde{z}^{[3,n]}_{(0,3),j}(x) = \partial^3_{x_2} G^j_n \nu(x)$, проверим соотношение

$$\frac{\partial^3}{\partial x_2^3} G^j_n(\nu)(x) = I_{\nu,j}(x) + f_{\nu,j}(x) + g_{\nu,j}(x), \quad j = 1, 2, \ldots, \tag{64}$$

где

$$I_{\nu,j} = G^j_n\Big(\frac{\partial^3}{\partial x_2^3}\nu\Big|_{\{x_2=0\}}\Big), \quad f_{\nu,j} = G^j_n\Big(\frac{\partial^3}{\partial x_2^3}\nu\Big|_{\mathbb{R}^2\setminus\{x_2=0\}}\Big),$$

а $g_{\nu,j}$ — такая функция, что существует независимая от n возрастающая функция $\Phi_{\nu,g}(\,\cdot\,)$, удовлетворяющая неравенству

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}^2} |g_{\nu,j}(\xi)| \leqslant \Phi_{\nu,g}(j\delta_n).$$

Действительно, имеем

$$\frac{\partial^3}{\partial x_2^3} G^{j-1}_n(\nu)(\xi(x,y)) = \frac{\partial^3}{\partial \zeta_2^3} G^{j-1}_n(\nu)(\zeta)\Big|_{\zeta=\xi(x,y)} + \delta_n \widetilde{g}_{j-1},$$

где $\xi(x,y) = x - \delta_n V(t^{[n]}_j, x)\vec{e}_1 - y$, а $\widetilde{g}_{j-1}$ является суммой произведений производной первого, второго или третьего порядка функции $G^{j-1}_n(\nu)$ и производных первого, второго или третьего порядка функции $V(t^{[n]}_j, x)$ по x_2. Итак, имеем

$$\frac{\partial^3}{\partial x_2^3} G^j_n(\nu)(x) = G_n\Big(\frac{\partial^3}{\partial x_2^3} G^{j-1}_n(\nu)\Big)(x) + \delta_n G_n(\widetilde{g}_{j-1})(x).$$

Повторяя это рассуждение j раз, мы получим

$$\frac{\partial^3}{\partial x_2^3} G^j_n(\nu)(x) = G^j_n\Big(\frac{\partial^3}{\partial x_2^3}\nu\Big)(x) + \delta_n \sum_{j'=0}^{j-1} G^{j-j'}_n(\widetilde{g}_{j'})(x).$$

Так как $P_{(0,3),(0,3),m'}(DV) = 0$ (см. (50)), внутри членов $G^{j-j'}_n(\widetilde{g}_{j'})(x)$ нет производной $\frac{\partial^3}{\partial \zeta_2^3} G^{j'}_n(\nu)$. Поэтому можно их оценить мажорированиями, которые мы уже проверили. Следовательно, существует независимая от n возрастающая функция $\Phi_{\nu,g}(\,\cdot\,)$, удовлетворяющая неравенству

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^2} \Big|\delta_n \sum_{j'=0}^{j-1} G^{j-j'}_n(\widetilde{g}_{j'})(x)\Big| \leqslant \Phi_{\nu,g}(j\delta_n).$$

Тем самым, если положим

$$g_{\nu,j} = \delta_n \sum_{j'=0}^{j-1} G^{j-j'}_n(\widetilde{g}_{j'})(x),$$

то получим (64).

Напомним, что в силу (45) $\frac{\partial^3}{\partial x_2^3}\nu\big|_{\{x_2=0\}}$ удовлетворяет соотношению

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x_2)\frac{\partial^3}{\partial x_2^3}\nu\Big|_{\{x_2=0\}}(x_1,x_2)dx_2 = 2u''_{00}(x_1)\varphi(0) \quad \forall\varphi\in C(\mathbb{R}),$$

т.е. $\frac{\partial^3}{\partial x_2^3}\nu\big|_{\{x_2=0\}}(x_1,x_2)$ является δ-функцией Дирака на $-\infty<x_2<\infty$, умноженной на $2u''_{00}(x_1)$. Итак, согласно лемме 3, имеем

$$|f_{\nu,j}(x)|\leqslant \overline{C}_f,\quad |I_{\nu,j}(x)|\leqslant \frac{\overline{C}_I}{\sqrt{4\pi j\delta_n\kappa}}\exp\Big(-\frac{x_2^2}{4j\delta_n\kappa}\Big),$$

где

$$\overline{C}_f=\sup_{x\in\mathbb{R}^2\setminus\{x_2=0\}}\Big|\frac{\partial^3}{\partial x_2^3}\nu(x)\Big|,\quad \overline{C}_I=2\sup_{x_1\in\mathbb{R}}|u''_{00}(x_1)|.$$

Следовательно, имеем

$$\Big|\frac{\partial^3}{\partial x_2^3}(G_n^j\nu)(x)\Big|\leqslant \overline{C}_f+\frac{\overline{C}_I}{\sqrt{4\pi j\delta_n\kappa}}\exp\Big(-\frac{x_2^2}{4j\delta_n\kappa}\Big)+\Phi_{\nu,g}(j\delta_n). \tag{65}$$

Положив $\Phi_\nu(t)=\Phi_{\nu,1}(t)+\Phi_{\nu,g}(t)$ и напомнив $D_x^{[3]}G_n^j\nu=\widetilde{z}_j^{[3,n]}$, из соотношений (59)–(61), (63), (65) сделаем вывод, что при $t=k\delta_n$ справедливы неравенства

$$\|(G_n+\delta_n\Pi)^k\widetilde{w}_0\|_A\leqslant(1+\delta_nC_\pi)^k\|\widetilde{w}_0\|_A\leqslant e^{tC_\pi}\|\widetilde{w}_0\|_A,$$

$$\Big\|\delta_n\sum_{j=0}^{k-1}(G_n+\delta_n\Pi)^{k-1-j}\Pi\widetilde{z}_j^{[3,n]}\Big\|_A\leqslant C_\pi\int_0^t e^{(t-s)C_\pi}\Big(\Phi_\nu(s)+\overline{C}_f+\frac{\overline{C}_I}{\sqrt{4\pi\kappa s}}\Big)ds,$$

$$\Big\|\delta_n\sum_{j=0}^{k-1}(G_n+\delta_n\Pi)^{k-1-j}\Psi_j\Big\|_A\leqslant C_\psi\int_0^t e^{(t-s)C_\pi}ds,$$

$$\Big\|\delta_n\sum_{j=0}^{k-1}G_n^{k-1-j}G_{0,n}(I_j)\Big\|_A\leqslant C_\eta\int_0^t\frac{1}{\sqrt{t-s}}ds,$$

$$\Big\|\delta_n^2\sum_{h=0}^{k-2}(G_n+\delta_n\Pi)^h\Pi\sum_{j=0}^{k-2-h}G_n^{k-2-h-j}G_{0,n}(I_j)\Big\|_A\leqslant$$

$$\leqslant C_\pi\int_0^t e^{sC_\pi}\int_0^{t-s}\frac{1}{\sqrt{t-s-r}}drds.$$

Так как правая часть этих неравенств ограничена постоянной, которая зависит от τ_δ, но не зависит ни от $t=k\delta_n\in[0,\tau_\delta]$, ни от n, из этих неравенств и равенства (57) следует, что существует функция $\widetilde{\Phi}_3(\tau)$ такая, что

$$\|\widetilde{w}_k^{[3,n]}\|_A\leqslant\widetilde{\Phi}_3(\tau),\quad k=0,1,2,\ldots,\quad k\leqslant\frac{\tau_\delta}{\delta_n}. \tag{66}$$

Учитывая определения (48) и (58) и переход от $\{t_k^{[n]}\}$ к $t \in [0, \tau]$ (см. (24)), с учетом произвольности $\tau > 0$, из неравенств (63), (65) и (66) мы выводим, что существуют независимая от n возрастающая функция $\Phi_3(t)$ и независимая от n постоянная $\overline{C}_3$, которые удовлетворяют соотношению (44). Лемма доказана. □

Доказательство замечания 3. Уделяя внимание выражению

$$\frac{\overline{C}_I}{\sqrt{4\pi j \delta_n \kappa}} \exp\Big(-\frac{x_2^2}{4j\delta_n\kappa}\Big),$$

находящемуся в правой части (65), из (63), (65), (66) получаем утверждение замечания. □

Лемма 5. *Пусть G_n — определенный в (47) оператор.*

i) Пусть $f(x_1, x_2)$ — измеримая функция, определенная на $\mathbb{R}^2$. Пусть $g(x_2)$ — неотрицательная измеримая функция, определенная на $\mathbb{R}$. Если

$$|f(x_1, x_2)| \leqslant g(x_2) \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \tag{67}$$

то имеем

$$|(G_n^k f)(x_1, x_2)| \leqslant \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi k\delta_n\kappa}} \exp\Big(-\frac{y_2^2}{4k\delta_n\kappa}\Big) g(x_2 - y_2) dy_2. \tag{68}$$

ii) Пусть $\eta(x_1)$ — ограниченная измеримая функция, определенная на $\mathbb{R}$. Тогда имеем

$$|(G_n^k(\eta(\,\cdot\,)\delta(\,\cdot\,)))(x_1, x_2)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{4\pi k\delta_n\kappa}} \exp\Big(-\frac{x_2^2}{4k\delta_n\kappa}\Big) \sup_{x_1' \in \mathbb{R}} |\eta(x_1')|, \tag{69}$$

где $\delta(\,\cdot\,)$ — δ-функция Дирака на $-\infty < x_2 < \infty$.

В неравенствах (68), (69) G_n^k можно заменить на $G_n^{k-1}G_{0,n}$, где $G_{0,n}$ — определенный в (55) оператор.

Доказательство. Поскольку перенос $V\vec{e}_1$ действует только в направлении x_1, из условия (67) следует, что при любом $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$ имеем

$$|f(x_1 - \delta_n V(t, x), x_2)| \leqslant g(x_2) \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

откуда следует

$$|(G_{n,k'} f)(x_1, x_2)| \leqslant (\vartheta_n * g)(x_2) \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

(для ϑ_n см. (15)). Повторив это рассуждение и напомнив соотношение свертки между гауссовскими распределениями, получим (68).

Чтобы доказать второе утверждение, достаточно вспомнить, что $(\vartheta_n * \delta(\,\cdot\,))(x_2) = \vartheta_n(x_2)$, что позволяет получить непосредственно неравенство (69) при $k = 1$. Тогда, согласно первому утверждению, имеем (69) при любом $k \in \mathbb{N}$. Оператор $G_{0,n}$ есть случай G_n, когда $V = 0$. □

4. Сходимость приближенных решений. В этом разделе, используя ограниченность функций $U^{[n]}(t,x)$ и их производных первого, второго и третьего порядка по x, доказанную в леммах 1–4, мы докажем сходимость $U^{[n]}(t,x)$ и их производных первого и второго порядка. Для равномерной сходимости $U^{[n]}(t,x)$ и их производных первого порядка будем следовать схеме предложений 5.1 и 6.1 статьи [22], а для поточечной сходимости производных второго порядка будем использовать другое рассуждение. Когда аргументы доказательства аналогичны изложенным в [22] аргументам (даже если определение приближенных решений несколько отличается), для подробности расчета будем ссылаться на [22].

Лемма 6. *Пусть выполнены условия теоремы A. Тогда, каково бы ни было $\tau > 0$, функции $U^{[n]}(t,x)$, $n = 1, 2, \ldots$, определенные в (22)–(24), сходятся равномерно на $[0,\tau] \times \mathbb{R}^2$ к предельной функции $U(t,x)$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. Воспользуемся идеей доказательства предложения 5.1 из статьи [22]. Пусть $\tau > 0$ и моменты времени $t_k^{[n]}$ таковы, что $0 \leqslant t_k^{[n]} \leqslant \tau_\delta$ (для τ_δ см. (32)). Если положим

$$\xi_{k'}^{[n']}(x,y) = x - \delta_{n'} V(t_{k'}^{[n']}, x)\vec{e}_1 - y \tag{70}$$

($k' = k+1$ или $= 2k+1$ или $= 2k+2$ и $n' = n$ или $= n+1$), то имеем

$$U^{[n+1]}(t_{2k+2}^{[n+1]}, x) = I_{2k}^{[n+1]} + J_{a,2k}^{[n+1]} + J_{b,2k}^{[n+1]}, \tag{71}$$

где

$$I_{2k}^{[n+1]} = \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \Theta_{n+1}(y^{(1)})\Theta_{n+1}(y^{(2)}) U^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, \xi^*(y^{(1)}, y^{(2)}))dy^{(1)}dy^{(2)}, \tag{72}$$

$$\xi^*(y^{(1)}, y^{(2)}) = \xi_{2k+2}^{[n+1]}(x, y^{(1)}) - \delta_{n+1} V(t_{2k+1}^{[n+1]}, \xi_{2k+2}^{[n+1]}(x, y^{(1)})\vec{e}_1 - y^{(2)},$$

$$\begin{aligned} J_{a,2k}^{[n+1]} = \delta_{n+1} \int_{\mathbb{R}^2} \Theta_{n+1}(y^{(1)}) \times \\ \times \left(\Theta_{n+1} * F(t_{2k}^{[n+1]}, \ \cdot\ , U^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, \ \cdot\ ))\right)(\xi_{2k+2}^{[n+1]}(x, y^{(1)}))dy^{(1)}, \end{aligned} \tag{73}$$

$$J_{b,2k}^{[n+1]} = \delta_{n+1} \int_{\mathbb{R}^2} \Theta_{n+1}(y^{(1)}) F(t_{2k+1}^{[n+1]}, x - y^{(1)}, \overline{U}_1 + \overline{U}_2)dy^{(1)}, \tag{74}$$

$$\overline{U}_1 = \int_{\mathbb{R}^2} \Theta_{n+1}(y^{(2)}) U^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, \xi_{2k+1}^{[n+1]}(x - y^{(1)}, y^{(2)}))dy^{(2)},$$

$$\overline{U}_2 = \overline{U}_2(x - y^{(1)}) = \delta_{n+1}(\Theta_{n+1} * F(t_{2k}^{[n+1]}, \ \cdot\ , U^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, \cdot)))(x - y^{(1)}).$$

Здесь и далее используем запись со сверткой $*$, если с ней запись выражений становится проще.

Для $I_{2k}^{[n+1]}$, используя соотношение

$$\int_{\mathbb{R}^2} \Theta_n(z) U^{[n]}(t_k^{[n]}, \xi_{k+1}^{[n]}(x,z))dz =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \Theta_{n+1}(y^{(1)})\Theta_{n+1}(y^{(2)}) U^{[n]}(t_k^{[n]}, \xi_{k+1}^{[n]}(x, y^{(1)} + y^{(2)}))dy^{(1)}dy^{(2)} \quad (75)$$

и неравенство

$$\left|\xi_{2k+2}^{[n+1]}(x,y^{(1)}) - \delta_{n+1} V(t_{2k+1}^{[n+1]}, \xi_{2k+2}^{[n+1]}(x,y^{(1)})) - y^{(2)} - \xi_{k+1}^{[n]}(x, y^{(1)} + y^{(2)})\right| \leqslant$$
$$\leqslant \delta_{n+1}^2 \sup|\partial_t V| + \delta_{n+1} \sup|\nabla V|(\delta_{n+1}\sup|V| + |y^{(1)}|)$$

(здесь и далее для простоты записи пишем $\sup|\partial_t V|$ и т. д., если из контекста ясно, на каком множестве берется sup), получим

$$\left|I_{2k}^{[n+1]} - \int_{\mathbb{R}^2} \Theta_n(y) U^{[n]}(t_k^{[n]}, x - \delta_n V(t_{k+1}^{[n]}, x)\vec{e}_1 - y)dy\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{y\in\mathbb{R}^2} |U^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, y) - U^{[n]}(t_k^{[n]}, y)| + K_1 \delta_n^{3/2} \sup_{y\in\mathbb{R}^2} |\nabla U^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, y)|, \quad (76)$$

где K_1 — независимая от n постоянная (подробнее см. [22, лемма 5.1]).

С другой стороны, для

$$J_{a,2k}^{[n+1]} + J_{b,2k}^{[n+1]} - \delta_n(\Theta_n * F(t_k^{[n]}, \ \cdot\ , U^{[n]}(t_k^{[n]}, \ \cdot\ )))(x),$$

используя предположения о гладкости $V(t,x)$ и $F(t,x,U)$, получим

$$\left|J_{a,2k}^{[n+1]} - \delta_{n+1}(\Theta_n * F(t_k^{[n]}, \ \cdot\ , U^{[n]}(t_k^{[n]}, \ \cdot\ )))(x)\right| \leqslant$$
$$\leqslant K_2 \delta_{n+1}^2 (1 + \sup_{y\in\mathbb{R}^2} |\nabla U^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, y)|) +$$
$$+ K_2 \delta_{n+1} |U^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, x) - U^{[n]}(t_k^{[n]}, x)|, \quad (77)$$

$$\left|J_{b,2k}^{[n+1]} - \delta_{n+1}(\Theta_n * F(t_k^{[n]}, \ \cdot\ , U^{[n]}(t_k^{[n]}, \ \cdot\ )))(x)\right| \leqslant$$
$$\leqslant K_3 \big(\delta_{n+1}^2 (1 + \sup_{y\in\mathbb{R}^2} |\nabla U^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, y)|) + \delta_{n+1}^{3/2}\big) +$$
$$+ K_3 \delta_{n+1} |U^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, x) - U^{[n]}(t_k^{[n]}, x)|, \quad (78)$$

где K_2 и K_3 — независимые от n постоянные (подробнее см. [22, леммы 5.2 и 5.3]).

Оценивая $\sup_{y\in\mathbb{R}^2} |\nabla U^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, y)|$ в (76)–(78) с помощью леммы 2, из соотношений (71), (76)–(78) выводим, что существует независимая от n постоянная K_4 такая, что

$$|U^{[n+1]}(t_{2k+2}^{[n+1]}, x) - U^{[n]}(t_{k+1}^{[n]}, x)| \leqslant$$
$$\leqslant (1 + K_4\delta_{n+1}) \sup_{y\in\mathbb{R}^2} \left|U^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, y) - U^{[n]}(t_k^{[n]}, y)\right| + K_4 \delta_{n+1}^{3/2}.$$

В частности, при $k = 0$ на основании равенства

$$U^{[n+1]}(t_0^{[n+1]}, y) = U_0(y) = U^{[n]}(t_0^{[n]}, y)$$

имеем

$$|U^{[n+1]}(t_2^{[n+1]}, x) - U^{[n]}(t_1^{[n]}, x)| \leqslant K_4 \delta_{n+1}^{3/2}.$$

Отсюда следует, что при $t = 2k\delta_{n+1}$ имеет место неравенство

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^2} \left| U^{[n+1]}(t, x) - U^{[n]}(t, x) \right| \leqslant \sqrt{\delta_{n+1}} e^{tK_4}. \tag{79}$$

Так как

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\delta_{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n/2}} < \infty,$$

из неравенства (79) и определения (24) следует, что при любом $\tau > 0$ последовательность $\left\{U^{[n]}(t, x)\right\}_{n=1}^{\infty}$ сходится равномерно на $[0, \tau] \times \mathbb{R}^2$ к одной функции, которую обозначим через $U(t, x)$. $\square$

Лемма 7. *Пусть выполнены условия теоремы A. Пусть $U^{[n]}(t, x)$ — функции, определенные в (22)–(24), $n = 1, 2, \ldots$. Тогда, каково бы ни было $\tau > 0$, их производные первого порядка $\frac{\partial}{\partial x_j} U^{[n]}(t, x)$ $(j = 1, 2)$ сходятся равномерно на $[0, \tau] \times \mathbb{R}^2$ к $\frac{\partial}{\partial x_j} U(t, x)$ при $n \to \infty$, где $U(t, x)$ — предельная функция последовательности $\left\{U^{[n]}(t, x)\right\}_{n=1}^{\infty}$.*

Доказательство. Воспользуемся идеей доказательства предложения 6.1 из статьи [22]. Пусть $\tau > 0$. Дифференцируя по x_i обе части (71) (см. также (72)–(74)) и пользуясь обозначениями $w_{i,k}^{[1,n]}(x)$ и $\xi_{k'}^{[n']}(x, y)$, введенными в (36) и (70), имеем

$$w_{i,2k+2}^{[1,n+1]}(x) = I_{a,2k}^{[1,n+1]} + I_{b,2k}^{[1,n+1]} + J_{a,2k}^{[1,n+1]} + J_{b,2k}^{[1,n+1]}, \tag{80}$$

$$I_{a,2k}^{[1,n+1]} = \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \Theta_{n+1}(y^{(1)}) \Theta_{n+1}(y^{(2)}) w_{i,2k}^{[1,n+1]}(\xi^*) dy^{(1)} dy^{(2)},$$

$$I_{b,2k}^{[1,n+1]} = -\delta_{n+1} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \Theta_{n+1}(y^{(1)}) \Theta_{n+1}(y^{(2)}) w_{1,2k}^{[1,n+1]}(\xi^*) \times$$
$$\times \left(V'_{i,2k+2}(x) + \sum_{j=1}^{2} V'_{j,2k+1}(\xi_{2k+2}^{[n+1]}(x, y^{(1)})) \partial_{x_i} \xi_{2k+2,j}^{[n+1]}(x, y^{(1)}) \right) dy^{(1)} dy^{(2)},$$

$$J_{a,2k}^{[1,n+1]} = \delta_{n+1} \int_{\mathbb{R}^2} \Theta_{n+1}(y^{(1)}) \Bigg(\Theta_{n+1} * \sum_{j=1}^{2} \Big[F'_{j,2k}(\,\cdot\,, U_{2k}^{[n+1]}(\,\cdot\,)) +$$
$$+ F'_{u,2k}(\,\cdot\,, U_{2k}^{[n+1]}(\,\cdot\,)) w_{j,2k}^{[1,n+1]}(\,\cdot\,) \Big] \partial_{x_i} \xi_{2k+2,j}^{[n+1]}(x, y^{(1)}) \Bigg) (\xi_{2k+2}^{[n+1]}(x, y^{(1)})) dy^{(1)},$$

$$J_{b,2k}^{[1,n+1]} = \delta_{n+1} \int_{\mathbb{R}^2} \Theta_{n+1}(y^{(1)}) F'_{i,2k+1}(x - y^{(1)}, \overline{U}_1 + \overline{U}_2) dy^{(1)} +$$

$$+ \delta_{n+1} \int_{\mathbb{R}^2} \Theta_{n+1}(y^{(1)}) F'_{u,2k+1}(x - y^{(1)}, \overline{U}_1 + \overline{U}_2) \times$$

$$\times \Bigg[\int_{\mathbb{R}^2} \Theta_{n+1}(y^{(2)}) \sum_{j=1}^{2} w_{j,2k}^{[n+1]}(\xi_{2k+1}^{[n+1]}(x - y^{(1)}, y^{(2)})) \partial_{x_i} \xi_{2k+1,j}^{[n+1]}(x - y^{(1)}, y^{(2)}) dy^{(2)} +$$

$$+\delta_{n+1} \Big(\Theta_{n+1} * \Big(F'_{i,2k}(\,\cdot\,, U_{2k}^{[n+1]}(\,\cdot\,)) + F'_{u,2k}(\,\cdot\,, U_{2k}^{[n+1]}(\,\cdot\,)) w_{i,2k}^{[n+1]} \Big) \Big)(x - y^{(1)}) \Bigg] dy^{(1)},$$

где

$$\xi^* = \xi_{2k+2}^{[n+1]}(x, y^{(1)}) - \delta_{n+1} V(t_{2k+1}^{[n+1]}, \xi_{2k+2}^{[n+1]}(x, y^{(1)})) \vec{e}_1 - y^{(2)}, \quad U_k^{[n]}(x) = U^{[n]}(t_k^{[n]}, x),$$

$$V'_{j,2k+1} = \partial_{x_j} V(t_{2k+1}^{[n+1]}, x), \quad F'_{i,k} = \partial_{x_i} F(t_k^{[n]}, x, U), \quad F'_{u,k} = \partial_U F(t_k^{[n]}, x, U).$$

С другой стороны, дифференцируя по x_i обе части (23) (см. также (25), (75)), получим

$$w_{i,k+1}^{[1,n]}(x) = I_{a,k}^{[1,n]} + I_{b,k}^{[1,n]} + 2J_k^{[1,n]}, \tag{81}$$

$$I_{a,k}^{[1,n]} = \big(\Theta_{n+1} * \Theta_{n+1} * w_{i,k}^{[1,n]}\big)(x - \delta_n V(t_{k+1}^{[n]}, x)\vec{e}_1),$$

$$I_{b,k}^{[1,n]} = -2\delta_{n+1} V'_{i,2k+2}(x) \big(\Theta_{n+1} * \Theta_{n+1} * w_{1,k}^{[1,n]}\big)(x - \delta_n V(t_{k+1}^{[n]}, x)\vec{e}_1),$$

$$J_k^{[1,n]} = \delta_{n+1} \big(\Theta_{n+1} * \Theta_{n+1} * \partial_{x_i} F(t_k^{[n]}, \ \cdot\ , U_k^{[n]}(\ \cdot\ ))\big)(x).$$

Из (80) и (81) следует, что

$$w_{i,2k+2}^{[1,n+1]}(x) - w_{i,k+1}^{[1,n]}(x) =$$
$$= I_{a,2k}^{[1,n+1]} - I_{a,k}^{[1,n]} + I_{b,2k}^{[1,n+1]} - I_{b,k}^{[1,n]} + J_{a,2k}^{[1,n+1]} - J_k^{[1,n]} + J_{b,2k}^{[1,n+1]} - J_k^{[1,n]}. \tag{82}$$

Чтобы оценить $I_{a,2k}^{[1,n+1]} - I_{a,k}^{[1,n]}$, отметим, что

$$\xi^* - (x - \delta_n V(t_{k+1}^{[n]}, x)\vec{e}_1 - y^{(1)} - y^{(2)}) =$$
$$= \delta_{n+1}(V(t_{2k+2}^{[n+1]}, x) - V(t_{2k+1}^{[n+1]}, \xi_{2k+2}^{[n+1]}(x, y^{(1)})))\vec{e}_1,$$

откуда

$$\big|w_{i,2k}^{[1,n+1]}(\xi^*) - w_{i,k}^{[1,n]}(x - \delta_n V(t_{k+1}^{[n]}, x)\vec{e}_1 - y^{(1)} - y^{(2)})\big| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{y \in \mathbb{R}^2} \big|w_{i,2k}^{[1,n+1]}(y) - w_{i,k}^{[1,n]}(y)\big| +$$
$$+ \delta_{n+1} \sup \big|\nabla w_{i,2k}^{[1,n+1]}\big| \big(\delta_{n+1} \sup |\partial_t V| + \sup |\nabla V| (\delta_{n+1} \sup |V| + |y^{(1)}|)\big).$$

Следовательно, с учетом леммы 3 имеем

$$\big|I_{a,2k}^{[1,n+1]} - I_{a,k}^{[1,n]}\big| \leqslant \sup_{y \in \mathbb{R}^2} \big|w_{i,2k}^{[1,n+1]}(y) - w_{i,k}^{[1,n]}(y)\big| + C(\delta_{n+1}^2 + \delta_{n+1}^{3/2}), \tag{83}$$

где C — независимая от n постоянная.

Чтобы оценить $\big|I^{[1,n+1]}_{b,2k} - I^{[1,n]}_{b,k}\big|$, $\big|J^{[1,n+1]}_{a,2k} - J^{[1,n]}_{k}\big|$, $\big|J^{[1,n+1]}_{b,2k} - J^{[1,n]}_{k}\big|$, напомним, что согласно условиям (7), (8) и (11), производные V и F, находящиеся в их оценке, равномерно ограничены, и, согласно лемме 3, производные второго порядка $U^{[n+1]}(t,x)$ по x также равномерно ограничены. Итак, делая явные вычисления, которые немного длинны, но довольно элементарны, мы можем оценить $\big|I^{[1,n+1]}_{b,2k} - I^{[1,n]}_{b,k}\big|$, $\big|J^{[1,n+1]}_{a,2k} - J^{[1,n]}_{k}\big|$, $\big|J^{[1,n+1]}_{b,2k} - J^{[1,n]}_{k}\big|$. Так как вычисления аналогичны вычислениям, сделанным в доказательстве предложения 6.1 статьи [22] (даже если определение приближенных решений формально отличается, аргументы довольно схожи), отсылаем детали вычисления к [22]. Уделяя внимание наличию фактора δ_n в слагаемых $I^{[1,n+1]}_{b,2k} - I^{[1,n]}_{b,k}$, $J^{[1,n+1]}_{a,2k} - J^{[1,n]}_{k}$, $J^{[1,n+1]}_{b,2k} - J^{[1,n]}_{k}$ и напоминая оценку (83), из (82) получим

$$\begin{aligned}\big|w^{[1,n+1]}_{i,2k+2}(x) - w^{[1,n]}_{i,k+1}(x)\big| \leqslant \\ \leqslant \sup_{y\in\mathbb{R}^2} |w^{[1,n+1]}_{i,2k}(y) - w^{[1,n]}_{i,k}(y)| + C_0(\delta^2_{n+1} + \delta^{3/2}_{n+1}) + \delta_{n+1}C_0(Y_k + Y^{[1]}_k),\end{aligned} \tag{84}$$

где C_0 — независимая от n постоянная в отрезке $[0,\tau]$, а

$$Y_k = \sup_{x\in\mathbb{R}^2}\big|U^{[n+1]}(t^{[n+1]}_{2k},x) - U^{[n]}(t^{[n]}_k,x)\big|, \quad Y^{[1]}_k = \sum_{i=1}^{2}\sup_{x\in\mathbb{R}^2}\big|w^{[1,n+1]}_{i,2k}(x) - w^{[1,n]}_{i,k}(x)\big|.$$

Из неравенства (84) выведем обычным образом равномерную сходимость последовательности $\big\{\frac{\partial}{\partial x_j}U^{[n]}(t,x)\big\}_{n=1}^{\infty}$ $(j = 1,2)$ на $[0,\tau]\times\mathbb{R}^2$ (подробнее см. [22, предложение 6.1]). Так как $\frac{\partial}{\partial x_j}U^{[n]}(t,x)$ сходятся равномерно, предельная функция совпадает с $\frac{\partial}{\partial x_j}U(t,x)$, где $U(t,x)$ — предельная функция последовательности $\big\{U^{[n]}(t,x)\big\}_{n=1}^{\infty}$. □

Лемма 8. *Пусть выполнены условия теоремы A. Пусть $U^{[n]}(t,x)$ — функции, определенные в (22)–(24), $n = 1,2,\ldots$. Тогда их производные второго порядка $\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_i}U^{[n]}(t,x)$ $(i,j = 1,2)$ поточечно сходятся на $(0,\infty)\times\mathbb{R}^2$ к $\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_i}U(t,x)$ при $n\to\infty$, где $U(t,x)$ — предельная функция последовательности $\big\{U^{[n]}(t,x)\big\}_{n=1}^{\infty}$.*

Доказательство. Пусть $t > 0$. Рассмотрим число $M > 0$ и замкнутое множество

$$Q_M = \{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : |x_1|\leqslant M, |x_2|\leqslant M\}.$$

В силу лемм 3 и 4 функции $\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_i}U^{[n]}(t,x)$ равномерно ограничены и равномерно липшицевы в $\mathbb{R}^2$ (при фиксированном $t > 0$). Следовательно, согласно теореме Асколи—Арцела, существует подпоследовательность

$$\Big\{\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_i}U^{[n_m]}(t,\ \cdot\ )\Big\}_{m=1}^{\infty},$$

сходящаяся равномерно на Q_M.

Так как согласно лемме 7 последовательность $\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}U^{[n]}(t,\ \cdot\ )\right\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к $\frac{\partial}{\partial x_i}U(t,\ \cdot\ )$, предельная функция сходящейся равномерно на Q_M подпоследовательности $\left\{\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}U^{[n_m]}(t,\ \cdot\ )\right\}_{m=1}^{\infty}$ равна $\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}U(t,x)$. Итак, нетрудно убедиться, что не существует подпоследовательности, которая не сходится к функции $\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}U(t,x)$. Т. е. последовательность $\left\{\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}U^{[n]}(t,\ \cdot\ )\right\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к $\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}U(t,x)$ на Q_M. Следовательно, если построить последовательность $\left\{Q_{M_q}\right\}_{q=1}^{\infty}$ такую, что

$$Q_{M_q} \subset Q_{M_{q+1}}, \quad \bigcup_{q=1}^{\infty} Q_{M_q} = \mathbb{R}^2,$$

то можно расширить предельную функцию $\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}U(t,x)$ на $\mathbb{R}^2$, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}U^{[n]}(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}U(t,x)$$

поточечно на $\mathbb{R}^2$. Лемма доказана. $\square$

5. Предельный переход. Чтобы доказать, что предельная функция $U(t,x)$ последовательности приближенных решений $U^{[n]}(t,x)$ удовлетворяет уравнению переноса-диффузии, сначала напомним следующие свойства приближенных решений $U^{[n]}(t,x)$.

Лемма 9. *Пусть выполнены условия теоремы A. Пусть ε_1 и τ — действительные числа такие, что $0<\varepsilon_1<\tau<\infty$. Пусть $U^{[n]}(t_k^{[n]},x)$ — определенная в (22), (23) функция. Тогда при $\varepsilon_1 \leqslant t_{k-1}^{[n]} \leqslant t_k^{[n]} \leqslant \tau$ имеем*

$$\frac{U^{[n]}(t_k^{[n]},x) - U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]},x)}{\delta_n} = -V(t_k^{[n]},x)\partial_{x_1}U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]},x) + \\ + \kappa\Delta U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]},x) + F(t_{k-1}^{[n]},x,U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]},x)) + R, \quad (85)$$

где

$$|R| \leqslant \delta_n^{1/2} C_0, \quad (86)$$

а C_0 — независимая от n постоянная.

Доказательство. Согласно формуле Тейлора, имеем

$$U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x - \delta_n V(t_k^{[n]},x)\vec{e}_1 - y) = \\ = U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]},x) - \delta_n V(t_k^{[n]},x)\partial_{x_1}U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]},x) - y\cdot\nabla U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]},x) + \\ + \frac{1}{2}\delta_n^2 (V(t_k^{[n]},x))^2 \frac{\partial^2 U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]},x)}{\partial x_1^2} + \delta_n \sum_{j=1}^{2} V(t_k^{[n]},x) y_j \frac{\partial^2 U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]},x)}{\partial x_1 \partial x_j} + \\ + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2} y_i y_j \frac{\partial^2 U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]},x)}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{6}\sum_{i,j,h=1}^{2} \mu_i\mu_j\mu_h \frac{\partial^3 U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]},\widetilde{x})}{\partial x_i \partial x_j \partial x_h}, \quad (87)$$

где $\mu_1 = -\delta_n V - y_1$, $\mu_2 = -y_2$, а $\widetilde{x}$ — точка, находящаяся между точками x и $x - \delta_n V(t_k^{[n]}, x)\vec{e}_1 - y$.

Так как

$$\int_{\mathbb{R}^2} \Theta_n(y) y_j dy = 0; \quad \int_{\mathbb{R}^2} \Theta_n(y) y_i y_j dy = 0, \quad i \neq j; \quad \int_{\mathbb{R}^2} \Theta_n(y) y_i^2 dy = 2\delta_n \kappa,$$

имеем

$$\int_{\mathbb{R}^2} \Theta_n(y) y \cdot \nabla U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) dy = 0, \tag{88}$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} \Theta_n(y) \Big[\frac{1}{2} \delta_n^2 (V(t_k^{[n]}, x))^2 \frac{\partial^2 U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)}{\partial x_1^2} + \\ + \delta_n \sum_{j=1}^{2} V(t_k^{[n]}, x) y_j \frac{\partial^2 U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)}{\partial x_1 \partial x_j} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} y_i y_j \frac{\partial^2 U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)}{\partial x_i \partial x_j} \Big] dy = \\ = \delta_n \kappa \Delta U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) + \delta_n^2 \frac{1}{2} (V(t_k^{[n]}, x))^2 \frac{\partial^2 U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)}{\partial x_1^2}. \tag{89}$$

С другой стороны, поскольку $|\mu_1| \leqslant \delta_n |V| + |y_1|$ и $|\mu_2| = |y_2|$, существует постоянная C такая, что

$$\Big| \frac{1}{6} \sum_{i,j,h=1}^{2} \mu_i \mu_j \mu_h \frac{\partial^3 U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, \widetilde{x})}{\partial x_i \partial x_j \partial x_h} \Big| \leqslant C(\delta_n |V| + |y|)^3 \Big| \frac{\partial^3 U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, \widetilde{x})}{\partial x_i \partial x_j \partial x_h} \Big|.$$

Так как согласно лемме 4 производные третьего порядка функции $U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, \ \cdot\ )$ при $0 < \varepsilon_1 \leqslant t_{k-1}^{[n]} < \tau$ равномерно ограничены, существует постоянная C' такая, что

$$\Big| \int_{\mathbb{R}^2} \Theta_n(y) \frac{1}{6} \sum_{i,j,h=1}^{2} \mu_i \mu_j \mu_h \frac{\partial^3 U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, \widetilde{x})}{\partial x_i \partial x_j \partial x_h} dy \Big| \leqslant (\delta_n^3 + \delta_n^{3/2}) C'. \tag{90}$$

Что касается слагаемого, относящегося к F, имеем

$$F(t_{k-1}^{[n]}, x - y, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x - y)) = \\ = F(t_{k-1}^{[n]}, x, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)) - \sum_{i=1}^{2} y_i (F'_{i,k-1}(\widetilde{x}) + F'_{u,k-1}(\widetilde{x}) w_{i,k-1}^{[1,n]}(\widetilde{x})),$$

где $F'_{i,k-1}(\widetilde{x})$ и $F'_{u,k-1}(\widetilde{x})$ — введенные в (80) обозначения (вычисленные в $\widetilde{x}$ вместо x) и $w_{i,k-1}^{[1,n]}$ — введенные в (36) обозначения, а $\widetilde{x}$ — точка, находящаяся между x и $x - y$.

Поскольку согласно условию (11) и лемме 2 функции $F'_{i,k-1}$, $F'_{u,k-1}$ и $w_{i,k-1}^{[1,n]}$ равномерно ограничены, получим оценку

$$\left|\int_{\mathbb{R}^2}\Theta_n(y)F(t_{k-1}^{[n]},x-y,U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]},x-y))dy-\right.$$
$$\left.-F(t_{k-1}^{[n]},x,U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]},x))\right|\leqslant C''\sqrt{\delta_n}, \quad (91)$$

где C'' — независимая от n постоянная.

Из (87)–(91) следует, что

$$U^{[n]}(t_k^{[n]},x)-U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]},x)=-\delta_n V(t_k^{[n]},x)\partial_{x_1}U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]},x)+$$
$$+\delta_n\kappa\Delta U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]},x)+\delta_n F(t_{k-1}^{[n]},x,U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]},x))+R',$$

$$|R'|\leqslant(\delta_n^3+\delta_n^{3/2})C_0,$$

где C_0 — независимая от n постоянная. Отсюда, разделив обе части этого равенства на δ_n, получим (85). □

Следствие. *Пусть ε_1 и τ — действительные числа такие, что $0<\varepsilon_1<\tau<\infty$. Тогда существует постоянная K, которая зависит от ε_1 и τ, но не зависит от n и удовлетворяет соотношениям*

$$|U^{[n]}(t_1,x)-U^{[n]}(t_2,x)|\leqslant K|t_1-t_2| \quad \forall t_1,t_2\in[\varepsilon_1,\tau],\ \forall x\in\mathbb{R}^d, \quad (92)$$

$$|U(t_1,x)-U(t_2,x)|\leqslant K|t_1-t_2| \quad \forall t_1,t_2\in[\varepsilon_1,\tau],\ \forall x\in\mathbb{R}^d, \quad (93)$$

где $U(t,x)$ — предельная функция последовательности $\left\{U^{[n]}(t,x)\right\}_{n=1}^{\infty}$.

Доказательство. Так как правая часть (85) ограничена постоянной K, неравенство (92) следует из (85) и (24).

Неравенство (93) следует из (92) и предельного перехода. □

Теперь положим

$$\zeta^{[n]}(t,x)=\frac{U^{[n]}(t,x)-U^{[n]}(t-\delta_n,x)}{\delta_n}.$$

Лемма 10. *Пусть выполнены условия теоремы A. Пусть ε_1 и τ — действительные числа такие, что $0<\varepsilon_1<\tau<\infty$. Пусть $U^{[n]}(t_k^{[n]},x)$ — определенная в (22), (23) функция. Тогда при $\varepsilon_1+2\delta_n\leqslant t\leqslant\tau-\delta_n$ и $x\in\mathbb{R}^2$ имеем*

$$\zeta^{[n]}(t,x)=-V(t,x)\partial_{x_1}U^{[n]}(t-\delta_n,x)+\kappa\Delta U^{[n]}(t-\delta_n,x)+$$
$$+F(t-\delta_n,x,U^{[n]}(t-\delta_n,x))+R_1, \quad (94)$$

где

$$|R_1|\leqslant\delta_n^{1/2}C_0, \quad (95)$$

а C_0 — постоянная, которая зависит от ε_1 и τ, но не зависит от n.

Доказательство. Если $t = k\delta_n$ ($k \in \mathbb{N}$), то соотношения (94), (95) совпадают с (85), (86). Если $t_k^{[n]} < t < t_{k+1}^{[n]}$, то согласно (24) имеем

$$\zeta^{[n]}(t,x) = \frac{t_{k+1}^{[n]} - t}{\delta_n}\zeta^{[n]}(t_k^{[n]},x) + \frac{t - t_k^{[n]}}{\delta_n}\zeta^{[n]}(t_{k+1}^{[n]},x). \tag{96}$$

Следовательно, если положим

$$D_V = -\Big[\frac{t_{k+1}^{[n]} - t}{\delta_n}(V(t_k^{[n]},x) - V(t,x))\partial_{x_1}U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]},x) + \\ + \frac{t - t_k^{[n]}}{\delta_n}(V(t_{k+1}^{[n]},x) - V(t,x))\partial_{x_1}U^{[n]}(t_k^{[n]},x)\Big],$$

$$D_F = \frac{t_{k+1}^{[n]} - t}{\delta_n}\big[F(t_{k-1}^{[n]},x,U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]},x)) - F(t-\delta_n,x,U^{[n]}(t-\delta_n,x))\big] + \\ + \frac{t - t_k^{[n]}}{\delta_n}\big[F(t_k^{[n]},x,U^{[n]}(t_k^{[n]},x)) - F(t-\delta_n,x,U^{[n]}(t-\delta_n,x))\big],$$

то из (85) и (24) следует, что

$$\zeta^{[n]}(t,x) = -V(t,x)\partial_{x_1}U^{[n]}(t-\delta_n,x) + \kappa\Delta U^{[n]}(t-\delta_n,x) + \\ + F(t-\delta_n,x,U^{[n]}(t-\delta_n,x)) + D_V + D_F + R, \quad |R| \leqslant \delta_n^{1/2}C_0.$$

Кроме того, из условий о гладкости функций v и f, леммы 2 и следствия леммы 9 вытекает неравенство

$$|D_V + D_F| \leqslant \delta_n C_0,$$

где C_0 — постоянная, которая зависит от ε_1 и τ, но не зависит от n. Суммируя эти соотношения, получим (94). □

Теперь перейдем к доказательству теоремы A.

Доказательство теоремы A. Леммы 6, 7, 8 позволяют перейти к пределу в (94), так что мы имеем

$$\lim_{n\to\infty}\zeta^{[n]}(t,x) \equiv \zeta^{[*]}(t,x) = \\ = -V(t,x)\partial_{x_1}U(t,x) + \kappa\Delta U(t,x) + F(t,x,U(t,x)). \tag{97}$$

С другой стороны, из соотношений (96) и (24) вытекает, что

$$\int_{t_1}^{t_2}\zeta^{[*]}(t,x)dt = \lim_{n\to\infty}\int_{t_1}^{t_2}\zeta^{[n]}(t,x)dt = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 dh\int_{t_1-\delta_n h}^{t_2-\delta_n h}\partial_t U^{[n]}(t,x)dt = \\ = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 dh\big[U^{[n]}(t_2-\delta_n h,x) - U^{[n]}(t_1-\delta_n h,x)\big] = U(t_2,x) - U(t_1,x),$$

откуда следует

$$\zeta^{[*]}(t,x) = \partial_t U(t,x). \tag{98}$$

Так как $u^{[n]}(t,x) = U^{[n]}(t,x)$ при $t \geqslant 0$, $x_2 > 0$ (см. (31)), имеем

$$U(t,x)\big|_{\{x_2>0\}} = \lim_{n\to\infty} U^{[n]}(t,x)\big|_{\{x_2>0\}} = \lim_{n\to\infty} u^{[n]}(t,x) \equiv u(t,x). \tag{99}$$

Следовательно, принимая во внимание равномерную сходимость $U^{[n]}(t,x)$ и их производных первого порядка по x на $[0,\tau]\times\mathbb{R}^2$ при любом $\tau > 0$ (см. леммы 6 и 7) и поточечную сходимость их производных второго порядка по x при $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^2$ (см. лемму 8), из (97) и (98) выводим, что предельная функция $u(t,x)$ удовлетворяет уравнению (3) ($t > 0$). Кроме того, из начального условия (22) для $U^{[n]}(t,x)$ и соотношения (99) непосредственно следует, что $u(t,x)$ удовлетворяет начальному условию (4). Аналогично, из соотношений (29) и (99), с учетом непрерывности $U^{[n]}(t,x)$ и $U(t,x)$, следует, что $u(t,x)$ удовлетворяет граничному условию (5). Теорема доказана. $\square$

6. Численный эксперимент для задач испарения и диффузии водяного пара над морем. Чтобы показать возможность использования полученных результатов для решения конкретных задач математической физики, приведем простой численный эксперимент для задач испарения и диффузии водяного пара над морем. Данные процессы могут быть описаны поставленной в п. 1 задачей.

6.1. Физические предпосылки. Испарение воды с поверхности теплого моря и диффузия водяного пара в воздух играют важную роль в формировании штормовых явлений типа тропического циклона или Эль-Ниньо (см., например, [26–30]). Поэтому поиск действенного математического описания этого процесса является актуальным.

Напомним, что когда действительная плотность пара превышает плотность насыщенного пара, начинается процесс конденсации, который может вызвать грозовое явление, а плотность насыщенного пара определяется температурой (см., например, [31]). Поэтому нас интересует эволюция плотности пара в ситуации, когда влажность воздуха над морем близка к насыщению при возможном горизонтальном ветре.

6.2. Численная схема. Будем использовать сетку

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k < t_{k+1} < \cdots, \quad t_k - t_{k-1} = \delta_t, \tag{100}$$

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_{N_x} = \overline{X}_1, \quad x_i - x_{i-1} = \delta_x, \tag{101}$$

$$0 = y_0 < y_1 < \cdots < y_j < y_{j+1} < \cdots < y_{N_y} = \overline{Y}_1, \quad y_j - y_{j-1} = \delta_y, \tag{102}$$

где t_k, x_i, y_j — текущий момент времени, текущее горизонтальное положение и текущая высота соответственно. Пусть $v(t_k,x_i,y_j)$ — скорость переноса (только в горизонтальном направлении). Для простоты предположим, что $v(t_k,x_i,y_j) \geqslant 0$. На этой сетке с переносом $v(t_k,x_i,y_j)$ и дискретизируемой диффузией построим функцию $u(t_k,x_i,y_j)$, представляющую плотность водяного пара.

Для $k = 0$ это просто начальное условие $u(t_0, x_i, y_j) = u_0(x_i, y_j)$. Если известны $u(t_{k-1}, x_{i'}, y_{j'})$, $i' = 0, 1, \dots, N_x$, $j' = 0, 1, \dots, N_y$, то определим $u(t_k, x_i, y_j)$ соотношением

$$\begin{aligned} u(t_k, x_i, y_j) &= \\ &= \frac{\tilde{x} - x_{i^*-1}}{\delta_x}\Big[(1-\varepsilon)u(t_{k-1}, x_{i^*}, y_j) + \\ &\qquad + \frac{\varepsilon}{2}u(t_{k-1}, x_{i^*}, y_{j+1}) + \frac{\varepsilon}{2}u(t_{k-1}, x_{i^*}, y_{j-1})\Big] + \\ &+ \frac{x_{i^*} - \tilde{x}}{\delta_x}\Big[(1-\varepsilon)u(t_{k-1}, x_{i^*-1}, y_j) + \\ &\qquad + \frac{\varepsilon}{2}u(t_{k-1}, x_{i^*-1}, y_{j+1}) + \frac{\varepsilon}{2}u(t_{k-1}, x_{i^*-1}, y_{j-1})\Big], \end{aligned} \tag{103}$$

где ε — такой параметр, что $0 < \varepsilon < 1$, а x_{i^*-1} и x_{i^*} — два положения такие, что

$$x_{i^*-1} < x_i - \delta_t v(t_k, x_i, y_j) \leqslant x_{i^*}.$$

Если $x_i - \delta_t v(t_k, x_i, y_j) \leqslant 0$, то $u(t_{k-1}, x_{i^*}, y_{j'})$ и $u(t_{k-1}, x_{i^*-1}, y_{j'})$ заменяются данными условия входа. Определение (103) является простейшим дискретным вариантом определения (17).

Поскольку при схеме (103) в определении $u(t_k, x_i, y_j)$ участвуют только значения уровней y_{j-1}, y_j и y_{j+1}, то можно построить $u(\,\cdot\,,\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ непосредственно с ненулевым граничным условием.

6.3 Результаты численного эксперимента. В (101), (102) и (103) выберем $\delta_x = 50$ м, $N_x = 400$, $\delta_y = 40$ м, $N_y = 25$, $\varepsilon = 0.4$ и

$$v(t_k, x_i, y_j) = 2\ln\Big(\frac{y_j + \eta}{\eta}\Big), \quad \eta = \frac{5}{e-1}.$$

Для температуры $T(y_j)$ и плотности насыщенного пара $\overline{u}_{vs}(T(y_j))$ на каждой высоте y_j примем использованные в [30] значения, которые соответствуют распределению температуры в гидростатическом состоянии влажного воздуха. Выберем граничные условия

$$u(t_k, x_i, y_0) = \overline{u}_{vs}(T(y_0)), \quad i = 0, 1, \dots, N_x, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$u(t_k, x_i, y_{N_y}) = 0.95 \cdot \overline{u}_{vs}(T(y_{N_y})), \quad i = 0, 1, \dots, N_x, \quad k = 0, 1, 2, \dots;$$

условия входа

$$u(t_k,\,\cdot\,, y_j) = 0.95 \cdot \overline{u}_{vs}(T(y_j)), \quad j = 1, 2, \dots, N_y; \quad u(t_k,\,\cdot\,, y_0) = \overline{u}_{vs}(T(y_0))$$

и начальное условие

$$u(t_0, x_i, y_j) = 0.95 \cdot \overline{u}_{vs}(T), \quad i = 0, 1, \dots, N_x, \quad j = 0, 1, \dots, N_y.$$

Результаты расчетов приводятся в таблице. В первом столбце указана высота y (м) каждого уровня. Во втором и третьем столбцах — температура T (K) и плотность насыщенного пара $\overline{u}_{vs}$ (г/м^3) соответственно. В следующих

Эволюция плотности пара при $x = 18$ км на шкале времени $0 \leqslant k \leqslant 500$ $(t = k\delta_t)$
[Vapor density evolution at $x = 18$ km on the time scale $0 \leqslant k \leqslant 500$ $(t = k\delta_t)$]

y, m	T, K	$\overline{u}_{vs}$, (g/m^3)	$k = 0$	$k = 100$	$k = 200$	$k = 300$	$k = 400$	$k = 500$
600	294.1	183.3	174.2	175.9	178.1	179.9	180.7	180.7
480	295.3	196.2	186.4	188.8	191.6	193.7	194.7	194.7
360	296.5	209.9	199.4	203.0	206.3	208.4	209.3	209.3
240	297.7	224.4	213.2	219.1	222.0	223.7	**224.5**	**224.5**
120	298.8	239.7	227.8	236.9	238.7	239.7	**240.2**	**240.2**
0	300.0	255.9	***255.9***	***255.9***	***255.9***	***255.9***	***255.9***	***255.9***

столбцах приведены значения плотности пара в моменты времени $k = 0$, 100, 200, 300, 400 и 500. Отметим, что согласно расчетам при $k = 400$ $(t = k\delta_t)$ на уровнях $y = 120$ м и $y = 240$ м плотность пара u достигает плотности насыщенного пара $\overline{u}_{vs}(T(y))$, что приводит к конденсации водяного пара и, следовательно, может начаться процесс «конденсация – нагревание воздуха – восходящее движение воздуха», характеризующийся своим бурным развитием.

Выводы. В данной работе доказана сходимость приближенных решений для уравнения переноса-диффузии с горизонтальным переносом в полуплоскости $\mathbb{R}^2_+$, построенных ядром теплопроводности и переносом на каждом шаге дискретизации времени, к функции, удовлетворяющей уравнению в полуплоскости, начальному условию и однородному граничному условию Дирихле на $\{x_2 = 0\}$. Равномерна сходимость приближенных решений и их производных по x_1 и x_2 первого порядка, а сходимость их производных по x_1 и x_2 второго порядка поточечна. Тем самым мы дали ответ на основной вопрос о приближении ядром теплопроводности решения уравнения переноса-диффузии с граничным условием. На основе этого результата придется проводить исследование случаев более общих условий с новыми разработками.

Конкурирующие интересы. Мы заявляем об отсутствии явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Авторский вклад и ответственность. Мы несем полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательной версии рукописи нами одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Гидродинамика / Теоретическая физика.* Т. 6. М.: Наука, 1986. 736 с.
2. Алоян А. Е. *Моделирование динамики и кинетики газовых примесей и аэрозолей в атмосфере.* М.: Наука, 2008. 415 с. EDN: QKHODT.
3. Носов А. В., Крылов А. Л., Киселев В. П., Казаков С. В. *Моделирование миграции радионуклидов в поверхностных водах.* М.: Наука, 2010. 253 с. EDN: YLEGPB.
4. Moreira D. M., Moraes A. C., Goulart A. G., Toledo de Almeida Albuquerque T. A contribution to solve the atmospheric diffusion equation with eddy diffusivity depending on source distance // *Atmospheric Environment*, 2014. vol. 83. pp. 254–259. DOI: https://doi.org/10.1016/j.atmosenv.2013.10.045.
5. Цыденов Б. О. Численное исследование распространения примеси в пресном озере на основе распределения мутности // *Вычислительные технологии*, 2017. Т. 22 (спец. вып. 1). С. 113–124. EDN: YPLUKT.

6. Esmail S., Agrawal P., Shaban Aly A novel analytical approach for advection diffusion equation for radionuclide release from area source // *Nuclear Eng. Techn.*, 2020. vol. 6. pp. 816–826. DOI: https://doi.org/10.1016/j.net.2019.09.018.
7. Essa Kh. S. M., El-Otaify M. S. Mathematical model for atmospheric dispersion equation (a review) // *J. Rad. Nucl. Appl.*, 2021. vol. 52, no. 2. pp. 119–128. DOI: https://doi.org/10.18576/jrna/060203.
8. Давыдова М. А., Еланскй Н. Ф., Захарова С. А., Постыляков О. В. Применение численно-асимптотического подхода в задаче восстановления параметров локального стационарного источника антропогенного загрязнения // *Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр.*, 2021. Т. 496. С. 34–39. EDN: RBHKAN. DOI: https://doi.org/10.31857/S2686954321010021.
9. Khoshgou H., Neyshabouri S. A. A. S. Using the backward probability method in contaminant source identification with a finite-duration source loading in a river // *Environ. Sci. Pollut. Res.*, 2021. vol. 29, no. 4. pp. 6306–6316. DOI: https://doi.org/10.1007/s11356-021-15372-6.
10. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.* М.: Наука, 1967. 736 с. EDN: VLRBIL.
11. Полянин А. Д., Вязьмин А. В., Журов А. И., Казенин Д. А. *Справочник по точным решениям уравнений тепло- и массопереноса.* М.: Факториал, 1998. 368 с. EDN: TVLOTF.
12. Evans L. C. *Partial Differential Equations* / Graduate Studies in Mathematics. vol. 19. Providence, RI: American Mathematical Society, 2010. xxii+749 pp. DOI: https://doi.org/10.1090/gsm/019.
13. Гихман И. И., Скороход А. В. *Введение в теорию случайных процессов.* М.: Наука, 1977. 567 с.
14. Pardoux É., Peng S. Backward doubly stochastic differential equations and systems of quasilinear SPDEs // *Prob. Theory Rel. Fields*, 1994. vol. 98, no. 2. pp. 209–227. DOI: https://doi.org/10.1007/bf01192514.
15. Pardoux É., Veretennikov A. Yu. Averaging of backward stochastic differential equations, with application to semi-linear PDE's // *Stochastics Stochastics Rep.*, 1997. vol. 60, no. 3–4. pp. 255–270. DOI: https://doi.org/10.1080/17442509708834109.
16. Pardoux É., Răşcanu A. *Stochastic Differential Equations, Backward SDEs, Partial Differential Equations* / Stochastic Modelling and Applied Probability. vol. 69. Heidelberg: Springer, 2014. xvii+667 pp. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-05714-9.
17. Freidlin M. I., Wentzell A. D. *Random Perturbations of Dynamical Systems* / Grundlehren der mathematischen Wissenchafften. vol. 260. Berlin, Heidelberg: Springer, 2012. xxviii+458 pp. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-25847-3.
18. Milstein G. N., Tretyakov M. V. *Stochastic Numerics for Mathematical Physics* / Scientific Computation. Berlin, Heidelberg: Springer, 2004. xix+596 pp. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-10063-9.
19. Desmond J. H., Mao X., Stuart A. M. Strong convergence of Euler-type methods for nonlinear stochastic differential equations // *SIAM J. Numer. Anal.*, 2002. vol. 40, no. 3. pp. 1041–1063. DOI: https://doi.org/10.1137/s0036142901389530.
20. Higham D. J. Stochastic ordinary differential equations in applied and computational mathematics // *IMA J. Appl. Math.*, 2011. vol. 76, no. 3. pp. 449–474. DOI: https://doi.org/10.1093/imamat/hxr016.
21. Mao X. The truncated Euler–Maruyama method for stochastic differential equations // *J. Comput. Appl. Math.*, 2015. vol. 290. pp. 370-384. EDN: USCFLN DOI: https://doi.org/10.1016/j.cam.2015.06.002.
22. Taleb L., Selvaduray S., Fujita Yashima H. Approximation par une moyenne locale de la solution de l'équation de transport-diffusion // *Afr. Math. Ann.*, 2020. vol. 8. pp. 71–90 (In French).
23. Smaali H., Fujita Yashima H. Une généralisation de l'approximation par une moyenne locale de la solution de l'équation de transport-diffusion // *Afr. Math. Ann.*, 2021. vol. 9. pp. 89–108 (In French).

24. Тихонов А. Н., Самарский А. А. *Уравнения математической физики*. М.: Наука, 1977. 735 с.
25. Владимиров В. С. *Обобщенные функции в математической физике*. М.: Наука, 1979. 280 с.
26. Emanuel K. A similarity hypothesis for air-sea exchange at extreme wind speeds // *J. Atmos. Sci.*, 2003. vol. 60, no. 11. pp. 1420–1428. DOI: https://doi.org/10.1175/1520-0469(2003)060<1420:ASHFAE>2.0.CO;2.
27. Du Y., Xie S., Huang G., Hu K. Role of air-sea interaction in the long persistence of El Niño-induced North Indian Ocean warming // *J. Climate*, 2009. vol. 22, no. 8. pp. 2023–2038. DOI: https://doi.org/10.1175/2008JCLI2590.1.
28. Власова Г. А., Нгуен Ба Суан, Деменок М. Н. Циркуляция вод Южно-Китайского моря в зоне Вьетнамского течения в условиях южного тропического циклона весной 1999 г.: результаты численного моделирования // *Фундам. прикл. гидрофиз.*, 2016. Т. 9, № 4. С. 25–34. EDN: XELWBN.
29. Shi Y., Zhang Q., Wang S., Yang K., Yang Y., Ma Y. Impact of typhoon on evaporation dust in the Northwest Pacific Ocean // *IEEE Access*, 2019. vol. 7. pp. 109111–109119. DOI: https://doi.org/10.1109/access.2019.2932969.
30. Аоуаоуда М., Аяди А., Фужита-Яшима Х. Математическое моделирование тропических циклонов на основе описания траекторий ветра // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2019. Т. 59, № 9. С. 1554–1569. EDN: JJUVVC. DOI: https://doi.org/10.1134/S0044466919090047.
31. Cotton W., Bryan G., van den Heever S. *Storm and Cloud Dynamics. The Dynamics of Clouds and Precipitating Mesoscale Systems* / International Geophysics Series. vol. 99. Amsterdam: Academic Press, 2011. xvi+809 pp. DOI: https://doi.org/10.1016/c2009-0-02127-8.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 2, pp. 222–258
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1881

MSC: 35K20, 35K58, 35K08

Convergence of approximate solutions by heat kernel for transport-diffusion equation in a half-plane

***M. Aouaouda*[1], *A. Ayadi*[1], *H. Fujita Yashima*[2]**

[1] Université Larbi Ben M'hidi,
Oum El Bouaghi, 04000, Algeria.
[2] École Normale Supérieure Assia Djebar,
Ali Mendjeli, Constantine, 25000, Algeria.

Abstract

In this paper, by using the heat kernel and the transport operator on each step of time discretization, approximate solutions for the transport-diffusion equation on the half-plane $\mathbb{R}^2_+$ are constructed, and their convergence to a function which satisfies the transport-diffusion equation and the initial and boundary conditions is proved. These approximate solutions can be considered as a deterministic version of (the approximation of) the stochastic representation of the solution to parabolic equation, realized by the relationship between the heat kernel and the Brownian motion. But as they are defined only by an integral operator and transport, their properties and their convergence are proved without using probabilistic notions. The result of this paper generalizes that of recent papers about the convergence of analogous approximate solutions on the whole space $\mathbb{R}^n$. In case of the half-plane, it is necessary to elaborate (not trivial) estimates of the smoothness of the approximate solutions influenced by boundary condition.

Keywords: transport-diffusion equation, approximate solution, heat kernel.

Received: 26th August, 2021 / Revised: 5th May, 2022 /
Accepted: 23rd May, 2022 / First online: 1st June, 2022

Differential Equations and Mathematical Physics
Research Article

Please cite this article in press as:
Aouaouda M., Ayadi A., Fujita Yashima H. Convergence of approximate solutions by heat kernel for transport-diffusion equation in a half-plane, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 2, pp. 222–258. EDN: JNGCBE. DOI: 10.14498/vsgtu1881 (In Russian).

Authors' Details:
Meryem Aouaouda https://orcid.org/0000-0002-8826-374X
PhD Student; Member of Laboratry; Lab. of Dynamical System and Control;
e-mail: meryem.aouaouda@gmail.com
Abedlhamid Ayadi https://orcid.org/0000-0002-5600-7493
Professor; Chief of Research Team; Lab. of Dynamical System and Control;
e-mail: facmaths@yahoo.fr
Hisao Fujita Yashima https://orcid.org/0000-0001-9937-8406
Professor; Chief of Research Team; Lab. of Applied Mathematics and Didactics;
e-mail: hisafujitayashima@yahoo.com; hisaofujitayashima@qq.com

Competing interests. We declare that we have no apparent or potential conflicts of interest related to the publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. We take full responsability for submit the final manuscript to print. We approved the final version of the manuscript.

Funding. This research received no specific grant from any funding agency in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

References

1. Landau L. D., Lifchitz E. M. *Gidrodinamika / Teoreticheskaia fizika* [Hydrodynamics / Theoretical Physics] Vol. 6. Moscow, Nauka, 1986, 736 pp. (In Russian)
2. Aloyan A. E. *Modelirovanie dinamiki i kinetiki gazovykh primesei i aerozolei v atmosfere* [Modeling, Dynamics and Kinetics of Gas Admixtures in the Atmosphere]. Moscow, Nauka, 2008, 415 pp. (In Russian)
3. Nosov A. V., Krylov A. L., Kiselev V. P., Kazakov S. V. *Modelirovanie migratsii radionuklidov v poverkhnostnykh vodakh* [Modeling of Migration of Radioactive Substances in Surface Water]. Moscow, Nauka, 2010, 253 pp. (In Russian)
4. Moreira D. M., Moraes A. C., Goulart A. G., Toledo de Almeida Albuquerque T. A contribution to solve the atmospheric diffusion equation with eddy diffusivity depending on source distance, *Atmospheric Environment*, 2014, vol. 83, pp. 254–259. DOI: https://doi.org/10.1016/j.atmosenv.2013.10.045.
5. Tsydenov B. O. A numerical study of impurity propagation in a freshwater lake on the basis of water turbidity distribution, *Vych. Tekhn.*, 2017, vol. 22, no. 1 (Special Issue), pp. 113–124 (In Russian).
6. Esmail S., Agrawal P., Shaban Aly A novel analytical approach for advection diffusion equation for radionuclide release from area source, *Nuclear Eng. Techn.*, 2020, vol. 6, pp. 816–826. DOI: https://doi.org/10.1016/j.net.2019.09.018.
7. Essa Kh. S. M., El-Otaify M. S. Mathematical model for atmospheric dispersion equation (a review), *J. Rad. Nucl. Appl.*, 2021, vol. 52, no. 2, pp. 119–128. DOI: https://doi.org/10.18576/jrna/060203.
8. Davydova M. A., Zakharova S. A., Elansky N. F., Postylyakov O. V. Application of a numerical-asymptotic approach to the problem of restoring the parameters of a local stationary source of anthropogenic pollution, *Dokl. Math.*, 2021, vol. 103, no. 1, pp. 26–31. EDN: RLGVGG. DOI: https://doi.org/10.1134/S1064562421010026.
9. Khoshgou H., Neyshabouri S. A. A. S. Using the backward probability method in contaminant source identification with a finite-duration source loading in a river, *Environ. Sci. Pollut. Res.*, 2021, vol. 29, no. 4, pp. 6306–6316. DOI: https://doi.org/10.1007/s11356-021-15372-6.
10. Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., Uraltseva N. N. *Linear and Quasi-Linear Equations of Parabolic Type*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 23. Providence, RI, American Mathematical Society, 1968, xi+648 pp. EDN: VLRBJF.
11. Polyanin A. D., Vyazmin A. V., Zhurov A. I., Kazenin D. A. *Spravochnik po tochnym resheniiam uravnenii teplo- i massoperenosa* [Handbook of Exact Solutions of Heat- and Mass-Transfer Equations]. Moscow, Faktorial, 1988, 368 pp. (In Russian)
12. Evans L. C. *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 19. Providence, RI, American Mathematical Society, 2010, xxii+749 pp. DOI: https://doi.org/10.1090/gsm/019.
13. Gikhman I., Skorokhod A. *Introduction à la théorie des processus aléatoires.* Moscow, Mir Publ., 1980, 557 pp. (In French)
14. Pardoux É., Peng S. Backward doubly stochastic differential equations and systems of quasilinear SPDEs, *Prob. Theory Rel. Fields*, 1994, vol. 98, no. 2, pp. 209–227. DOI: https://doi.org/10.1007/bf01192514.

15. Pardoux É., Veretennikov A. Yu. Averaging of backward stochastic differential equations, with application to semi-linear PDE's, *Stochastics Stochastics Rep.*, 1997, vol. 60, no. 3–4, pp. 255–270. DOI: https://doi.org/10.1080/17442509708834109.

16. Pardoux É., Răşcanu A. *Stochastic Differential Equations, Backward SDEs, Partial Differential Equations*, Stochastic Modelling and Applied Probability, vol. 69. Heidelberg, Springer, 2014, xvii+667 pp. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-05714-9.

17. Freidlin M. I., Wentzell A. D. *Random Perturbations of Dynamical Systems*, Grundlehren der mathematischen Wissenchafften, vol. 260. Berlin, Heidelberg, Springer, 2012, xxviii+458 pp. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-25847-3.

18. Milstein G. N., Tretyakov M. V. *Stochastic Numerics for Mathematical Physics*, Scientific Computation. Berlin, Heidelberg, Springer, 2004, xix+596 pp. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-10063-9.

19. Desmond J. H., Mao X., Stuart A. M. Strong convergence of Euler-type methods for nonlinear stochastic differential equations, *SIAM J. Numer. Anal.*, 2002, vol. 40, no. 3, pp. 1041–1063. DOI: https://doi.org/10.1137/s0036142901389530.

20. Higham D. J. Stochastic ordinary differential equations in applied and computational mathematics, *IMA J. Appl. Math.*, 2011, vol. 76, no. 3, pp. 449–474. DOI: https://doi.org/10.1093/imamat/hxr016.

21. Mao X. The truncated Euler–Maruyama method for stochastic differential equations, *J. Comput. Appl. Math.*, 2015, vol. 290, pp. 370-384. EDN: USCFLN DOI: https://doi.org/10.1016/j.cam.2015.06.002.

22. Taleb L., Selvaduray S., Fujita Yashima H. Approximation par une moyenne locale de la solution de l'équation de transport-diffusion, *Afr. Math. Ann.*, 2020, vol. 8, pp. 71–90 (In French).

23. Smaali H., Fujita Yashima H. Une généralisation de l'approximation par une moyenne locale de la solution de l'équation de transport-diffusion, *Afr. Math. Ann.*, 2021, vol. 9, pp. 89–108 (In French).

24. Tikhonov A. N., Samarskii A. A. *Equations of Mathematical Physics*, International Series of Monographs on Pure and Applied Mathematics, vol. 39. New York, Pergamon Press, 1963, xvi+765 pp.

25. Vladimirov V. S *Generalized Functions in Mathematical Physics*. Moscow, Mir Publ., 1979, 280 pp.

26. Emanuel K. A similarity hypothesis for air-sea exchange at extreme wind speeds, *J. Atmos. Sci.*, 2003, vol. 60, no. 11, pp. 1420–1428. DOI: https://doi.org/10.1175/1520-0469(2003)060<1420:ASHFAE>2.0.CO;2.

27. Du Y., Xie S., Huang G., Hu K. Role of air-sea interaction in the long persistence of El Niño-induced North Indian Ocean warming, *J. Climate*, 2009, vol. 22, no. 8, pp. 2023–2038. DOI: https://doi.org/10.1175/2008JCLI2590.1.

28. Vlasova G. A., Nguen Ba Suan, Demenok M. N. The water circulation of the South China Sea in a zone of the Vietnamese Current under the influence of southern tropical cyclone in spring of 1999: Results of numerical modeling, *Fundam. Prikl. Gidrofiz.*, 2016, vol. 9, no. 4, pp. 25–34 (In Russian).

29. Shi Y., Zhang Q., Wang S., Yang K., Yang Y., Ma Y. Impact of typhoon on evaporation dust in the Northwest Pacific Ocean, *IEEE Access*, 2019, vol. 7, pp. 109111–109119. DOI: https://doi.org/10.1109/access.2019.2932969.

30. Aouaouda M., Ayadi A., Fujita Yashima H. Mathematical modeling of tropical cyclones on the basis of wind trajectories, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2019, vol. 59, no. 9, pp. 1493–1507. EDN: FMCFRG. DOI: https://doi.org/10.1134/S0965542519090045.

31. Cotton W., Bryan G., van den Heever S. *Storm and Cloud Dynamics. The Dynamics of Clouds and Precipitating Mesoscale Systems*, International Geophysics Series, vol. 99. Amsterdam, Academic Press, 2011, xvi+809 pp. DOI: https://doi.org/10.1016/c2009-0-02127-8.