



УДК 519.248:[33+301]

Модели стохастической динамики развития производственных предприятий с запаздывающими внутренними и внешними инвестициями

А. Л. Сараев, Л. А. Сараев

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева,
Россия, 443086, Самара, Московское ш., 34.

Аннотация

Предложены новые стохастические модели динамического развития предприятий, которые восстанавливают свои производства за счет внутренних и внешних запаздывающих инвестиций. Установлены системы стохастических дифференциальных уравнений баланса для таких предприятий, описывающие случайные изменения факторов производства и выпуска продукции. Рассмотрены пропорциональные, прогрессивные и дигрессивные амортизационные отчисления и исследовано их взаимодействие с запаздывающими внутренними и внешними инвестициями. Сформулированы условия достижения равновесного состояния работы предприятий и вычислены соответствующие предельные значения факторов производства. Для численных решений систем стохастических дифференциальных уравнений развития предприятий получены алгоритмы метода Эйлера—Маруямы. Для каждой численной реализации этих алгоритмов построены соответствующие стохастические траектории для случайных функций факторов производства и выпуска продукции. Предложен вариант метода расчета математических ожиданий случайных функций факторов производства, для которых получена соответствующая система дифференциальных уравнений. Численный анализ решений стохастических дифференциальных уравнений для разработанных моделей показал хорошее соответствие известным статистическим данным развития производственных предприятий.

Ключевые слова: предприятие, факторы производства, производственная функция, выпуск продукции, ресурсы, стохастические уравнения,

Научная статья

© Коллектив авторов, 2021

© СамГТУ, 2021 (составление, дизайн, макет)

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Сараев А. Л., Сараев Л. А. Модели стохастической динамики развития производственных предприятий с запаздывающими внутренними и внешними инвестициями // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2021. Т. 25, № 4. С. 738–762. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1862>.

Сведения об авторах

Александр Леонидович Сараев  <https://orcid.org/0000-0002-9223-6330>

кандидат экономических наук; доцент; каф. математики и бизнес-информатики;
e-mail: alex.saraev@gmail.com

Леонид Александрович Сараев  <https://orcid.org/0000-0003-3625-5921>

доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой; каф. математики и бизнес-информатики; e-mail: saraev_leo@mail.ru

винеровский процесс, коэффициент сноса, коэффициент волатильности, запаздывание инвестиций.

Получение: 21 апреля 2021 г. / Исправление: 23 августа 2021 г. /

Принятие: 20 сентября 2021 г. / Публикация онлайн: 3 декабря 2021 г.

Введение. Одним из важных и актуальных направлений современной экономической теории является развитие экономико-математических методов прогнозирования показателей стохастической динамики производственных предприятий. Разработка на основе таких методов новых стохастических моделей для оценки деятельности предприятий позволяет проводить адекватный и эффективный анализ их работы, вычислять предельные значения для их производственных факторов, достоверно прогнозировать объемы выпуска продукции, объемы издержек и объемы прибыли, оценивать эффекты замещения производственных факторов и т.д.

Развитие и рост экономических систем вообще и производственных предприятий в частности представляет собой долгосрочную тенденцию увеличения показателей национальной экономики. Значительный вклад в разработку теоретических положений экономического роста представлен в работах [1–7].

На основе этих положений рядом исследователей разработаны модели роста, учитывающие влияние технического прогресса и роль информационных процессов [8–18].

Характер динамического развития предприятия определяется взаимодействием вкладываемых в его производство объемов инвестиций, объемов амортизации производственных факторов и затрат на модернизацию средств производства.

Привлечение в производство предприятия внутренних и внешних инвестиций представляет собой распределенный во времени процесс, поэтому модель развития предприятия должна учитывать не только инвестиции, поступающие в данный момент времени, но и всю историю их постепенного ввода.

Для построения моделей экономического развития предприятий, учитывающих запаздывание внутренних и внешних инвестиций, широко применяются дифференциальные уравнения, содержащие функции распределения постепенного и непрерывного ввода капиталовложений [9–31].

Известные многочисленные статистические данные деятельности различных производственных предприятий демонстрируют стохастический характер формирования объемов их производственных факторов и волатильность объемов выпуска продукции. Поэтому при построении математических моделей динамики экономических показателей предприятий следует опираться на теорию случайных функций. Стохастическое моделирование позволяет наиболее полно учесть нестабильный характер работы реальных предприятий и внести существенные дополнения в имеющиеся аналогичные детерминистские модели. Эффективным инструментом для построения недетерминированных моделей экономического развития предприятий является теория стохастических дифференциальных уравнений, учитывающая влияние случайных внешних воздействий.

Построение на основе этой теории определяющих уравнений балансов относительно объемов факторов производства и объемов выпуска продукции

производственных предприятий существенно обогащает известные детерминированные модели развития предприятий, в которых нельзя учесть внешние случайные возмущающие факторы [32–38].

Методы исследования приложений теории стохастических дифференциальных уравнений для моделирования случайных процессов подробно изложены в работах [39–43].

Применение численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений для расчетов реализаций случайных процессов и вычисления их математических ожиданий представлены в работах [44–54].

Целью публикуемой работы является разработка новых экономико-математических моделей стохастической динамики развития производственных предприятий за счет постепенного ввода внутренних и внешних запаздывающих инвестиций.

Научная новизна полученных моделей заключается в том, что они учитывают взаимодействие пропорциональных, прогрессивных и дигрессивных амортизационных отчислений с внутренними и внешними запаздывающими инвестициями и позволяют найти предельные значения факторов производства. Кроме того, эти модели способны описать не только стабильное поступательное развитие предприятий, но и приостановку их работы во время переоснащения производств и временного кризисного сворачивания производств при замене оборудования.

1. Постановка задачи. Пусть объемы выпуска продукции предприятием обеспечиваются набором ресурсов в виде производственных факторов $(Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$, представляющих собой основной капитал, оборотный капитал, финансовый капитал, трудовые ресурсы, привлекаемые в производство материалы, технологии и инновации и т.д.

Величины Q_s изменяются во времени t и представляют собой некоторые непрерывные и непрерывно дифференцируемые функции $Q_s = Q_s(t)$. Единицы измерения времени определяются экономическими условиями конкретной задачи. Это может быть один месяц, один квартал или один год.

Функции $Q_s = Q_s(t)$ являются ограниченными, для них существуют свои верхние и нижние предельные границы $Q_s^0 \leq Q_s \leq Q_s^\infty$, где $Q_s^0 = Q_s(0)$ — начальные значения факторов производства Q_s , а $Q_s^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} Q_s(t)$ — их предельные значения.

Значения компонентов Q_s^0 в начальный момент времени рассматриваемого процесса $t = 0$ считаются заданными.

Предельные значения объемов факторов производства Q_s^∞ определяются особенностями развития предприятий и подлежат вычислению.

Выпуск производственной продукции предприятием V описывается многофакторной производственной функцией Кобба—Дугласа

$$V = P \prod_{p=1}^n Q_p^{a_p}. \quad (1)$$

Здесь P — стоимость продукции, произведенной на единичные объемы ресурсов, a_k — представляют собой эластичности выпуска по соответствующим ресурсам Q_k , $(0 < a_k < 1)$.

Приращения объемов факторов производства $Q_s = Q_s(t)$ за малый интервал времени Δt составят величины $\Delta Q_s(t)$, которые можно представить в виде четырех слагаемых [32]:

$$\Delta Q_s(t) = \Delta Q_s^A(t) + \Delta Q_s^I(t) + \Delta Q_s^G(t) + \Delta Q_s^W(t), \quad (2)$$

где $\Delta Q_s^A(t)$ — приращения амортизаций объемов факторов производства $Q_s(t)$, $\Delta Q_s^I(t)$ — частичные восстановления объемов факторов производства $Q_s(t)$ за счет внутренних инвестиций, $\Delta Q_s^G(t)$ — частичные восстановления объемов факторов производства $Q_s(t)$ за счет внешних инвестиций в предприятие, $\Delta Q_s^W(t)$ — случайные колебания приращения объемов факторов производства, обусловленные волатильностью реализации выпускаемой продукции.

Приращения частичных амортизаций $\Delta Q_s^A(t)$ за промежуток времени Δt можно представить в виде

$$\Delta Q_s^A(t) = -A_s \theta(t) Q_s^{u_s}(t) \cdot \Delta t. \quad (3)$$

Здесь A_s — коэффициенты амортизации доли выбывших за единицу времени объемов факторов производства $Q_s(t)$, u_s — показатели интенсивности амортизации. Значения параметров $u_s = 1$ соответствуют линейной пропорциональной амортизации, значения параметров $u_s > 1$ соответствуют прогрессивным амортизационным отчислениям, значения параметров $u_s < 1$ соответствуют дигрессивным амортизационным отчислениям.

Функция $\theta = \theta(t)$ в соотношениях (3) определяет варианты развития рассматриваемого предприятия во время смены технологий производства. Для постоянной и единичной функции $\theta(t) \equiv 1$ развитие предприятия будет стабильным. При уменьшении значений функции $\theta(t)$ процесс развития предприятия будет замедляться вплоть до его временной остановки и частичного сворачивания производства [26].

Приращения внутренних инвестиций $\Delta Q_s^I(t)$ за промежуток времени Δt определяются соотношениями [31]

$$\Delta Q_s^I(t) = \theta(t) W_s(t) \cdot \Delta t. \quad (4)$$

Здесь

$$W_s(t) = \int_{-\infty}^t R_s(t, \tau) I_s(\tau) d\tau \quad (5)$$

— объемы внутренних инвестиций, накопленные предприятием за счет факторов производства Q_s к моменту времени t , $R_s(t, \tau)$ — функции распределения потока постепенного и непрерывного ввода инвестиций, соответствующих факторам производства Q_s за весь период работы предприятия, $I_s(\tau)$ — объемы инвестиций, соответствующие фактору производства Q_s и сделанные в момент времени τ . Постепенный и поэтапный ввод внутренних инвестиций считается стационарным: $R_s(t, \tau) = R_s(t - \tau)$, поэтому формулы (5) принимают вид

$$W_s(t) = \int_{-\infty}^t R_s(t - \tau) I_s(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} I_s(t - \tau) R_s(\tau) d\tau. \quad (6)$$

Функции распределения ввода инвестиций $R_s(t - \tau)$ удовлетворяют условиям нормировки

$$\int_0^\infty R_s(\tau) d\tau = 1. \quad (7)$$

Равенство (7) означает, что несмотря на перераспределение во времени потоков капиталовложений запаздывающих внутренних инвестиций суммы вложенных инвестиций за весь период остаются постоянными.

Очевидно, что функции распределения ввода инвестиций $R_s(\tau)$ являются монотонно убывающими, поскольку эффект от вводимых внутренних инвестиций будет тем меньше, чем ранее они были вложены.

Для экспоненциальных распределений ввода внутренних инвестиций $R_s(\tau) = \lambda_s \exp(-\lambda_s \tau)$ соотношения (6) принимают вид

$$W_s(t) = \lambda_s \int_0^\infty I_s(t - \tau) \exp(-\lambda_s \tau) d\tau. \quad (8)$$

Здесь λ_s — параметры распределения, описывающие степени влияния ранее сделанных внутренних инвестиций на капиталовложения текущего момента. Следует отметить, что чем больше значения величин λ_s , тем меньше это влияние, и наоборот.

Интегральные уравнения (8) могут быть представлены в виде системы дифференциальных уравнений. Для этого обе их части следует продифференцировать по времени t , воспользоваться формулой интегрирования по частям и учесть очевидные равенства:

$$\frac{\partial I_s(t - \tau)}{\partial t} = -\frac{\partial I_s(t - \tau)}{\partial \tau}, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} R_s(\tau) = 0.$$

Уравнения (8) принимают вид

$$\frac{dW_s(t)}{dt} = \lambda_s I_s(t) - \lambda_s W_s(t),$$

или

$$\frac{dW_s(t)}{dt} = \lambda_s (B_s V(t) - W_s(t)). \quad (9)$$

Здесь B_s — нормы накоплений внутренних инвестиций ($0 \leq B_s \leq 1$), с помощью которых внутренние инвестиции $I_s(t)$ связаны с производственной функцией $V(t)$ соотношениями $I_s(t) = B_s V(t)$.

Приращения внешних инвестиций $\Delta Q_s^G(t)$ за промежуток времени определяются соотношениями [31]

$$\Delta Q_s^G(t) = \theta(t) U_s(t) \cdot \Delta t. \quad (10)$$

Здесь

$$U_s(t) = \int_{-\infty}^t S_s(t, \tau) G_s(\tau) d\tau. \quad (11)$$

— объемы внешних инвестиций, накопленные предприятием в моменту времени t ; $S_s(t, \tau)$ — функции распределения постепенного и непрерывного ввода

внешних инвестиций за весь период работы предприятия; $G_s(\tau) = \eta_s G(\tau)$ — объемы внешних инвестиций, совершенные в момент времени τ ; $G(t)$ — полный объем внешних инвестиций, приходящихся на все объемы $Q_s(t)$ факторов производства; η_s — коэффициенты распределения объема внешних инвестиций между объемами факторов производства.

Очевидно, что коэффициенты η_s не являются независимыми, а удовлетворяют соотношению $\sum_{s=1}^n \eta_s = 1$.

Процессы ввода внешних инвестиций считаются стационарными, поэтому формулы (11) принимают вид

$$U_s(t) = \int_{-\infty}^t S_s(t - \tau) G_s(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} G_s(t - \tau) S_s(\tau) d\tau. \quad (12)$$

Запаздывание потоков капиталовложений внешних инвестиций сопровождается перераспределением во времени, но суммы внешних инвестиций за весь период остаются постоянными. Поэтому функции распределения ввода инвестиций $S_s(\tau)$ удовлетворяют условиям нормировки

$$\int_0^{\infty} S_s(\tau) d\tau = 1. \quad (13)$$

Соотношение (13) означает, что при перераспределении во времени потоков капиталовложений запаздывающих внешних инвестиций суммы вложенных инвестиций за весь период остаются постоянными.

Очевидно, что функции распределения ввода внешних инвестиций $S_s(\tau)$ являются монотонно убывающими, поскольку эффект от вводимых внешних инвестиций будет тем меньше, чем ранее они были вложены.

Для экспоненциальных распределений вводов внешних инвестиций $S_s(\tau) = \mu_s \exp(-\mu_s \tau)$ соотношения (12) принимают вид

$$U_s(t) = \mu_s \int_0^{\infty} G_s(t - \tau) \exp(-\mu_s \tau) d\tau. \quad (14)$$

Здесь μ_s — параметры распределения, описывающие степени влияния ранее сделанных внешних инвестиций на капиталовложения текущего момента. Очевидно, что чем больше значения величин μ_s , тем меньше это влияние, и наоборот.

Интегральные уравнения (14) могут быть представлены в виде системы дифференциальных уравнений. Для этого обе их части следует продифференцировать по времени t , воспользоваться формулой интегрирования по частям и учесть очевидные равенства:

$$\frac{\partial G_s(t - \tau)}{\partial t} = -\frac{\partial G_s(t - \tau)}{\partial \tau}, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} S_s(\tau) = 0.$$

Уравнения (14) принимают вид

$$\frac{dU_s(t)}{dt} = \mu_s (G_s(t) - U_s(t)). \quad (15)$$

Случайные колебания приращений объемов факторов производства $\Delta Q_s^W(t)$, обусловленные определенной волатильностью объема выпускаемой продукции, представлены в виде стохастических стандартных винеровских процессов [32]:

$$\Delta Q_s^W(t) = \theta(t) \rho_s (Q_s(t) - Q_s^0) \left(1 - \frac{Q_s(t)}{Q_s^\infty} \right) \cdot \Delta w. \quad (16)$$

Здесь w — стандартный винеровский процесс, $\Delta w = \varepsilon(t) \cdot \sqrt{\Delta t}$; ρ_s — уровни волатильности факторов производства $Q_s(t)$; $\varepsilon(t)$ — случайная величина с нормальным законом распределения, нулевым средним значением $\langle \varepsilon \rangle = 0$ и единичной дисперсией $\langle \varepsilon^2 \rangle = 1$.

Из формул (16) следует, что в окрестностях точек Q_s^0 , соответствующих началу процесса развития предприятия, и в окрестностях точек Q_s^∞ , соответствующих завершению процесса развития предприятия, стохастический процесс становится практически детерминированным.

Подставляя формулы (3), (4), (10) и (16) в уравнение баланса (2), получаем

$$\begin{aligned} \Delta Q_s(t) = \theta(t) \left((-A_s Q_s^{u_s}(t) + W_s(t) + U_s(t)) \cdot \Delta t + \right. \\ \left. + \rho_s (Q_s(t) - Q_s^0) \left(1 - \frac{Q_s(t)}{Q_s^\infty} \right) \cdot \Delta w \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Переходя в соотношениях (17) к пределу при условии $\Delta t \rightarrow 0$ и $\Delta w \rightarrow 0$, находим систему нелинейных стохастических дифференциальных уравнений

$$dQ_s(t) = \theta(t) (S_s(Q_s(t), t) dt + Z_s(Q_s(t), t) dw). \quad (18)$$

Здесь

$$S_s(Q_s(t), t) = -A_s Q_s^{u_s}(t) + W_s(t) + U_s(t) \quad (19)$$

— коэффициенты сноса уравнений (18),

$$Z_s(Q_s(t), t) = \rho_s (Q_s(t) - Q_s^0) \left(1 - \frac{Q_s(t)}{Q_s^\infty} \right) \quad (20)$$

— коэффициенты волатильности уравнений (18).

Уравнения (9), (15) и (18) с коэффициентами (19) и (20) образуют систему нормальных нелинейных связанных стохастических дифференциальных уравнений первого порядка. Подстановка в них выражения для производственной функции (1) дает

$$\begin{aligned} dQ_s(t) &= \theta(t) (S_s(Q_s(t), t) dt + Z_s(Q_s(t), t) dw), \\ dW_s(t) &= \lambda_s \left(B_s P \prod_{p=1}^n Q_p^{a_p}(t) - W_s(t) \right) dt, \\ dU_s(t) &= \mu_s (G_s(t) - U_s(t)) dt. \end{aligned} \quad (21)$$

Начальные условия для системы (21) имеют вид

$$Q_s(0) = Q_s^0, \quad W_s(0) = W_s^0, \quad U_s(0) = U_s^0. \quad (22)$$

В общем случае нелинейная задача Коши (21), (22) может быть решена только численно.

Если вместо функций распределения постепенного и непрерывного ввода внутренних и внешних инвестиций $R_s(\tau)$ и $S_s(\tau)$ выбрать дельта-функцию Дирака $R_s(\tau) = S_s(\tau) = \delta(\tau)$, то система (21) принимает вид

$$dQ_s(t) = \theta(t)(S_s(Q_s(t), t) dt + Z_s(Q_s(t), t) dw). \quad (23)$$

Здесь

$$\begin{aligned} S_s(Q_s(t), t) &= -A_s Q_s^{u_s}(t) + B_s P \prod_{p=1}^n Q_p^{a_p}(t) + \eta_s G(t), \\ Z_s(Q_s(t), t) &= \rho_s(Q_s(t) - Q_s^0) \left(1 - \frac{Q_s(t)}{Q_s^\infty}\right) \end{aligned} \quad (24)$$

— коэффициенты сноса и коэффициенты волатильности уравнений (23).

Начальные условия для системы уравнений (23) с коэффициентами (24) имеют вид

$$Q_s(0) = Q_s^0. \quad (25)$$

Структура системы уравнений (21) показывает, что развитие предприятия будет продолжаться до тех пор, пока сумма объемов внутренних и внешних инвестиций будет превосходить объемы амортизационных отчислений. Если сумма объемов внутренних и внешних инвестиций станет равной объемам амортизационных отчислений, развитие предприятия остановится. Предельные значения Q_s^∞ объемов производственных факторов $Q_s(t)$ находятся из условий

$$\begin{aligned} \frac{dQ_s(t)}{dt} &= \theta(t)(-A_s Q_s^{u_s}(t) + W_s(t) + U_s(t)) = 0, \\ \frac{dW_s(t)}{dt} &= \lambda_s \left(B_s P \prod_{p=1}^n Q_p^{a_p}(t) - W_s(t) \right) = 0, \\ \frac{dU_s(t)}{dt} &= \mu_s (G_s(t) - U_s(t)) = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Исключая из уравнений (26) величины $W_s(t)$, $U_s(t)$ и учитывая, что предельному состоянию работы предприятия соответствует условие $t \rightarrow \infty$, получаем систему уравнений для вычисления предельных значений объемов производственных факторов Q_s^∞ :

$$-A_s \cdot (Q_s^\infty)^{u_s} + B_s P \prod_{p=1}^n (Q_p^\infty)^{a_p} + G_s^\infty = 0. \quad (27)$$

Здесь $G_s^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} G_s(t)$.

Вид функции $\theta(t)$ существенно влияет на формы интегральных кривых уравнений (21) и (23). Функция $\theta(t)$ определяет центр временного интервала, его протяженность и максимальную величину отклонения от единичного значения, при котором предприятие работает стабильно.

Если в интервале времени $(t^* - \sigma, t^* + \sigma)$ предприятие производит полную или частичную замену технологического оборудования, то функцию $\theta(t)$ можно записать в виде [28]

$$\theta(t) = 1 - \omega \exp\left(-\frac{(t^* - t)^2}{2\sigma^2}\right). \quad (28)$$

Здесь ω — максимальный размер отклонения функции $\theta(t)$ от единицы, t^* — центр временного интервала, σ — радиус временного интервала.

Для стабильно работающего предприятия параметр ω принимает нулевое значение. Если $0 < \omega < 1$, то в интервале времени $(t^* - \sigma, t^* + \sigma)$ будет наблюдаться некоторое замедление работы предприятия. Если $\omega = 1$, то в интервале времени $(t^* - \sigma, t^* + \sigma)$ будет наблюдаться переоснащение производства. Если $\omega > 1$, то в интервале времени $(t^* - \sigma, t^* + \sigma)$ будет наблюдаться переоснащение производства, сопровождаемое его некоторым сворачиванием.

Если эффекты стагнации и падения выпуска продукции на предприятии происходят неоднократно, то в качестве функции относительной удельной скорости развития рассматриваемого предприятия целесообразно выбрать произведение функций вида (28):

$$\theta(t) = \prod_{s=1}^n \left(1 - \omega_s \exp\left(-\frac{(t_s^* - t)^2}{2\sigma_s^2}\right)\right). \quad (29)$$

2. Стохастическая модель развития однофакторного производственного предприятия, учитывающая эффект запаздывания внутренних и внешних инвестиций. Рассмотрим производственное предприятие, выпуск продукции которого обеспечивается только одним ресурсом в виде производственного фактора $Q = Q(t)$. Непрерывная и непрерывно дифференцируемая функция $Q = Q(t)$ ограничена на числовой полуоси ($0 < t < \infty$), $Q_0 \leq Q \leq Q_\infty$, своими предельными значениями $Q_0 = Q(0)$, $Q_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} Q(t)$. В таком случае общая система уравнений (21) и начальные условия (22) принимают вид

$$\begin{aligned} dQ(t) &= \theta(t)(S(Q(t), t) dt + Z(Q(t), t) dw), \\ dW(t) &= \lambda(BPQ^a(t) - W(t)) dt, \\ dU(t) &= \mu(G(t) - U(t)) dt. \end{aligned} \quad (30)$$

Здесь

$$S(Q(t), t) = -AQ^u(t) + W(t) + U(t) \quad (31)$$

— коэффициент сноса уравнений (30),

$$Z(Q(t), t) = \rho(Q(t) - Q_0) \left(1 - \frac{Q(t)}{Q_\infty}\right) \quad (32)$$

— коэффициент волатильности уравнений (30).

Начальные условия для системы уравнений (30)–(32) имеют вид

$$Q(0) = Q_0, \quad W(0) = W_0, \quad U(0) = U_0. \quad (33)$$

Уравнения (27) для вычисления предельного значения Q_∞ объема производственного фактора $Q(t)$ сводятся к уравнению

$$-AQ_\infty^u + BPQ_\infty^a + G_\infty = 0. \quad (34)$$

Здесь $G_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} G(t)$.

Уравнение (34) имеет аналитическое решение

$$Q_\infty = \left(\frac{BP}{A} \right)^{1/(u-a)} \quad (35)$$

только в случае $G_\infty = 0$. Если $G_\infty \neq 0$, то уравнение (34) можно решить только численно.

Общая система уравнений (23)–(25), которая не учитывает эффект запаздывания внутренних и внешних инвестиций, принимает вид

$$dQ(t) = \theta(t)(S(Q(t), t) dt + Z(Q(t), t) dw). \quad (36)$$

Здесь

$$\begin{aligned} S(Q(t), t) &= -AQ^u(t) + BPQ^a(t) + G(t), \\ Z(Q(t), t) &= \rho(Q(t) - Q_0) \left(1 - \frac{Q(t)}{Q_\infty} \right) \end{aligned} \quad (37)$$

— коэффициенты сноса и коэффициенты волатильности уравнения (36).

Начальное условие для уравнения (36) с коэффициентами (37) имеет вид

$$Q(0) = Q_0. \quad (38)$$

Численные решения системы уравнений (30) с коэффициентами (31), (32) и начальными условиями (33) выполняются методом последовательных приближений Эйлера–Маруямы в соответствии с алгоритмом [31, 53]

$$\left\{ \begin{aligned} Q_{i+1} &= Q_i + \theta(t_i)(S(Q_i, t_i) \cdot \Delta t_i + Z(Q_i, t_i)\varepsilon(t_i) \cdot \sqrt{\Delta t_i}), \\ W_{i+1} &= W_i + \lambda(BPQ_i^a - W_i) \cdot \Delta t_i, \\ U_{i+1} &= U_i + \mu(G(t_i) - U_i) \cdot \Delta t_i, \\ S(Q_i, t_i) &= -AQ_i^u + W_i + U_i, \\ Z(Q_i, t_i) &= \rho(Q_i - Q_0) \left(1 - \frac{Q_i}{Q_\infty} \right). \end{aligned} \right. \quad (39)$$

Численное решение уравнения (36) с коэффициентами (37) и начальным условием (38) выполняются методом последовательных приближений Эйлера–Маруямы в соответствии с алгоритмом [31, 53]

$$\left\{ \begin{aligned} Q_{i+1} &= Q_i + \theta(t_i)(S(Q_i, t_i) \cdot \Delta t_i + Z(Q_i, t_i)\varepsilon(t_i) \cdot \sqrt{\Delta t_i}), \\ S(Q_i, t_i) &= -AQ_i^u + BPQ_i^a + G(t_i), \\ Z(Q_i, t_i) &= \rho(Q_i - Q_0) \left(1 - \frac{Q_i}{Q_\infty} \right). \end{aligned} \right. \quad (40)$$

Для любых вариантов реализации алгоритмов (39) и (40) на каждом малом временном шаге Δt_i начиная с начальных значений величин Q_0 , W_0 и U_0 генерируется случайное число $\varepsilon(t_i)$ и рассчитываются последующие значения величин Q_{i+1} , W_{i+1} и U_{i+1} .

В результате образуются четыре случайные числовые последовательности $\{t_i\}$, $\{Q_i\}$, $\{W_i\}$ и $\{U_i\}$. Эти последовательности на координатной плоскости образуют три системы случайных точек $\{t_i, Q_i\}$, $\{t_i, W_i\}$ и $\{t_i, U_i\}$, которые порождают три ломаные случайные траектории.

Очевидно, что всякий раз при повторении реализаций алгоритмов (39) и (40) образуются новые ломаные случайные траектории, поскольку каждый раз случайная величина генерирует новые случайные значения.

Для численных реализаций алгоритмов (39) и (40) временной интервал $t \in [0, 120]$ разбивался на $n = 100$ одинаковых частей с шагом $\Delta t_i = \Delta t = 1.2$. Количество реализаций случайного процесса динамики предприятия принималось $m = 200$.

Следует отметить, что в достаточно малых окрестностях начальных точек $\{t = 0, Q = Q_0\}$, $\{t = 0, W = W_0\}$ и $\{t = 0, U = U_0\}$ и в достаточно малых окрестностях предельных точек $\{t = 120, Q = Q_\infty\}$, $\{t = 120, W = W_\infty\}$ и $\{t = 120, U = U_\infty\}$ стохастические процессы становятся практически детерминированными, что является вполне ожидаемым и определяется видом функции коэффициента волатильности.

Для вычисления математического ожидания величины $Q(t)$ следует статистически усреднить систему стохастических уравнений (30):

$$\begin{cases} d\langle Q(t) \rangle = \theta(t) \langle -AQ^u(t) + W(t) + U(t) \rangle dt, \\ d\langle W(t) \rangle = \lambda \langle BPQ^a(t) - W(t) \rangle dt, \\ d\langle U(t) \rangle = \mu \langle G(t) - U(t) \rangle dt \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} d\langle Q \rangle = \theta(-A\langle Q^u \rangle + \langle W \rangle + \langle U \rangle) dt, \\ d\langle W \rangle = \lambda(BP\langle Q^a \rangle - \langle W \rangle) dt, \\ d\langle U \rangle = \mu(G - \langle U \rangle) dt. \end{cases} \quad (41)$$

Система уравнений (41) показывает, что при последовательном вычислении статистических моментов вида $\langle Q^h \rangle$ возникает бесконечная система статистических уравнений, генерирующая статистические моменты все более высоких порядков. Для остановки этого процесса генерации необходимо сделать определенные допущения. Будем предполагать, что флуктуации величины $Q(t)$ относительно ее среднего значения $\langle Q(t) \rangle$ пропорциональны случайной величине $\varepsilon(t)$ [32]:

$$Q - \langle Q \rangle = \xi \cdot \varepsilon.$$

Здесь $\xi = \rho(\langle Q \rangle - Q_0)(1 - \frac{\langle Q \rangle}{Q_\infty})$ — коэффициент пропорциональности.

Тогда выражение для величины Q^h принимает вид

$$Q^h = (\langle Q \rangle + \xi \cdot \varepsilon)^h = \langle Q \rangle^h \left(1 + \frac{\xi}{\langle Q \rangle} \cdot \varepsilon\right)^h. \quad (42)$$

Ограничиваясь в формуле (42) малыми флуктуациями $|\frac{\xi}{\langle Q \rangle} \cdot \varepsilon| < 1$, рассмотрим три слагаемых сходящегося биномиального ряда:

$$Q^h = \langle Q \rangle^h \left(1 + h \frac{\xi}{\langle Q \rangle} \cdot \varepsilon + \frac{h(h-1)}{2} \frac{\xi^2}{\langle Q \rangle^2} \cdot \varepsilon^2 + \dots \right). \quad (43)$$

Вычисляя по формуле (43) средние величины

$$\langle Q^u \rangle \approx \langle Q \rangle^u \left(1 + \frac{u(u-1)}{2} \frac{\xi^2}{\langle Q \rangle^2} \right), \quad \langle Q^a \rangle \approx \langle Q \rangle^a \left(1 + \frac{a(a-1)}{2} \frac{\xi^2}{\langle Q \rangle^2} \right)$$

и подставляя их в уравнения (41), находим систему дифференциальных уравнений для математических ожиданий величин $\langle Q(t) \rangle$, $\langle W(t) \rangle$ и $\langle U(t) \rangle$:

$$\begin{cases} \frac{d\langle Q \rangle}{dt} = \theta \left(-A \langle Q \rangle^u \left(1 + \frac{u(u-1)}{2} \frac{\xi^2}{\langle Q \rangle^2} \right) + \langle W \rangle + \langle U \rangle \right), \\ \frac{d\langle W \rangle}{dt} = \lambda \left(BP \langle Q \rangle^a \left(1 + \frac{a(a-1)}{2} \frac{\xi^2}{\langle Q \rangle^2} \right) - \langle W \rangle \right), \\ \frac{d\langle U \rangle}{dt} = \mu (\langle G \rangle - \langle U \rangle). \end{cases} \quad (44)$$

Начальные условия для системы уравнений (44) имеют вид

$$\langle Q(0) \rangle = Q_0, \quad \langle W(0) \rangle = W_0, \quad \langle U(0) \rangle = U_0. \quad (45)$$

Если не учитывать эффект запаздывания внутренних и внешних инвестиций, то система (44) сводится к одному уравнению [32]:

$$\begin{aligned} \frac{d\langle Q \rangle}{dt} = \theta \left(-A \langle Q \rangle^u \left(1 + \frac{u \cdot (u-1)}{2} \frac{\xi^2}{\langle Q \rangle^2} \right) + \right. \\ \left. + BP \langle Q \rangle^a \left(1 + \frac{a(a-1)}{2} \frac{\xi^2}{\langle Q \rangle^2} \right) + G \right). \end{aligned} \quad (46)$$

Начальное условие для уравнения (46) принимает вид

$$\langle Q(0) \rangle = Q_0. \quad (47)$$

Сравнение результатов численного решения задачи Коши (44), (45) и (46), (47) с численными значениями статистических средних, вычисленных по всем двумстам реализациям алгоритмов (39), (40) показывает их почти полное совпадение.

На рис. 1 представлено сравнение стохастических траекторий, построенных по алгоритмам (39), (40), и кривых математических ожиданий, рассчитанных по формулам (44), (45) и (46), (47), для случая стабильной работы рассматриваемого предприятия, при котором параметр ω функции $\theta(t)$ обращается в нуль ($\omega = 0$).

На рис. 2 представлено сравнение стохастических траекторий, построенных по алгоритмам (39), (40), и кривых математических ожиданий, рассчитанных по формулам (44), (45) и (46), (47), для случая переоснащения процесса производства на временном интервале $(t^* - \sigma, t^* + \sigma)$ при $t^* = 40$ и

Рис. 1. Сравнение стохастических траекторий, построенных по алгоритмам (39), (40), и кривых математических ожиданий, рассчитанных по формулам (44), (45) (сплошная линия) и (46), (47) (штриховая линия), для случая стабильной работы рассматриваемого предприятия, при котором параметр ω функции $\theta(t)$ обращается в нуль. Расчетные значения: $n = 100$, $\Delta t = 1.2$, $m = 200$, $Q_0 = 10$, $P = 15$, $a = 0.45$, $u = 1$, $A = 0.12$, $B = 0.12$, $\rho = 0.1$, $\omega = 0$, $\lambda = 0.25$

[Figure 1. The stochastic trajectories constructed by the algorithms (39), (40) and the expectation curves calculated by the formulae (45), (45) (solid line) and (46), (47) (dashed line) for the case of stable operation of the considered enterprise in which the parameter ω of the function $\theta(t)$ vanishes. Calculation values: $n = 100$, $\Delta t = 1.2$, $m = 200$, $Q_0 = 10$, $P = 15$, $a = 0.45$, $u = 1$, $A = 0.12$, $B = 0.12$, $\rho = 0.1$, $\omega = 0$, $\lambda = 0.25$]

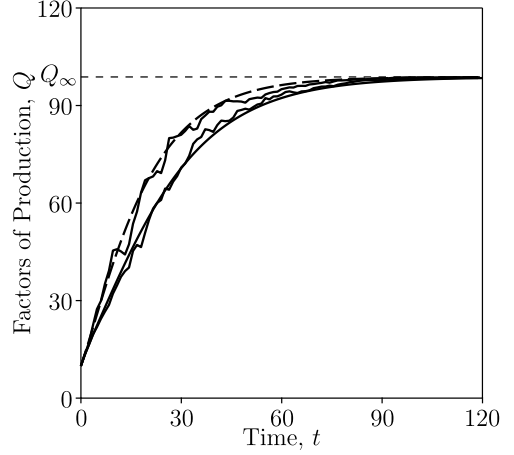
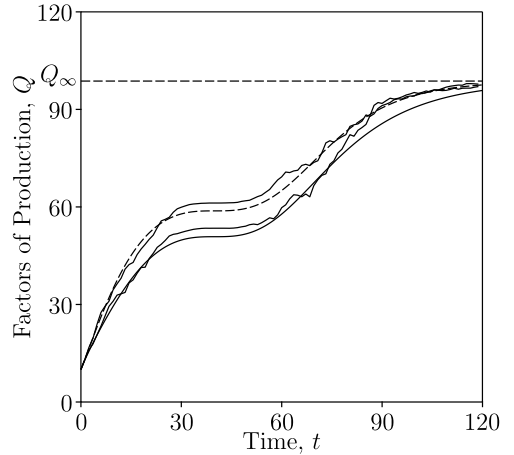


Рис. 2. Сравнение стохастических траекторий, построенных по алгоритмам (39), (40), и кривых математических ожиданий, рассчитанных по формулам (44), (45) (сплошная линия) и (46), (47) (штриховая линия), для случая переоснащения процесса производства на временном интервале $(t^* - \sigma, t^* + \sigma)$. Расчетные значения: $n = 100$, $\Delta t = 1.2$, $m = 200$, $Q_0 = 10$, $P = 15$, $a = 0.45$, $u = 1$, $A = 0.12$, $B = 0.12$, $\rho = 0.1$, $\omega = 1$, $t^* = 40$, $\sigma = 20$, $\lambda = 0.25$

[Figure 2. The stochastic trajectories constructed by the algorithms (39), (40) and the expectation curves calculated by the formulae (44), (45) (solid line) and (46), (47) (dashed line) for the case of retooling the production process on the time interval $(t^* - \sigma, t^* + \sigma)$. Calculation values: $n = 100$, $\Delta t = 1.2$; $m = 200$, $Q_0 = 10$, $P = 15$, $a = 0.45$, $u = 1$, $A = 0.12$, $B = 0.12$, $\rho = 0.1$, $\omega = 1$, $t^* = 40$, $\sigma = 20$, $\lambda = 0.25$]



$\sigma = 20$. Размер максимального отклонения ω функции $\theta(t)$ в этом случае принимается равным единице ($\omega = 1$).

На рис. 3 представлено сравнение стохастических траекторий, построенных по алгоритмам (39), (40), и кривых математических ожиданий, рассчитанных по формулам (44), (45) и (46), (47), для случая переоснащения процесса производства в условиях кризиса на временном интервале $(t^* - \sigma, t^* + \sigma)$ при $t^* = 40$ и $\sigma = 20$. Размер максимального отклонения ω функции $\theta(t)$ в этом случае принимается равным 1.25.

При построении графиков функций на рис. 1–3 не учитывались внешние инвестиции ($G(t) \equiv 0$). Предельное значение ресурса $Q(t)$, вычисленное по формуле (35), составляет $Q_\infty = 98.7174$.

В случае если волатильность ρ обращается в нуль ($\rho = 0$) и процесс ста-

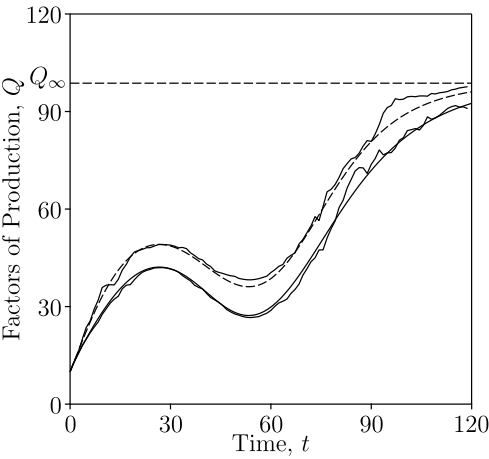


Рис. 3. Сравнение стохастических траекторий, построенных по алгоритмам (39), (40), и кривых математических ожиданий, рассчитанных по формулам (44), (45) (сплошная линия) и (46), (47) (штриховая линия), для случая переоснащения процесса производства в условиях кризиса на временном интервале $(t^* - \sigma, t^* + \sigma)$. Расчетные значения: $n = 100$, $\Delta t = 1.2$, $m = 200$, $Q_0 = 10$, $P = 15$, $a = 0.45$, $u = 1$, $A = 0.12$, $B = 0.12$, $\rho = 0.1$, $\omega = 1.25$, $t^* = 40$, $\sigma = 20$, $\lambda = 0.25$

[Figure 3. The stochastic trajectories constructed by the algorithms (39), (40) and the expectation curves calculated by the formulae (45), (46) (solid line) and (47), (48) (dashed line) for the case of re-equipment of the production process in a crisis on a time interval $(t^* - \sigma, t^* + \sigma)$. Calculation values: $n = 100$, $\Delta t = 1.2$, $m = 200$, $Q_0 = 10$, $P = 15$, $a = 0.45$, $u = 1$, $A = 0.12$, $B = 0.12$, $\rho = 0.1$, $\omega = 1.25$, $t^* = 40$, $\sigma = 20$, $\lambda = 0.25$]

новится детерминированным, полученные результаты совпадают с результатами работы [31].

Сравним теперь построенные расчетные модели (39), (40); (44), (45) и (46), (47) со статистическими данными для показателей развития предприятия ЗАО «Самарский булочно-кондитерский комбинат» [55]. Статистические данные по выпуску продукции этим предприятием приведены в табл. 1. Здесь переменная времени t изменяется на отрезке $[0, 9]$, а ее целые значения соответствуют годам от 2011 до 2020.

В соответствии с данными табл. 1 производственная функция (1) для рассматриваемого предприятия принимает вид

$$V = 51.1429 \cdot Q^{0.53}. \tag{48}$$

На рис. 4 приведен график функции выпуска предприятия, построенный по формуле (48).

Таблица 1

Статистические данные по выпуску продукции ЗАО «Самарский булочно-кондитерский комбинат» [55] [Factors of Production and Total Production for CJSC Samara Bakery and Confectionery Plant [55]]

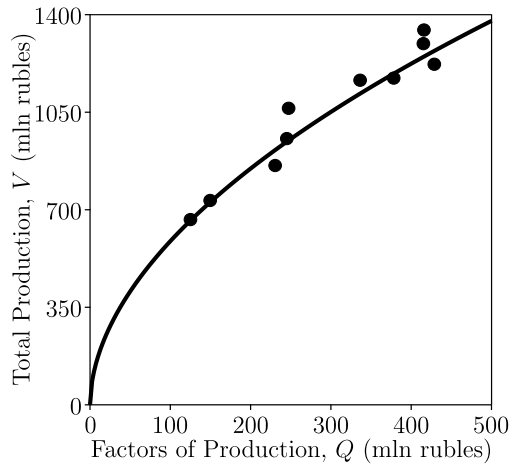
Years	Time, t	Factors of Production, Q (mln rubles)	Total Production, V (mln rubles)
2011	0	125.708	662.900
2012	1	150.235	731.496
2013	2	231.137	856.875
2014	3	245.655	953.532
2015	4	247.904	1 062.253
2016	5	336.925	1 162.925
2017	6	378.737	1 170.557
2018	7	429.265	1 220.274
2019	8	415.676	1 294.213
2020	9	416.390	1 343.184

Характер данных табл. 1 показывает, что развитие предприятия ЗАО «Самарский булочно-кондитерский комбинат» происходит в основном за счет внутренних инвестиций, поэтому при построении графиков функций на рис. 5 внешние инвестиции не учитывались ($G(t) \equiv 0$). Кроме того, из анализа этих данных следует, что в 2014 году ($t_1^* = 3$) и в 2019 году ($t_2^* = 8$) наблюдалось определенное замедление развития предприятия, поэтому в расчетах использовалась функция относительной удельной скорости $\theta(t)$ вида (29).

На рис. 5 представлено сравнение стохастических траекторий, построенных по алгоритмам (39), (40), и кривых математических ожиданий, рассчитанных по формулам (44), (45) и (46), (47), со статистическими данными работы предприятия ЗАО «Самарский булочно-кондитерский комбинат».

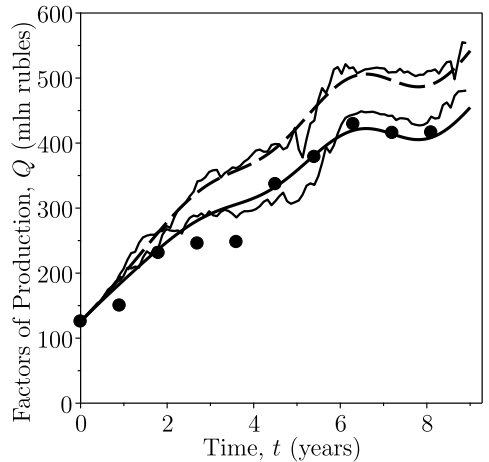
Применим теперь построенную модель для расчета показателей развития предприятия ООО Маслозавод «Пестравский» [56]. Статистические данные

Рис. 4. График функции выпуска (48) и статистические данные для ЗАО «Самарский булочно-кондитерский комбинат». Расчетные значения: $P = 51.1429$, $a = 0.53$; точки соответствуют данным табл. 1



[Figure 4. The production function (48) and statistical data for CJSC Samara Bakery and Confectionery Plant. Calculation values: $P = 51.1429$, $a = 0.53$; the points correspond to the data in Table 1]

Рис. 5. Сравнение стохастических траекторий, построенных по алгоритмам (39), (40), и кривых математических ожиданий, рассчитанных по формулам (44), (45) (сплошная линия) и (46), (47) (штриховая линия) со статистическими данными работы предприятия ЗАО «Самарский булочно-кондитерский комбинат». Расчетные значения: $n = 200$, $\Delta t = 0.09$, $m = 200$, $Q_0 = 125.708$, $P = 51.1429$, $a = 0.53$, $A = 0.15$, $u = 1$, $B = 0.12$, $\rho = 0.25$, $\omega_1 = 0.7$, $t_1^* = 3$, $\sigma_1 = 1$, $\omega_2 = 1.25$, $t_2^* = 8$; точки соответствуют данным табл. 1



[Figure 5. The stochastic trajectories constructed by the algorithms (39), (40) and the expectation curves calculated by the formulae (44), (45) (solid line) and (46), (47) (dashed line) and statistical data for CJSC Samara Bakery and Confectionery Plant. Calculation values: $n = 200$, $\Delta t = 0.09$, $m = 200$, $Q_0 = 125.708$, $P = 51.1429$, $a = 0.53$, $A = 0.15$, $u = 1$, $B = 0.12$, $\rho = 0.25$, $\omega_1 = 0.7$, $t_1^* = 3$, $\sigma_1 = 1$, $\omega_2 = 1.25$, $t_2^* = 8$; the points correspond to the data in Table 1]

Таблица 2

Статистические данные по выпуску продукции ООО Маслозавод «Пестравский» [56] [Factors of Production and Total Production for LLC Pestravsky Oil Plant [56]]

Years	Time, t	Factors of Production, Q (mln rubles)	Total Production, V (mln rubles)
2014	0	157.182	415.770
2015	1	213.220	825.524
2016	2	258.295	904.156
2017	3	362.699	827.725
2018	4	469.344	942.414
2019	5	560.128	1 001.580
2020	6	1 316.062	2 277.409

по выпуску продукции этим предприятием приведены в табл. 2. Здесь переменная времени t изменяется на отрезке $[0, 6]$, а ее целые значения соответствуют годам от 2014 до 2020.

Анализ данных табл. 2 показывает, что до 2019 года предприятие развивалось монотонно за счет внутренних инвестиций. Эта часть графика может быть хорошо аппроксимирована теоретической кривой

$$Q_T(t) = Q(0) + 49.7263 \cdot t^{1.3}. \quad (49)$$

Резкий рост ресурсов предприятия после 2019 года свидетельствует о том, что на его развитие существенно повлияли внешние инвестиции, которые можно описать формулой [32]

$$G_T(t) = G_{\max} \cdot \exp\left(-\frac{(t - t_G)^4}{2\sigma_G^2}\right). \quad (50)$$

На рис. 6 представлены график функции объема фактора производства Q_T , построенный по формуле (49), и график функции объема фактора производства Q_S , построенный по статистическим данным табл. 2. Кроме того, на этом же рисунке приведены график функции внешних инвестиций G_T ,

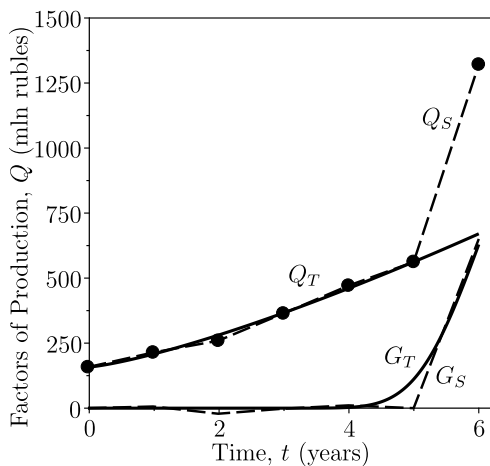
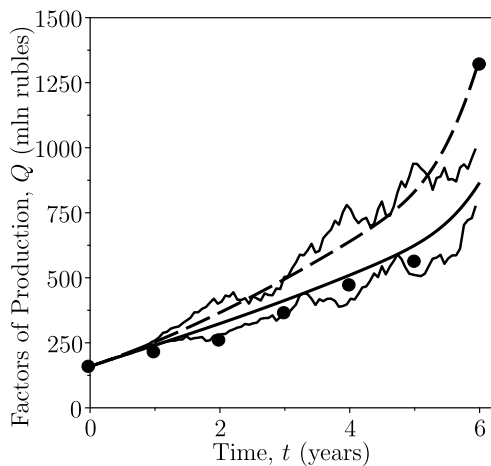


Рис. 6. Графики функций объемов факторов производства Q_T (сплошная линия) и Q_S (штриховая линия) и графики функций объемов внешних инвестиций G_T (сплошная линия) и G_S (штриховая линия), построенные по формулам (49) и (50) и статистическим данным табл. 2. Точками обозначены значения ресурса $Q(t)$ и соответствуют со статистическими данными табл. 2

[Figure 6. The graphs of functions of volumes of production factors Q_T (solid line) and Q_S (dashed line), and graphs of functions of volumes of external investments G_T (solid line) and G_S (dashed line) constructed according to the formulae (49) and (50); the points denote the values of the resource $Q(t)$ and correspond to the data in Table 2]

Рис. 7. Сравнение стохастических траекторий, построенных по алгоритмам (39), (40), и кривых математических ожиданий, рассчитанных по формулам (44), (45) (сплошная линия) и (46), (47) (штриховая линия) со статистическими данными работы предприятия ООО Маслозавод «Пестравский». Расчетные значения: $n = 200$, $\Delta t = 0.06$, $m = 200$, $Q_0 = 157.182$, $P = 37.3695$, $a = 0.55$, $A = 0.1$, $u = 1$, $B = 0.165$, $\rho = 0.25$, $\omega = 0$. Точками обозначены значения ресурса, в соответствии со статистическими данными табл. 2

[Figure 7. The stochastic trajectories constructed by the algorithms (39), (40) and the expectation curves calculated by the formulae (44), (45) (solid line) and (46), (47) (dashed line) and statistical data for LLC Pestravsky Oil Plant. Calculation values: $n = 200$, $\Delta t = 0.06$, $m = 200$, $Q_0 = 157.182$, $P = 37.3695$, $a = 0.55$, $A = 0.1$, $u = 1$, $B = 0.165$, $\rho = 0.25$, $\omega = 0$; the points denote the values of the resource and correspond to the data in Table 2]



построенный по формуле (50), и график функции внешних инвестиций G_S , построенный по статистическим данным.

На рис. 7 представлено сравнение стохастических траекторий, построенных по алгоритмам (39), (40), и кривых математических ожиданий, рассчитанных по формулам (44), (45) и (46), (47), со статистическими данными работы предприятия ООО Маслозавод «Пестравский».

Заключение. Разработаны новые стохастические модели динамического развития однофакторных производственных предприятий за счет внутренних и внешних инвестиций.

Построены стохастические дифференциальные уравнения баланса для таких предприятий, описывающие случайные процессы увеличения выпуска продукции и роста факторов производства.

Исследовано взаимодействие пропорциональных, прогрессивных и дигрессивных амортизационных отчислений с внутренними и внешними инвестициями.

Сформулированы условия равновесного состояния работы предприятия и получены уравнения для определения предельных значений факторов производства, при достижении которых дальнейший рост выпуска продукции предприятием прекращается.

Рассмотрены три варианта развития предприятий. В первом случае предприятие развивается стабильно и поступательно. Во втором случае предприятие временно приостанавливает рост выпуска продукции, переоснащая производство и заменяя технологическое оборудование. В третьем случае предприятие вынуждено временно сворачивать производство при смене технологического уклада.

Представлен алгоритм построения стохастических фрактальных линий для случайной функции фактора производства на основе численного решения

стохастических дифференциальных уравнений развития предприятий.

Разработан вариант метода статистического осреднения стохастических дифференциальных уравнений баланса предприятий, с помощью которого установлены дифференциальные уравнения для определения математических ожиданий случайных функций факторов производства.

Показано, что численные решения этих уравнений и статистическое среднее значение функции фактора производства, вычисленное по двумстам реализациям стохастических фрактальных линий, дают почти одинаковые результаты.

Численный анализ разработанных моделей показал хорошее соответствие известным статистическим данным работы производственного предприятия.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи; все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Harrod R. F. *The Trade Cycle*. Oxford: Clarendon Press, 1936. 248 pp.
2. Domar E. D. Capital expansion, rate of growth, and employment // *Econometrica*, 1946. vol. 14, no. 2. pp. 137–147. <https://doi.org/10.2307/1905364>.
3. Solow R. M. A contribution to the theory of economic growth // *Quart. J. Econ.*, 1956. vol. 70, no. 1. pp. 65–94. <https://doi.org/10.2307/1884513>.
4. Swan T. W. Economic growth and capital accumulation // *Economic Record*, 1956. vol. 32, no. 2. pp. 334–361. <https://doi.org/10.1111/j.1475-4932.1956.tb00434.x>.
5. Kuznets S. Long swings in the growth of population and in related economic variables // *Proc. Amer. Phil. Soc.*, 1958. vol. 102, no. 1. pp. 25–52 <http://www.jstor.org/stable/985303>.
6. Kuznets S. Quantitative aspects of the economic growth of nations. Paper VIII: Distribution of income by size // *Economic Development and Cultural Change*, 1963. vol. 11, no. 2. pp. 1–80. <https://doi.org/10.1086/450006>.
7. Uzawa H. Optimum technical change in an aggregative model of economic growth // *Int. Econ. Review*, 1965. vol. 6, no. 1. pp. 18–31. <https://doi.org/10.2307/2525621>.
8. Arrow K. J. The economic implications of learning by doing // *Review Econ. Stud.*, 1962. vol. 29, no. 3. pp. 155–173. <https://doi.org/10.2307/2295952>.
9. Denison E. F. The contribution of capital to economic growth // *American Econ. Review*, 1980. vol. 70, no. 2. pp. 220–224 <https://www.jstor.org/stable/1815471>.
10. Romer P. M. Increasing returns and long-run growth // *J. Polit. Econ.*, 1986. vol. 94, no. 5. pp. 1002–1037. <https://doi.org/10.1086/261420>.
11. Lucas R. E. On the mechanics of economic development // *J. Monetary Econ.*, 1988. vol. 22, no. 1. pp. 3–42. [https://doi.org/10.1016/0304-3932\(88\)90168-7](https://doi.org/10.1016/0304-3932(88)90168-7).
12. Romer P. M. Endogenous technological change // *J. Polit. Econ.*, 1990. vol. 98, no. 5. pp. 71–102 <https://www.jstor.org/stable/2937632>.
13. Grossman G. M., Helpman E. *Innovation and Growth in the Global Economy*. Cambridge, MA: MIT Press, 1991. 359 pp.
14. Mankiw N. G., Romer D., Weil D. N. A contribution to the empirics of economic growth // *Quart. J. Econ.*, 1992. vol. 107, no. 2. pp. 407–437. <https://doi.org/10.2307/2118477>.
15. Grossman G. M., Helpman E. Endogenous innovation in the theory of growth // *J. Econ. Perspect.*, 1994. vol. 8, no. 1. pp. 23–44 <https://www.jstor.org/stable/2138149>.

16. Barro R. J., Sala-i-Martin X. I. *Economic Growth*. Cambridge MA: MIT Press, 1995. 672 pp.
17. Bruno M., Easterly W. *Inflation crises and long-run growth*: NBER Working Papers 5209, 1995. <https://doi.org/10.3386/w5209>.
18. Gong G., Greiner A., Semmler W. The Uzawa–Lucas model without scale effects: Theory and empirical evidence // *Struct. Change Econ. Dyn.*, 2004. vol. 15, no. 4. pp. 401–420. <https://doi.org/10.1016/j.strueco.2003.10.002>.
19. Нижегородцев Р. М. Модели логистической динамики как инструмент экономического анализа и прогнозирования // *Моделирование экономической динамики: риск, оптимизация, прогнозирование*. М.: Диалог МГУ, 1997. С. 34–51.
20. Бадаш Х. З. Экономико-математическая модель экономического роста предприятия // *Вестн. Удмуртск. унив. Сер. Экономика и право*, 2009. № 1. С. 5–9.
21. Королев А. В., Матвеев В. Д. О структуре равновесных нестационарных траекторий в модели эндогенного роста Лукаса // *Автомат. и телемех.*, 2006. № 4. С. 126–136.
22. Кузнецов Ю. А., Мичасова О. В. Сравнительный анализ применения пакетов имитационного моделирования и систем компьютерной математики для анализа моделей теории экономического роста // *Эконом. анализ: теория и практика*, 2007. Т. 86, № 5. С. 23–30.
23. Кузнецов Ю. А., Мичасова О. В. Обобщенная модель экономического роста с учетом накопления человеческого капитала // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления*, 2012. № 4. С. 46–57.
24. Прасолов А. В. *Математические методы экономической динамики*. СПб.: Лань, 2015. 352 с.
25. Сараев А. Л. Уравнения нелинейной динамики кризисных явлений для многофакторных экономических систем // *Вестник Самарского государственного университета*, 2015. Т. 6, № 2. С. 262–272. <https://doi.org/10.18287/2542-0461-2015-0-2-262-272>.
26. Сараев А. Л., Сараев Л. А. Показатели нелинейной динамики и предельное состояние производственного предприятия // *Экономика и предпринимательство*, 2018. № 11. С. 1237–1241.
27. Сараев А. Л. Уравнения динамики нестабильных многофакторных экономических систем, учитывающих эффект запаздывания внутренних инвестиций // *Казанский экономический вестник*, 2015. Т. 17, № 3. С. 68–73.
28. Ильина Е. А., Сараев А. Л., Сараев Л. А. К теории модернизации производственных предприятий, учитывающей запаздывание внутренних инвестиций // *Экономика и предпринимательство*, 2017. № 9–4(86). С. 1130–1134.
29. Сараев А. Л., Сараев Л. А. Экономико-математическая модель развития производственных предприятий, учитывающая эффект запаздывания внутренних инвестиций // *Экономика и предпринимательство*, 2019. № 5(106). С. 1316–1320.
30. Сараев А. Л., Сараев Л. А. Многофакторная математическая модель развития производственного предприятия за счет внутренних и внешних инвестиций // *Вестник Самарского университета. Экономика и управление*, 2020. Т. 11, № 2. С. 157–165. <https://doi.org/10.18287/2542-0461-2020-11-2-157-165>.
31. Saraev A. L., Saraev L. A. Mathematical models of the development of industrial enterprises, with the effect of lagging internal and external investments // *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2021. vol. 1784, 012010. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1784/1/012010>.
32. Сараев А. Л., Сараев Л. А. Математические модели стохастической динамики развития предприятий // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 2. С. 343–364. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1700>.
33. Артемьев С. С., Якунин М. А. *Математическое и статистическое моделирование в финансах*. Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2008. 174 с.
34. Воронцовский А. В., Дикарев А. Ю. Прогнозирование макроэкономических показателей в режиме имитации на основе стохастических моделей экономического роста // *Финансы и бизнес*, 2013. № 2. С. 33–51.

35. Курзенев В. А., Лычагина Е. Б. Стохастическое моделирование динамики экономической системы // *Управленческое консультирование*, 2013. № 5. С. 78–83.
36. Андрианов Д. Л., Шульц Д. Н., Ощепков И. А. Динамические стохастические модели общего экономического равновесия // *Управление экономическими системами*, 2014. Т. 67, № 7.
37. Андрианов Д. Л., Шульц Д. Н., Ощепков И. А. Динамическая стохастическая модель общего экономического равновесия России // *Вестник Нижегородского университета. Сер. Социальные науки*, 2015. № 2(38). С. 18–25.
38. Андрианов Д. Л., Арбузов В. О., Ивлиев С. В., Максимов В. П., Симонов П. М. Динамические модели экономики: теория, приложения, программная реализация // *Вестник Пермского университета. Сер. Экономика*, 2015. № 4. С. 8–32.
39. Itô K., McKean H. P. Jr. *Diffusion Processes and their Sample Paths* / Classics in Mathematics. Berlin: Springer. xv+321 pp. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-62025-6>.
40. Allen E. *Modeling with Itô stochastic differential equations* / Mathematical Modelling: Theory and Applications. vol. 22. Netherlands: Springer, 2007. xii+230 pp. <https://doi.org/10.1007/978-1-4020-5953-7>.
41. Степанов С. С. *Стохастический мир*, 2009. <https://synset.com/pdf/ito.pdf>; дата обращения: 21.04.2021.
42. Neisy A., Peymany M. Financial modeling by ordinary and stochastic differential equations // *World Applied Sciences Journal*, 2011. vol. 13, no. 11. pp. 2288–2295.
43. Kallianpur G., Sundar P. *Stochastic analysis and diffusion processes* / Oxford Graduate Texts in Mathematics. vol. 24. Oxford: Oxford University Press, 2014. xiv+352 pp. <https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780199657063.001.0001>.
44. Bally V., Talay D. The law of the Euler scheme for stochastic differential equations: I. Convergence rate of the distribution function // *Probab. Th. Rel. Fields*, 1996. vol. 104, no. 1. pp. 43–60. <https://doi.org/10.1007/BF01303802>.
45. Bally V., Talay D. The law of the Euler scheme for stochastic differential equations: II. Convergence rate of the density // *Monte Carlo Methods and Applications*, 1996. vol. 2, no. 2. pp. 93–128. <https://doi.org/10.1515/mcma.1996.2.2.93>.
46. Debarant K., Rößler A. Classification of stochastic Runge–Kutta methods for the weak approximation of stochastic differential equations // *Mathematics and Computers in Simulation*, 2008. vol. 77, no. 4. pp. 408–420, arXiv: [1303.4510](https://arxiv.org/abs/1303.4510) [math.NA]. <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2007.04.016>.
47. Soheili A. R., Namjoo M. Strong approximation of stochastic differential equations with Runge–Kutta methods // *World Journal of Modelling and Simulation*, 2008. vol. 4, no. 2. pp. 83–93.
48. Кузнецов Д. С. *Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения*. Санкт-Петербург: Политехн. ун-т, 2007. 800 с. <https://doi.org/10.18720/SPBPU/2/s17-229>.
49. Konakov V., Menozzi S. Weak error for stable driven stochastic differential equations: Expansion of the densities // *J. Theor. Probab.*, 2011. vol. 24. pp. 454–478. <https://doi.org/10.1007/s10959-010-0291-x>.
50. Konakov V., Menozzi S. Weak error for the Euler scheme approximation of diffusions with non-smooth coefficients // *Electron. J. Probab.*, 2017. vol. 22, 46. 47 pp., arXiv: [1604.00771](https://arxiv.org/abs/1604.00771) [math.PR]. <https://doi.org/10.1214/17-EJP53>.
51. Hottovy S., Volpe G., Wehr J. Noise-Induced drift in stochastic differential equations with arbitrary friction and diffusion in the Smoluchowski–Kramers limit // *J. Stat. Phys.*, 2012. vol. 146, no. 4. pp. 762–773. <https://doi.org/10.1007/s10955-012-0418-9>.
52. Frikha N. On the weak approximation of a skew diffusion by an Euler-type scheme // *Bernoulli*, 2018. vol. 24, no. 3. pp. 1653–1691. <https://doi.org/10.3150/16-BEJ909>.
53. Соловьев В. И. *Экономико-математическое моделирование рынка программного обеспечения*. М.: Вега-Инфо, 2009. 176 с.

54. Кузнецова И. Ю. Численное решение стохастического дифференциального уравнения методом Эйлера–Маруямы // *Международный научно-исследовательский журнал*, 2013. № 11–1(18). С. 8–11.
55. ЗАО «Самарский булочно-кондитерский комбинат»: бухгалтерская отчетность и финансовый анализ. https://www.audit-it.ru/buh_otchet/6319008608_zao-samarskiy-bulochno-konditerskiy-kombinat; дата обращения: 21.04.2021.
56. ООО Маслозавод «Пестравский»: бухгалтерская отчетность и финансовый анализ. https://www.audit-it.ru/buh_otchet/6375000296_ooo-maslozavod-pestravskiy; дата обращения: 21.04.2021.

MSC: 60H10

Models of stochastic dynamics of development of industrial enterprises with lagging internal and external investments

A. L. Saraev, L. A. Saraev

Samara National Research University,

34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Abstract

The article proposes new stochastic models of the dynamic development of enterprises that restore their production at the expense of internal and external lagging investments. Systems of stochastic differential balance equations for such enterprises are established, describing random changes in factors of production and output. Proportional, progressive and digressive depreciation deductions are considered and their interaction with lagging internal and external investments is investigated. The conditions for achieving an equilibrium state of the enterprises work are formulated and the corresponding limiting values of the factors of production are calculated. Algorithms of the Euler–Maruyama method are obtained for numerical solutions of systems of stochastic differential equations of enterprise development. For each numerical implementation of these algorithms, the corresponding stochastic trajectories are constructed for the random functions of factors of production and output. A variant of the method for calculating the mathematical expectations of random functions of production factors is proposed, for which the corresponding system of differential equations is obtained. Numerical analysis of solutions of stochastic differential equations for the developed models showed good agreement with the known statistical data on the development of industrial enterprises.

Keywords: enterprise production factors, production function, output, resources, stochastic equations, Wiener process, the drift coefficient, volatility factor, lagging investment.

Received: 21st April, 2021 / Revised: 23rd August, 2021 /Accepted: 20th September, 2021 / First online: 3rd December, 2021

Research Article

© Authors, 2021

© Samara State Technical University, 2021 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this paper in press as:

Saraev A. L., Saraev L. A. Models of stochastic dynamics of development of industrial enterprises with lagging internal and external investments, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 4, pp. 738–762. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1862> (In Russian).

Authors' Details:Alexander L. Saraev  <https://orcid.org/0000-0002-9223-6330>

Cand. Econom. Sci., Associate Professor; Associate Professor; Department of Mathematics and Business Informatics; e-mail: alex.saraev@gmail.com

Leonid A. Saraev  <https://orcid.org/0000-0003-3625-5921>

Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Head of Department; Department of Mathematics and Business Informatics; e-mail: saraev_leo@mail.ru

Competing interests. The authors declare no conflicts of interests.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development; the authors contributed equally to this article. The authors are absolutely responsible for submit the final manuscript to print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. This research received no specific grant from any funding agency in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

References

1. Harrod R. F. *The Trade Cycle*. Oxford, Clarendon Press, 1936, 248 pp.
2. Domar E. D. Capital expansion, rate of growth, and employment, *Econometrica*, 1946, vol. 14, no. 2, pp. 137–147. <https://doi.org/10.2307/1905364>.
3. Solow R. M. A contribution to the theory of economic growth, *Quart. J. Econ.*, 1956, vol. 70, no. 1, pp. 65–94. <https://doi.org/10.2307/1884513>.
4. Swan T. W. Economic growth and capital accumulation, *Economic Record*, 1956, vol. 32, no. 2, pp. 334–361. <https://doi.org/10.1111/j.1475-4932.1956.tb00434.x>.
5. Kuznets S. Long swings in the growth of population and in related economic variables, *Proc. Amer. Phil. Soc.*, 1958, vol. 102, no. 1, pp. 25–52 <http://www.jstor.org/stable/985303>.
6. Kuznets S. Quantitative aspects of the economic growth of nations. Paper VIII: Distribution of income by size, *Economic Development and Cultural Change*, 1963, vol. 11, no. 2, pp. 1–80. <https://doi.org/10.1086/450006>.
7. Uzawa H. Optimum technical change in an aggregative model of economic growth, *Int. Econ. Review*, 1965, vol. 6, no. 1, pp. 18–31. <https://doi.org/10.2307/2525621>.
8. Arrow K. J. The economic implications of learning by doing, *Review Econ. Stud.*, 1962, vol. 29, no. 3, pp. 155–173. <https://doi.org/10.2307/2295952>.
9. Denison E. F. The contribution of capital to economic growth, *American Econ. Review*, 1980, vol. 70, no. 2, pp. 220–224 <https://www.jstor.org/stable/1815471>.
10. Romer P. M. Increasing returns and long-run growth, *J. Polit. Econ.*, 1986, vol. 94, no. 5, pp. 1002–1037. <https://doi.org/10.1086/261420>.
11. Lucas R. E. On the mechanics of economic development, *J. Monetary Econ.*, 1988, vol. 22, no. 1, pp. 3–42. [https://doi.org/10.1016/0304-3932\(88\)90168-7](https://doi.org/10.1016/0304-3932(88)90168-7).
12. Romer P. M. Endogenous technological change, *J. Polit. Econ.*, 1990, vol. 98, no. 5, pp. 71–102 <https://www.jstor.org/stable/2937632>.
13. Grossman G. M., Helpman E. *Innovation and Growth in the Global Economy*. Cambridge, MA, MIT Press, 1991, 359 pp.
14. Mankiw N. G., Romer D., Weil D. N. A contribution to the empirics of economic growth, *Quart. J. Econ.*, 1992, vol. 107, no. 2, pp. 407–437. <https://doi.org/10.2307/2118477>.
15. Grossman G. M., Helpman E. Endogenous innovation in the theory of growth, *J. Econ. Perspect.*, 1994, vol. 8, no. 1, pp. 23–44. <https://www.jstor.org/stable/2138149>.
16. Barro R. J., Sala-i-Martin X. I. *Economic Growth*. Cambridge MA, MIT Press, 1995, 672 pp.
17. Bruno M., Easterly W. *Inflation crises and long-run growth*, NBER Working Papers 5209, 1995. <https://doi.org/10.3386/w5209>.
18. Gong G., Greiner A., Semmler W. The Uzawa–Lucas model without scale effects: Theory and empirical evidence, *Struct. Change Econ. Dyn.*, 2004, vol. 15, no. 4, pp. 401–420. <https://doi.org/10.1016/j.strueco.2003.10.002>.
19. Nizhegorodtsev R. M. Models of logistics dynamics as a tool for economic analysis and forecasting, In: *Modelirovanie ekonomicheskoi dinamiki: risk, optimizatsiia, prognozirovanie* [Modeling of Economic Dynamics: Risk, Optimization, Forecasting]. Moscow, Dialog MSU, 1997, pp. 34–51 (In Russian).
20. Badash Kh. Z. Economic and mathematical model of economic growth of an enterprise, *Vestn. Udmurtsk. Univ., Ser. Ekonomika Pravo*, 2009, no. 1, pp. 5–9 (In Russian).

21. Korolev A. V., Matveenkov V. D. Structure of equilibrium time-varying trajectories in the Lucas endogenous growth model, *Autom. Remote Control*, 2006, vol. 67, no. 4, pp. 624–633. <https://doi.org/10.1134/S0005117906040102>.
22. Kuznetsov Yu. A., Michasova O. V. Comparative analysis of the application of simulation packages and computer mathematics systems for the analysis of models of the theory of economic growth, *Ekonom. Analiz*, 2007, vol. 86, no. 5, pp. 23–30 (In Russian).
23. Kuznetsov Yu. A., Michasova O. V. The generalized model of economic growth with human capital accumulation, *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2012, no. 4, pp. 46–57 (In Russian).
24. Prasolov A. V. *Matematicheskie metody ekonomicheskoi dinamiki* [Mathematical Methods of Economic Dynamics]. St. Petersburg, Lan', 2015, 352 pp. (In Russian)
25. Saraev A. L. Equations of nonlinear dynamics of crisis phenomena for multifactor economic systems, *Vestnik of Samara State University*, 2015, vol. 124, no. 2, pp. 262–272 (In Russian). <https://doi.org/10.18287/2542-0461-2015-0-2-262-272>.
26. Saraev A. L., Saraev L. A. Indicators of nonlinear dynamics and the limiting condition of a manufacturing enterprise, *Ekonomika i predprinimatel'stvo*, 2018, no. 11, pp. 1237–1241 (In Russian).
27. Saraev A. L. Equations of dynamics of unstable multifactor economic systems taking into account retardation effects of internal investment, *Kazan Econom. Vestn.*, 2015, vol. 17, no. 3, pp. 68–73 (In Russian).
28. Ilyina E. A., Saraev A. L., Saraev L. A. To the theory of modernization of manufacturing enterprises, taking into account the lag of domestic investment, *Ekonomika i predprinimatel'stvo*, 2017, no. 9–4(86), pp. 1130–1134 (In Russian).
29. Saraev A. L., Saraev L. A. Economic and mathematical model of the development of industrial enterprises, taking into account the effect of lagging internal investment, *Ekonomika i predprinimatel'stvo*, 2019, no. 5(106), pp. 1316–1320 (In Russian).
30. Saraev A. L., Saraev L. A. Multi-factor mathematical model of development of a production enterprise accounted by internal and external investments, *Vestnik of Samara University. Economics and Management*, 2020, vol. 11, no. 2, pp. 157–165 (In Russian). <https://doi.org/10.18287/2542-0461-2020-11-2-157-165>.
31. Saraev A. L., Saraev L. A. Mathematical models of the development of industrial enterprises, with the effect of lagging internal and external investments, *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2021, vol. 1784, 012010. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1784/1/012010>.
32. Saraev A. L., Saraev L. A. Stochastic calculation of curves dynamics of enterprise, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 2, pp. 343–364 (In Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1700>.
33. Artemyev S. S., Yakunin M. A. *Matematicheskoe i statisticheskoe modelirovanie v finansakh* [Mathematical and Statistical Modeling in Finances]. Novosibirsk, Inst. of Comput. Math. and Math. Geophys., 2008, 174 pp. (In Russian)
34. Vorontsovskii A. V., Dikarev A. Yu. Forecasting macroeconomic indicators in simulation mode based on stochastic models of economic growth, *Finansy i Biznes*, 2013, no. 2, pp. 33–51 (In Russian).
35. Kurzenev V. A., Lychagina E. B. Stochastic Modelling of Dynamics of Economic System, *Upravlencheskoe konsultirovanie*, 2013, no. 5, pp. 78–83 (In Russian).
36. Andrianov D. L., Shultz D. N., Oshchepkov I. A. Dynamic stochastic general economic equilibrium models, *Upravlenie ekonomicheskimi sistemami* [Management of Economic Systems], 2014, vol. 67, no. 7 (In Russian).
37. Andrianov D. L., Shultz D. N., Oshchepkov I. A. Dynamic stochastic model of Russia's general economic equilibrium, *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta, Ser. Sotsialnye nauki*, 2015, no. 2(38), pp. 18–25 (In Russian).
38. Andrianov D. L., Arbuzov V. O., Ivliev S. V., Maksimov V. P., Simonov P. M. Dynamic models of economics: Theory, applications, software implementation, *Vestnik Permskogo Universiteta, Ser. Ekonomika*, 2015, no. 4, pp. 8–32.

39. Itô K., McKean H. P. Jr. *Diffusion Processes and their Sample Paths*, Classics in Mathematics. Berlin, Springer, xv+321 pp. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-62025-6>.
40. Allen E. *Modeling with Itô stochastic differential equations*, Mathematical Modelling: Theory and Applications, vol. 22. Netherlands, Springer, 2007, xii+230 pp. <https://doi.org/10.1007/978-1-4020-5953-7>.
41. Stepanov S. S. *Stokhasticheskii mir* [Stochastic World] (In Russian). <https://synset.com/pdf/ito.pdf>; Accessed April 04, 2021.
42. Neisy A., Peymany M. Financial modeling by ordinary and stochastic differential equations, *World Applied Sciences Journal*, 2011, vol. 13, no. 11, pp. 2288–2295.
43. Kallianpur G., Sundar P. *Stochastic analysis and diffusion processes*, Oxford Graduate Texts in Mathematics, vol. 24. Oxford, Oxford University Press, 2014, xiv+352 pp. <https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780199657063.001.0001>.
44. Bally V., Talay D. The law of the Euler scheme for stochastic differential equations: I. Convergence rate of the distribution function, *Probab. Th. Rel. Fields*, 1996, vol. 104, no. 1, pp. 43–60. <https://doi.org/10.1007/BF01303802>.
45. Bally V., Talay D. The law of the Euler scheme for stochastic differential equations: II. Convergence rate of the density, *Monte Carlo Methods and Applications*, 1996, vol. 2, no. 2, pp. 93–128. <https://doi.org/10.1515/mcma.1996.2.2.93>.
46. Debarant K., Rößler A. Classification of stochastic Runge–Kutta methods for the weak approximation of stochastic differential equations, *Mathematics and Computers in Simulation*, 2008, vol. 77, no. 4, pp. 408–420, arXiv: [1303.4510](https://arxiv.org/abs/1303.4510) [math.NA]. <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2007.04.016>.
47. Soheili A. R., Namjoo M. Strong approximation of stochastic differential equations with Runge–Kutta methods, *World Journal of Modelling and Simulation*, 2008, vol. 4, no. 2, pp. 83–93.
48. Kuznetsov D. S. *Stokhasticheskie differentsial'nye uravneniia: teoriia i praktika chislennogo resheniia* [Stochastic Differential Equations: Theory and Practice of Numerical Solution]. St. Petersburg, Polytechnic Univ., 2007, 800 pp (In Russian). <https://doi.org/10.18720/SPBPU/2/s17-229>.
49. Konakov V., Menozzi S. Weak error for stable driven stochastic differential equations: Expansion of the densities, *J. Theor. Probab.*, 2011, vol. 24, pp. 454–478. <https://doi.org/10.1007/s10959-010-0291-x>.
50. Konakov V., Menozzi S. Weak error for the Euler scheme approximation of diffusions with non-smooth coefficients, *Electron. J. Probab.*, 2017, vol. 22, 46, 47 pp., arXiv: [1604.00771](https://arxiv.org/abs/1604.00771) [math.PR]. <https://doi.org/10.1214/17-EJP53>.
51. Hottovy S., Volpe G., Wehr J. Noise-Induced drift in stochastic differential equations with arbitrary friction and diffusion in the Smoluchowski–Kramers limit, *J. Stat. Phys.*, 2012, vol. 146, no. 4, pp. 762–773. <https://doi.org/10.1007/s10955-012-0418-9>.
52. Frikha N. On the weak approximation of a skew diffusion by an Euler-type scheme, *Bernoulli*, 2018, vol. 24, no. 3, pp. 1653–1691. <https://doi.org/10.3150/16-BEJ909>.
53. Solov'ev V. I. *Ekonomiko-matematicheskoe modelirovanie rynka programmnogo obespecheniia* [Economic and Mathematical Modeling of the Software Market]. Moscow, Vega-Info, 2009, 176 pp. (In Russian)
54. Kuznetzova I. Yu. Numerical solution of a stochastic differential equation by the Euler–Maruyama method, *Mezhdunarodnyi nauchno-issledovatel'skii zhurnal*, 2013, no. 11–1(18), pp. 8–11 (In Russian).
55. *CJSC Samara Bakery and Confectionery Plant: Financial statements and financial analysis* (In Russian). https://www.audit-it.ru/buh_otchet/6319008608_zao-samarskiy-bulochno-konditerskiy-kombinat; Accessed April 04, 2021.
56. *LLC Oil Plant Pestravsky: Financial statements and financial analysis* (In Russian). https://www.audit-it.ru/buh_otchet/6375000296_ooo-maslozavod-pestravskiy; Accessed April 04, 2021.