



УДК 517.958:532.539.376

Математическое моделирование и численный метод оценки характеристик неизотермической ползучести по результатам эксперимента

© В. Е. Зотеев

Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

Стремление к уменьшению массы машин и конструкций при улучшении их качества, а также к наиболее полному использованию механических свойств материалов требует постоянного совершенствования и развития известных методов расчета и анализа напряженно-деформированного состояния материалов в условиях ползучести.


В статье предлагается численный метод оценивания характеристик третьей стадии неизотермической ползучести по совокупности диаграмм ползучести, построенных при обработке результатов испытаний для различных значений номинального напряжения и температуры.

В основе метода лежат нелинейные регрессионные модели, среднеквадратичные оценки параметров которых находятся посредством линеаризации, в том числе на основе разностных уравнений, описывающих результаты наблюдений. Предлагаемый численный метод может быть также использован для оценки параметров третьей стадии ползучести, когда результаты эксперимента в форме совокупности диаграмм испытаний представлены только для одной температуры.

Приведены результаты апробации разработанного численного метода при обработке результатов эксперимента в форме диаграмм ползучести сплава 09Г2С при различных температурах. Достоверность и эффективность представленных в работе алгоритмов вычислений и методов нелинейного оценивания подтверждаются результатами численно-аналитических исследований и построенными на основе экспериментальных данных математическими моделями третьей стадии неизотермической ползучести.

Ключевые слова: напряженно-деформированное состояние материала, неизотермическая ползучесть, диаграммы испытаний, нелинейная регрессионная модель, разностные уравнения, среднеквадратичные оценки параметров.

Научная статья

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International \(https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru)

Образец для цитирования

Зотеев В. Е. Математическое моделирование и численный метод оценки характеристик неизотермической ползучести по результатам эксперимента // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 3. С. 531–555. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1871>.

Сведения об авторе

Владимир Евгеньевич Зотеев  <https://orcid.org/0000-0001-7114-4894>

доктор технических наук, доцент; профессор; каф. прикладной математики и информатики; e-mail: zoteev-ve@mail.ru

Получение: 24 июня 2021 г. / Исправление: 7 сентября 2021 г. /
Принятие: 20 сентября 2021 г. / Публикация онлайн: 30 сентября 2021 г.

Введение. Одна из важнейших проблем современного машиностроения — повышение долговечности и увеличение ресурса элементов конструкций при одновременном снижении их материалоемкости — неразрывно связана с совершенствованием и развитием математических методов расчета и анализа напряженно-деформированного состояния материалов в условиях ползучести. В связи с этим возрастает роль математического моделирования процессов появления и накопления деформации от напряжения, накопления поврежденности и разрушения как материалов, так и элементов конструкций. Все это указывает на актуальность разработки новых численных методов определения параметров моделей реологического деформирования, повышения достоверности оценок этих параметров на основе статистической обработки результатов наблюдений.

Одним из видов неупругой (необратимой) реологической деформации является деформация ползучести. Математическим описанием закономерностей ползучести занимались многие ученые, в том числе Ю. Н. Работнов [1, 2], Н. Н. Малинин [3, 4], А. М. Локошенко [5, 6], О. В. Соснин [7, 8], Ю. П. Самарин [9, 10], В. П. Радченко [11–13] и другие [14–17]. Однако построение обобщенных моделей деформирования и разрушения элементов конструкций, определяющих соотношений, описывающих зависимости появления и накопления деформации от напряжения, является только первым этапом в реализации триады «модель – алгоритм – программа». Следующим важнейшим этапом математического моделирования является разработка эффективных численных методов и алгоритмов параметрической идентификации, ориентированных на применение современных средств вычислений и математических методов статистической обработки результатов наблюдений.

К особенностям деформационно-прочностного поведения материалов при высоких температурах относятся отсутствие первых двух стадий ползучести (стадий упрочнения) и сравнительно короткая по продолжительности третья стадия (стадия разупрочнения) [8]. Вместе с тем именно третья стадия ползучести, как стадия, предшествующая разрушению, является определяющей при расчете срока службы проектируемого элемента конструкции.

Известные методики расчета параметров третьей стадии ползучести обладают рядом существенных недостатков [8, 12, 14, 15]. Они не используют статистические методы оценивания параметров модели, вследствие чего обладают низкими значениями помехозащищенности и точности результатов расчета. При этом известное математическое описание процессов деформирования и разрушения материалов не учитывает существенной зависимости параметров модели деформации ползучести от температуры [1–12].

1. Постановка задачи исследования и методы ее решения. Целью данной работы является разработка и исследование математической модели и методов оценки параметров третьей стадии деформации неизотермической ползучести, характеристики которой зависят от температуры. Для достижения поставленной цели в работе решаются следующие основные задачи:

- анализ существующего математического описания процессов деформации ползучести;

- разработка алгоритма нового численного метода оценивания параметров математической модели третьей стадии неизотермической ползучести;
- статистический анализ построенной математической модели и результатов вычислений;
- апробация нового численного метода оценивания характеристик неизотермической ползучести при обработке результатов эксперимента для сплава 09Г2С.

С учетом известного математического описания напряженно-деформированного состояния материалов в условиях ползучести задача оценки параметров модели как неизотермической, так и изотермической ползучести по результатам эксперимента относится к задаче нелинейной регрессии [18, 19]. Однако, как показали численно-аналитические исследования, применение классических методов нелинейного оценивания при решении поставленной задачи существенно ограничивается небольшим размером области допустимых начальных приближений в итерационной процедуре уточнения среднеквадратичных оценок характеристик деформации ползучести.

В работах [20, 21] сделана попытка решить эту проблему на основе разностных уравнений, коэффициенты которых известным образом связаны с параметрами третьей стадии деформации изотермической ползучести. Описанный в этих работах алгоритм численного метода параметрической идентификации на основе разностных уравнений позволяет строить модели реологического деформирования, отклонение которых от результатов эксперимента, представленных в форме совокупности кривых ползучести при различном напряжении, минимально по евклидовой норме. Однако задача построения моделей температурных зависимостей и достоверная оценка характеристик неизотермической ползучести в этих работах не решалась.

При построении математической модели в форме временной зависимости деформации ползучести можно воспользоваться определяющими уравнениями, полученными на основе энергетического подхода к решению задачи моделирования процесса деформации и разрушения материалов. Этот подход базируется на принципе суперпозиции упругой, пластической деформаций и деформации ползучести, а также на методе разделения деформации ползучести. Основным вариантом определяющих соотношений представлен в [12]. Из этих соотношений с учетом отсутствия вязкоупругой и вязкопластической составляющих в деформации ползучести p вытекают следующие уравнения:

$$\frac{dp(t)}{dt} = c\sigma^m(t), \quad \sigma(t) = \sigma_0[1 + \omega(t)], \quad \frac{d\omega(t)}{dt} = \alpha\sigma(t)\frac{dp(t)}{dt}, \quad (1)$$

где σ_0 и $\sigma(t)$ — соответственно номинальное и истинное напряжения ($\sigma_0 \geq 0$); $\omega(t)$ — параметр поврежденности; c и m — константы модели, при помощи которых описываются первая и вторая стадии ползучести; α — параметр модели, контролирующий процесс разупрочнения материала на деформации ползучести. Из системы дифференциальных уравнений (1) для нулевых начальных условий ($p(0) = \omega(0) = 0$) можно построить временные зависимости деформации ползучести

$$p(t, \sigma_{0i}) = -\frac{1}{\sigma_{0i} m \alpha} \ln(1 - \alpha m c \sigma_{0i}^{m+1} t), \quad (2)$$

которые используются для описания третьей стадии изотермической деформации ползучести при различных постоянных значениях σ_{0i} номинального напряжения.

Одной из важнейших проблем при оценке параметров модели (2) является выбор метрики, описывающей отклонение результатов расчета по модели от результатов наблюдений $(t_{k,i}^{\text{exp}}, p_{k,i}^{\text{exp}})$, $k = 0, 1, 2, \dots, N_i - 1$, $i = \overline{1, L}$, где N_i — число точек эксперимента для i -той кривой ползучести, L — число экспериментальных диаграмм ползучести, построенных для одной температуры. Для третьей стадии деформации ползучести важнейшим временным промежутком является область в окрестности момента разрушения материала, в которой график кривой ползучести приближается к вертикальной асимптоте. Поэтому очевидно, что оценки параметров математической модели (2) следует находить из условия минимизации нормы разности по временной координате:

$$\|t^{\text{exp}} - \hat{t}\| \rightarrow \min,$$

где t^{exp} — вектор данных эксперимента $t_{k,i}^{\text{exp}}$, сформированный по L диаграммам ползучести, в каждой из которых взято по N_i точек; \hat{t} — вектор результатов вычислений $\hat{t}_{k,i}$ по модели (2) при значениях деформации ползучести p_{ki}^{exp} , соответствующих точкам эксперимента $(t_{k,i}^{\text{exp}}, p_{k,i}^{\text{exp}})$, $k = 0, 1, 2, \dots, N_i - 1$, $i = \overline{1, L}$. При этом зависимость $t_{k,i}$ от $p_{k,i}$ в явном виде можно получить из выражения (2):

$$t_{k,i} = \frac{1}{cm\sigma_{0i}^{m+1}\alpha} [1 - \exp(-m\alpha\sigma_{0i}p_{k,i})], \quad k = 0, 1, 2, \dots, N_i - 1, \quad i = \overline{1, L}.$$

При такой постановке для решения этой задачи можно было бы воспользоваться известными методами прикладного регрессионного анализа [18, 19, 22–24]. Однако численно-аналитические исследования эффективности применения классических методов нелинейной регрессии выявили серьезную проблему, связанную с выбором начального приближения вектора оценок, вследствие которой эти методы оказались практически бесполезными. Решить эту проблему при решении задачи параметрической идентификации удалось с помощью численных методов нелинейного оценивания, в основе которых лежат разностные уравнения, описывающие результаты наблюдений [25, 26]. В работах [20, 21] приведены результаты построения математической модели и оценки параметров деформации ползучести при степенной зависимости параметра разупрочнения от напряжения. Описанные в этих работах алгоритмы нелинейного оценивания и результаты их апробации при обработке четырех экспериментально построенных диаграмм изотермической ползучести алюминиевого сплава подтверждают высокую достоверность полученных оценок и эффективность численного метода на основе разностных уравнений.

В данной работе решается задача параметрической идентификации математической модели вида

$$p(t, \sigma_{0i,j}, T_j) = -\frac{1}{\sigma_{0i,j}m(T_j)\alpha(T_j)} \ln[1 - \alpha(T_j)m(T_j)c(T_j)\sigma_{0i,j}^{m(T_j)+1}t], \quad (3)$$

описывающей *неизотермическую* деформацию ползучести на основе результатов наблюдений в форме совокупности диаграмм ползучести для разных напряжений и при различной температуре.

Результаты эксперимента после предварительной обработки диаграмм ползучести будем представлять в виде точек $(y_{k,i,j}, p_{k,i,j})$, где $y_{k,i,j} = \hat{t}_{k,i,j}^{\text{exp}}$ — ордината точки на диаграмме ползучести, абсцисса которой равна $p_{k,i,j}$, причем при равномерной дискретизации каждой кривой ползучести с шагом $h_{i,j}$ имеем $p_{k,i,j} = h_{i,j}k$, где $k = \overline{0, N_{i,j}}$ — номер результата эксперимента для i -той кривой ползучести в j -той совокупности кривых для каждой температуры T_j ; $i = \overline{1, L_j}$ — номер кривой ползучести для $\sigma_{0i,j}$ напряжения в j -той совокупности кривых для одной температуры; $j = \overline{1, M}$ — номер совокупности кривых для температуры T_j ; L_j — число кривых ползучести в j -той совокупности кривых для температуры T_j ; M — число различных температур (совокупностей кривых ползучести); $\sigma_{0i,j}$ — напряжение, соответствующее i -той кривой ползучести в j -той совокупности кривых для одной температуры.

Для решения поставленной задачи предлагается новый численный метод оценки параметров математической модели третьей стадии неизотермической ползучести по всей совокупности экспериментальных диаграмм ползучести для разных напряжений и различной температуры, в основе которого лежит минимизация суммы квадратов отклонения результатов расчета $(\hat{t}_{k,i,j}, p_{k,i,j})$ по формуле

$$\hat{t}_{k,i,j} = \frac{1}{\alpha(T_j)m(T_j)c(T_j)\sigma_{0i,j}^{m(T_j)+1}} [1 - e^{-\alpha(T_j)m(T_j)\sigma_{0i,j}p_{k,i,j}}] \quad (4)$$

от результатов эксперимента $(y_{k,i,j}, p_{k,i,j})$ по совокупности $\sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^{L_j} N_{i,j}$ точек всех кривых ползучести для всех температур:

$$\|y - \hat{t}\|^2 = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^{L_j} \sum_{k=0}^{N_{i,j}-1} (y_{k,i,j} - \hat{t}_{k,i,j})^2 \rightarrow \min.$$

- Основными особенностями предлагаемого численного метода являются:
- применение разностных уравнений при оценке параметров отдельной кривой ползучести при данном напряжении и известной температуре;
 - промежуточная оценка параметров изотермической деформации ползучести как один из этапов алгоритма численного метода;
 - возможность использования различных математических моделей зависимости параметров третьей стадии деформации ползучести от температуры;
 - применение классических методов нелинейной регрессии для уточнения параметров модели неизотермической деформации ползучести.

Алгоритм предлагаемого численного метода включает два основных этапа. На первом этапе решается задача построения моделей изотермической ползучести одновременно для всех совокупностей диаграмм ползучести для разных температур. На втором этапе строятся математические модели температурных зависимостей характеристик модели (3) и уточняются оценки их параметров.

Первый этап. Формирование результатов расчета для оценки параметров математических моделей температурных зависимостей $\alpha(T)$, $c(T)$ и $m(T)$.

Шаг 1.1. Параметрическая идентификация на основе разностных уравнений двухпараметрической математической модели кривой ползучести для каждой экспериментально построенной диаграммы ползучести при известных напряжениях σ_{0ij} и температуре T_j , $i = \overline{1, L_j}$, $j = \overline{1, M}$.

Шаг 1.2. Промежуточная оценка параметров α_j , m_j и c_j модели (2) для каждой j -той совокупности диаграмм ползучести, построенной при одной температуре T_j , $j = \overline{1, M}$.

Шаг 1.3. Уточнение оценок параметров α_j , m_j и c_j модели (2) для каждой j -той совокупности диаграмм ползучести, соответствующей одной температуре T_j , $j = \overline{1, M}$.

Второй этап. Среднеквадратичная оценка параметров математических моделей температурных зависимостей $\alpha(T)$, $c(T)$ и $m(T)$ на основе результатов расчета, полученных на первом этапе.

Шаг 2.1. Выбор вида математических моделей температурных зависимостей $\alpha(T)$, $c(T)$ и $m(T)$.

Шаг 2.2. Предварительная оценка параметров математических моделей $\alpha(T)$, $c(T)$ и $m(T)$ температурных зависимостей на основе результатов расчета $\hat{\alpha}_j$, \hat{c}_j , \hat{m}_j , $j = \overline{1, M}$.

Шаг 2.3. Уточнение оценок параметров математических моделей температурных зависимостей $\alpha(T)$, $c(T)$ и $m(T)$ на основе классических методов нелинейного регрессионного анализа.

2. Формирование результатов расчета для построения математических моделей зависимостей параметров $\alpha(T)$, $c(T)$ и $m(T)$ от температуры. На первом этапе предлагаемого численного метода параметрической идентификации решается задача оценки параметров α_j , c_j и m_j третьей стадии ползучести для каждой совокупности L_j диаграмм ползучести, построенных для температуры T_j , $j = \overline{1, M}$.

На первом шаге находятся оценки двух параметров $u_{i,j}$ и $v_{i,j}$ математической модели

$$t_{k,i,j} = \frac{1}{u_{i,j}v_{i,j}\sigma_{0i,j}}(1 - e^{-u_{i,j}\sigma_{0i,j}h_{i,j}k}), \quad i = \overline{1, L_j}, \quad j = \overline{1, M}, \quad (5)$$

для каждой индивидуальной кривой ползучести, построенной с учетом известных значений напряжения $\sigma_{0i,j}$ и температуры T_j , $h_{i,j}$ — период равномерной дискретизации по переменной p : $p_{k,i,j} = h_{i,j}k$, $k = 0, 1, 2, \dots, N_{i,j} - 1$, $i = \overline{1, L_j}$, $j = \overline{1, M}$. Эти параметры связаны с характеристиками деформации ползучести соотношениями:

$$u_{i,j} = \alpha_j m_j, \quad v_{i,j} = c_j \sigma_{0i,j}^{m_j}, \quad (6)$$

где $\alpha_j = \alpha(T_j)$, $m_j = m(T_j)$ и $c_j = c(T_j)$ — параметры модели (3), соответствующие изотермической деформации ползучести при температуре T_j , $i = \overline{1, L_j}$.

Оценки $\hat{u}_{i,j}$ и $\hat{v}_{i,j}$ этих параметров находятся из условия минимизации суммы квадратов отклонения

$$Q_{i,j}(\lambda_{1i,j}, \lambda_{2i,j}) = \sum_{k=0}^{N_{i,j}-1} (y_{k,i,j} - \hat{t}_{k,i,j})^2 = \sum_{k=0}^{N_{i,j}} e_{k,i,j}^2 \rightarrow \min$$

на основе построенных разностных уравнений

$$\begin{cases} t_{0,i,j} = 0; \\ t_{k,i,j} = \lambda_{1i,j} t_{k-1,i,j} + \lambda_{2i,j}, \quad k = 1, 2, \dots, N_{i,j} - 1, \end{cases} \quad (7)$$

коэффициенты в которых $\lambda_{1i,j}$ и $\lambda_{2i,j}$ связаны с параметрами $u_{i,j}$ и $v_{i,j}$ соотношениями

$$\lambda_{1i,j} = e^{-u_{i,j} \sigma_{0i,j} h_{i,j}}, \quad \lambda_{2i,j} = \frac{1 - \lambda_{1i,j}}{u_{i,j} v_{i,j} \sigma_{0i,j}}, \quad (8)$$

где $i = \overline{1, L_j}$, $j = \overline{1, M}$.

С учетом равенства

$$y_{k,i,j} = t_{k,i,j} + \varepsilon_{k,i,j}, \quad k = \overline{0, N_{i,j}}, \quad i = \overline{1, L_j}, \quad j = \overline{1, M},$$

где $y_{k,i,j}$ — результаты наблюдений, $\varepsilon_{k,i,j}$ — случайные величины, описывающие разброс данных эксперимента относительно модели (4), на основе разностных уравнений (7) построена обобщенная регрессионная модель вида

$$\begin{cases} b = F\lambda + \eta; \\ \eta = P_\lambda \varepsilon, \end{cases} \quad (9)$$

где $b = (y_{0,i,j}, y_{1,i,j}, \dots, y_{N_{i,j}-1,i,j})^\top$ — вектор результатов наблюдений; $\lambda = (\lambda_{1i,j}, \lambda_{2i,j})^\top$ — вектор неизвестных коэффициентов; $\varepsilon = (\varepsilon_{0,i,j}, \varepsilon_{1,i,j}, \dots, \varepsilon_{N_{i,j}-1,i,j})^\top$ — вектор случайной помехи в результатах наблюдений; F — матрица регрессоров размера $[N_{i,j} \times 2]$, элементы которой описываются формулами

$$f_{1,1} = f_{1,2} = 0, \quad f_{k,1} = y_{k-2,i,j}, \quad f_{k,2} = 1, \quad k = \overline{2, N_{i,j}};$$

P_λ — матрица линейного преобразования вектора случайной помехи ε в результатах наблюдений размера $[N_{i,j} \times N_{i,j}]$, элементы которой описываются формулами

$$p_{i,j} = \begin{cases} 1, & l = k, & k = \overline{1, N_{i,j}}; \\ -\lambda_{1i,j}, & l = k - 1, & k = \overline{2, N_{i,j}}; \\ 0, & 1 \leq l \leq k - 2, & k = \overline{3, N_{i,j}}; \\ 0, & k + 1 \leq l \leq N_{i,j}, & k = \overline{1, N_{i,j} - 1}; \end{cases}$$

$\eta = (\eta_{1,i,j}, \eta_{2,i,j}, \dots, \eta_{N_{i,j},i,j})^\top$ — вектор эквивалентного случайного возмущения (вектор невязки), элементы которого описываются формулами

$$\eta_{1,i,j} = \varepsilon_{0,i,j}, \quad \eta_{k+1,i,j} = -\lambda_{1i,j} \varepsilon_{k-1,i,j} + \varepsilon_{k,i,j}, \quad k = 1, 2, \dots, N_{i,j} - 1.$$

Алгоритм оценивания коэффициентов обобщенной регрессионной модели (9), обеспечивающий минимизацию суммы квадратов отклонения $Q_{i,j}$ для каждой кривой ползучести, включает итерационную процедуру, которая описывается формулой

$$\hat{\lambda}^{(s+1)} = (F^\top \Omega_{\hat{\lambda}^{(s)}}^{-1} F)^{-1} F^\top \Omega_{\hat{\lambda}^{(s)}}^{-1} b, \quad (10)$$

где $s = 0, 1, 2, \dots$ — номер итерации, $\Omega_{\hat{\lambda}_{i,j}^{(s)}} = P_{\hat{\lambda}_{i,j}^{(s)}} P_{\hat{\lambda}_{i,j}^{(s)}}^\top$, начальное приближение: $\hat{\lambda}^{(0)} = (0; 0)^\top$, $P_{\hat{\lambda}^{(0)}} = \Omega_{\hat{\lambda}^{(0)}} = \Omega_{\hat{\lambda}^{(0)}}^{-1} = E$ — единичная матрица размера $[N_{i,j} \times N_{i,j}]$.

По найденным оценкам $\hat{\lambda}_{1i,j}$ и $\hat{\lambda}_{2i,j}$ с учетом соотношений (8) для каждой экспериментально построенной диаграммы ползучести при напряжении $\sigma_{0i,j}$ и температуре T_j вычисляются оценки параметров математической модели (5):

$$\hat{u}_{i,j} = -\frac{1}{\sigma_{0i,j} h_{i,j}} \ln \hat{\lambda}_{1i,j}, \quad \hat{v}_{i,j} = \frac{1 - \hat{\lambda}_{1i,j}}{\hat{u}_{i,j} \sigma_{0i,j} \hat{\lambda}_{2i,j}}, \quad i = \overline{1, L_j}, \quad j = \overline{1, M}. \quad (11)$$

На втором шаге первого этапа находятся промежуточные оценки параметров α_j , m_j и c_j модели

$$p(t, \sigma_{0i,j}, T_j) = -\frac{1}{\sigma_{0i,j} m_j \alpha_j} \ln[1 - \alpha_j m_j c_j \sigma_{0i,j}^{m_j+1} t], \quad i = \overline{1, L_j}, \quad j = \overline{1, M}, \quad (12)$$

для каждой j -той совокупности диаграмм ползучести, построенной при одной и той же температуре T_j , $j = \overline{1, M}$. В основе вычисления этих оценок лежат регрессионные модели, построенные с учетом формул (6):

$$\begin{aligned} \hat{v}_{i,j} &= c_j \sigma_{0i,j}^{m_j} + \varepsilon_{i,j}, & i = \overline{1, L_j}, \quad j = \overline{1, M}, \\ \hat{u}_{i,j} &= \alpha_j m_j + \xi_{i,j}, & i = \overline{1, L_j}, \quad j = \overline{1, M}, \end{aligned} \quad (13)$$

где $\varepsilon_{i,j}$ и $\xi_{i,j}$ — случайные величины, удовлетворяющие предпосылкам классического регрессионного анализа [19, 24].

Среднеквадратичные оценки параметров c_j и m_j , $j = \overline{1, M}$, находятся из условия минимизации

$$\sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^{L_j} (\hat{v}_{i,j} - \hat{c}_j \sigma_{0i,j}^{m_j})^2 = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^{L_j} e_{i,j}^2 \rightarrow \min$$

на основе линеаризации нелинейной модели (13) посредством логарифмирования. С учетом аппроксимации $\ln(1 + \frac{\varepsilon_{i,j}}{v_{i,j}}) \approx \frac{\varepsilon_{i,j}}{v_{i,j}}$ нелинейная модель (13) преобразуется к виду

$$\hat{v}_{i,j} \ln \hat{v}_{i,j} = \hat{v}_{i,j} \lambda_j + \hat{v}_{i,j} \ln \sigma_{0i,j} \lambda_{M+j} + \varepsilon_{i,j}, \quad i = \overline{1, L_j}, \quad j = \overline{1, M}, \quad (14)$$

где $\lambda_j = \ln c_j$, $\lambda_{M+j} = L_j$, $j = \overline{1, M}$.

Представив линейную регрессию (14) в матричном виде, имеем

$$b = F\lambda + \varepsilon,$$

где $b = [b_1 \ b_2 \ b_3 \ \dots \ b_M]^\top$ — блочная матрица-столбец размера $[\sum_{j=1}^M L_j \times 1]$,

в которой $b_j = (v_{1,j} \ln v_{1,j}, v_{2,j} \ln v_{2,j}, \dots, v_{L_j,j} \ln v_{L_j,j})^\top$ — векторы размера

$[L_j \times 1]$, $j = \overline{1, M}$; $F = [F_1 \ F_2 \ \dots \ F_M]^\top$ — блочная матрица-столбец размера $[\sum_{j=1}^M L_j \times 2M]$, в которой

$$F_j = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \hat{v}_{1,j} & \dots & 0 & 0 & \dots & \hat{v}_{1,j} \ln \sigma_{01,j} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \hat{v}_{2,j} & \dots & 0 & 0 & \dots & \hat{v}_{2,j} \ln \sigma_{02,j} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \hat{v}_{L_j,j} & \dots & 0 & 0 & \dots & \hat{v}_{L_j,j} \ln \sigma_{0L_j,j} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

— матрицы размера $[L_j \times 2M]$, $j = \overline{1, M}$; $\lambda = (\ln c_1, \ln c_2, \dots, \ln c_M, m_1, m_2, \dots, m_M)^\top$ — вектор неизвестных коэффициентов, оценка которого находится по формуле

$$\hat{\lambda} = (F^\top F)^{-1} F^\top b. \quad (15)$$

Оценки параметров c_j и m_j , $j = \overline{1, M}$, модели (12) вычисляются по формулам

$$\hat{c}_j = e^{\hat{\lambda}_j}, \quad \hat{m}_j = \hat{\lambda}_{M+j}, \quad j = \overline{1, M}. \quad (16)$$

С учетом найденных оценок \hat{m}_j , $j = \overline{1, M}$, предварительные оценки параметров $\hat{\alpha}_j$, $j = \overline{1, M}$, находятся на основе регрессионной модели

$$b = F\alpha + \xi,$$

где $b = [b_1 \ b_2 \ b_3 \ \dots \ b_M]^\top$ — блочная матрица-столбец, в которой $b_j = (\hat{u}_{1,j}, \hat{u}_{2,j}, \dots, \hat{u}_{L_j,j})^\top$, $j = \overline{1, M}$; $F = \text{diag} [f_1 \ f_2 \ \dots \ f_M]$ — блочно-диагональная матрица размера $[\sum_{j=1}^M L_j \times M]$, в которой $f_j = \hat{m}_j(1, 1, \dots, 1)^\top$ — векторы размера $[L_j \times 1]$; $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_M)^\top$. С учетом минимизации остаточной суммы квадратов

$$\sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^{L_j} (\hat{u}_{i,j} - \hat{\alpha}_j \hat{m}_j)^2 = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^{L_j} \hat{\xi}_{i,j}^2 \rightarrow \min$$

имеем

$$\hat{\alpha} = (F^\top F)^{-1} F^\top b. \quad (17)$$

На последнем шаге первого этапа предварительные оценки параметров $c_j = c(T_j)$, $m_j = m(T_j)$ и $\alpha_j = \alpha(T_j)$ для каждой j -той совокупности кривых при температуре T_j уточняются методом нелинейной регрессии, в основе которого лежит параметрическая линейаризация функциональной зависимости:

$$t_{k,i,j} = \frac{1}{c_j m_j \sigma_{0i,j} \alpha_j} [1 - \exp(-m_j \alpha_j \sigma_{0i,j} p_{k,i,j})],$$

$$k = 0, 1, \dots, N_{i,j} - 1, \quad i = \overline{1, L_j}, \quad j = \overline{1, M}. \quad (18)$$

Линеаризируя по параметрам в окрестности точки $(\hat{\alpha}_j^{(s)}, \hat{c}_j^{(s)}, \hat{m}_j^{(s)})$ нелинейную зависимость (18), получаем:

$$t_{k,i,j}(\alpha_j, c_j, m_j) \approx t_{k,i,j}^{(s)} + \frac{\partial t_{k,i,j}^{(s)}}{\partial \alpha} (\alpha_j - \hat{\alpha}_j^{(s)}) + \frac{\partial t_{k,i,j}^{(s)}}{\partial c} (c_j - \hat{c}_j^{(s)}) + \frac{\partial t_{k,i,j}^{(s)}}{\partial m} (m_j - \hat{m}_j^{(s)}), \quad (19)$$

где $t_{k,i,j}^{(s)} = t_{k,i,j}(\hat{\alpha}_j^{(s)}, \hat{c}_j^{(s)}, \hat{m}_j^{(s)})$, а частные производные вычисляются по формулам

$$\frac{\partial t_{k,i,j}}{\partial \alpha} = \frac{e^{-\alpha_j m_j \sigma_{0i,j} p_{k,i,j}} (\alpha_j m_j \sigma_{0i,j} p_{k,i,j} + 1) - 1}{\alpha_j^2 m_j c_j \sigma_{0i,j}^{m_j+1}} = -\frac{t_{k,i,j}}{\alpha_j} + \frac{p_{k,i,j} e^{-\alpha_j m_j \sigma_{0i,j} p_{k,i,j}}}{\alpha_j c_j \sigma_{0i,j}^{m_j}}, \quad (20)$$

$$\frac{\partial t_{k,i,j}}{\partial c} = -\frac{1 - e^{-\alpha_j m_j \sigma_{0i,j} p_{k,i,j}}}{\alpha_j m_j c_j^2 \sigma_{0i,j}^{m_j+1}} = -\frac{t_{k,i,j}}{c_j}, \quad (21)$$

$$\frac{\partial t_{k,i,j}}{\partial m} = -\frac{t_{k,i,j} (1 + m_j \ln \sigma_{0i,j})}{m_j} + \frac{p_{k,i,j} e^{-\alpha_j m_j \sigma_{0i,j} p_{k,i,j}}}{m_j c_j \sigma_{0i,j}^{m_j}}. \quad (22)$$

С учетом линеаризации (19) и условия минимизации (критерия средне-квадратичного оценивания)

$$\|y - \hat{t}\|^2 = \|\varepsilon\|^2 = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^{L_j} \sum_{k=0}^{N_{i,j}-1} (y_{k,i,j} - \hat{t}_{k,i,j})^2 \rightarrow \min$$

сформирована линейная регрессионная модель

$$\Delta t^{(s)} = F^{(s)} \Delta a^{(s)} + \varepsilon, \quad (23)$$

где $\Delta t^{(s)} = [\Delta t_1^{(s)} \quad \Delta t_2^{(s)} \quad \dots \quad \Delta t_M^{(s)}]^\top$ – блочная матрица-столбец размера $[\sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^{L_j} N_{i,j} \times 1]$, состоящая из M блочных матриц-столбцов $\Delta t_j^{(s)} = [\Delta t_{1,j}^{(s)} \quad \Delta t_{2,j}^{(s)} \quad \dots \quad \Delta t_{L_j,j}^{(s)}]^\top$ размера $[\sum_{i=1}^{L_j} N_{i,j} \times 1]$, $j = \overline{1, M}$, каждая из которых включает вектор $\Delta t_{i,j}^{(s)} = \{y_{k,i,j} - \hat{t}_{k,i,j}^{(s)}\}$, $k = 0, 1, 2, \dots, N_{i,j} - 1$, размера $[N_{i,j} \times 1]$, $i = \overline{1, L_j}$, $j = \overline{1, M}$; $F^{(s)} = [F_1^{(s)} \quad F_2^{(s)} \quad F_3^{(s)}]$ – блочная матрица-строка регрессоров размера $[\sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^{L_j} N_{i,j} \times 3M]$, состоящая из трех блочно-диагональных матриц $F_p^{(s)} = \text{diag} [f_{1p}^{(s)} \quad f_{2p}^{(s)} \quad \dots \quad f_{Mp}^{(s)}]$, $p = \overline{1, 3}$, размера

$\left[\sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^{L_j} N_{i,j} \times M \right]$, каждая из которых включает блочные матрицы-столбцы

$f_{jp}^{(s)} = \left[f_{1,j,p}^{(s)} \quad f_{2,j,p}^{(s)} \quad \dots \quad f_{L_j,j,p}^{(s)} \right]^T$, $j = \overline{1, M}$, размера $\left[\sum_{i=1}^{L_j} N_{i,j} \times 1 \right]$, состоящие из векторов размера $[N_{i,j} \times 1]$:

$$\begin{aligned} f_{i,j,1}^{(s)} &= \left(\frac{\partial \hat{t}_{0,i,j}^{(s)}}{\partial \alpha}, \frac{\partial \hat{t}_{1,i,j}^{(s)}}{\partial \alpha}, \frac{\partial \hat{t}_{2,i,j}^{(s)}}{\partial \alpha}, \dots, \frac{\partial \hat{t}_{N_{i,j}-1,i,j}^{(s)}}{\partial \alpha} \right)^T, \\ f_{i,j,2}^{(s)} &= \left(\frac{\partial \hat{t}_{0,i,j}^{(s)}}{\partial c}, \frac{\partial \hat{t}_{1,i,j}^{(s)}}{\partial c}, \frac{\partial \hat{t}_{2,i,j}^{(s)}}{\partial c}, \dots, \frac{\partial \hat{t}_{N_{i,j}-1,i,j}^{(s)}}{\partial c} \right)^T, \\ f_{i,j,3}^{(s)} &= \left(\frac{\partial \hat{t}_{0,i,j}^{(s)}}{\partial m}, \frac{\partial \hat{t}_{1,i,j}^{(s)}}{\partial m}, \frac{\partial \hat{t}_{2,i,j}^{(s)}}{\partial m}, \dots, \frac{\partial \hat{t}_{N_{i,j}-1,i,j}^{(s)}}{\partial m} \right)^T, \end{aligned}$$

элементы которых — частные производные, взятые в точке $(\hat{\alpha}_j^{(s)}, \hat{c}_j^{(s)}, \hat{m}_j^{(s)})$, $j = \overline{1, M}$; $\varepsilon = [\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \dots \quad \varepsilon_M]^T$ — блочная матрица-столбец размера $\left[\sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^{L_j} N_{i,j} \times 1 \right]$, состоящая из M блочных матриц-столбцов $\varepsilon_j =$

$[\varepsilon_{1,j} \quad \varepsilon_{2,j} \quad \dots \quad \varepsilon_{L_j,j}]^T$ размера $\left[\sum_{i=1}^{L_j} N_{i,j} \times 1 \right]$, $j = \overline{1, M}$, каждая из которых включает векторы $\varepsilon_{i,j} = (\varepsilon_{0,i,j}, \varepsilon_{1,i,j}, \dots, \varepsilon_{N_{i,j}-1,i,j})^T$ размера $[N_{i,j} \times 1]$, $i = \overline{1, L_j}$, $j = \overline{1, M}$, элементы которых — случайные величины, описывающие разброс модели (18) относительно результатов наблюдений; $\hat{a}^{(s)} = (\hat{\alpha}_1^{(s)}, \hat{\alpha}_2^{(s)}, \dots, \hat{\alpha}_M^{(s)}, \hat{c}_1^{(s)}, \hat{c}_2^{(s)}, \dots, \hat{c}_M^{(s)}, \hat{m}_1^{(s)}, \hat{m}_2^{(s)}, \dots, \hat{m}_M^{(s)})^T$ — матрица-столбец промежуточных оценок размера $[3M \times 1]$;

$$\begin{aligned} \Delta a^{(s)} &= a - \hat{a}^{(s)} = \\ &= (\Delta \hat{\alpha}_1^{(s)}, \dots, \Delta \hat{\alpha}_M^{(s)}, \Delta \hat{c}_1^{(s)}, \dots, \Delta \hat{c}_M^{(s)}, \Delta \hat{m}_1^{(s)}, \dots, \Delta \hat{m}_M^{(s)})^T = \\ &= (\alpha_1 - \hat{\alpha}_1^{(s)}, \dots, \alpha_M - \hat{\alpha}_M^{(s)}, c_1 - \hat{c}_1^{(s)}, \dots, c_M - \hat{c}_M^{(s)}, m_1 - \hat{m}_1^{(s)}, \dots, m_M - \hat{m}_M^{(s)})^T \end{aligned}$$

— матрица-столбец коэффициентов, подлежащих оценке, размера $[3M \times 1]$.

Алгоритм уточнения среднеквадратичных оценок параметров модели (18) описывается итерационной формулой

$$\hat{a}^{(s+1)} = \hat{a}^{(s)} + [F^{(s)T} F^{(s)}]^{-1} F^{(s)T} \Delta t^{(s)}, \quad s = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (24)$$

В качестве начального приближения вектора оценок параметров модели (18) $\hat{a}^{(0)} = (\hat{\alpha}_1^{(0)}, \hat{\alpha}_2^{(0)}, \dots, \hat{\alpha}_M^{(0)}, \hat{c}_1^{(0)}, \hat{c}_2^{(0)}, \dots, \hat{c}_M^{(0)}, \hat{m}_1^{(0)}, \hat{m}_2^{(0)}, \dots, \hat{m}_M^{(0)})^T$ могут быть приняты промежуточные оценки, полученные на предыдущем шаге алгоритма. Итерационная процедура (24) уточнения среднеквадратичных оценок параметров модели (18) завершается при выполнении условия $\|\Delta a^{(s+1)}\| < \delta$, где δ — некоторое наперед заданное положительное малое число.

При $M = 1$ описанный выше алгоритм первого этапа может быть использован для оценки параметров третьей стадии изотермической ползучести, когда результаты эксперимента в форме совокупности диаграмм ползучести представлены для одной температуры.

3. Среднеквадратичная оценка параметров моделей температурных зависимостей $\alpha(T)$, $c(T)$ и $m(T)$ на основе результатов расчета, полученных на первом этапе. На втором этапе предлагаемого численного метода строятся температурные зависимости параметров $\alpha(T)$, $c(T)$ и $m(T)$ математической модели (3). Вид этих зависимостей выбирается на основе анализа совокупностей диаграмм ползучести, построенных для различных температур T_j , $j = \overline{1, M}$. В первом приближении можно использовать полиномиальную форму температурных зависимостей:

$$\begin{aligned} \alpha(T) &= \nu_0 + \nu_1 T + \nu_2 T^2 + \dots + \nu_n T^n, \\ c(T) &= \mu_0 + \mu_1 T + \mu_2 T^2 + \dots + \mu_n T^n, \\ m(T) &= \beta_0 + \beta_1 T + \beta_2 T^2 + \dots + \beta_n T^n. \end{aligned} \quad (25)$$

При этом степень n алгебраического многочлена не должна превышать величины $M - 1$: $n \leq M - 1$.

Предварительная оценка параметров моделей температурных зависимостей (25) на основе результатов расчета $\hat{\alpha}_j$, \hat{c}_j и \hat{m}_j , $j = \overline{1, M}$, полученных на первом этапе, реализуется на основе линейных регрессионных моделей вида

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_j &= \nu_0 + \nu_1 T + \nu_2 T^2 + \dots + \nu_n T^n + \varepsilon_{1j}, \\ \hat{c}_j &= \mu_0 + \mu_1 T + \mu_2 T^2 + \dots + \mu_n T^n + \varepsilon_{2j}, \\ \hat{m}_j &= \beta_0 + \beta_1 T + \beta_2 T^2 + \dots + \beta_n T^n + \varepsilon_{3j}, \quad j = \overline{1, M}, \end{aligned} \quad (26)$$

где случайные величины ε_{1j} , ε_{2j} и ε_{3j} удовлетворяют основным положениям классического регрессионного анализа и не коррелированы между собой.

В матричной форме уравнения (26) можно представить в виде

$$B = FA + \Sigma,$$

где $B = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_1 & \hat{c}_1 & \hat{m}_1 \\ \hat{\alpha}_2 & \hat{c}_2 & \hat{m}_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{\alpha}_M & \hat{c}_M & \hat{m}_M \end{bmatrix}$ — матрица размера $[M \times 3]$ результатов расчетов,

полученных на первом этапе; $F = \begin{bmatrix} 1 & T_1 & T_1^2 & \dots & T_1^n \\ 1 & T_2 & T_2^2 & \dots & T_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & T_M & T_M^2 & \dots & T_M^n \end{bmatrix}$ — матрица регрес-

соров размера $[M \times (n + 1)]$; $A = \begin{bmatrix} \nu_0 & \mu_0 & \beta_0 \\ \nu_1 & \mu_1 & \beta_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \nu_n & \mu_n & \beta_n \end{bmatrix}$ — матрица размера $[(n + 1) \times 3]$

коэффициентов, подлежащих оценке на основе результатов расчетов, полу-

ченных на первом этапе; $\Sigma = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \varepsilon_{M1} & \varepsilon_{M2} & \varepsilon_{M3} \end{bmatrix}$ — матрица размера $[M \times 3]$

случайных возмущений в результатах расчетов.

Оценки элементов матрицы A находятся с учетом минимизации суммы квадратов отклонений для каждой из трех моделей (25):

$$\|\varepsilon_i\|^2 = \sum_{j=1}^M \varepsilon_{ji}^2 = \sum_{j=1}^M \left(b_{ji} - \sum_{p=0}^n f_{j,p+1} a_{p+1,i} \right)^2 \rightarrow \min, \quad i = \overline{1, 3},$$

где $b_{j1} = \hat{\alpha}_j$, $b_{j2} = \hat{c}_j$, $b_{j3} = \hat{m}_j$, $j = \overline{1, M}$ — столбцы матрицы B ; $a_{p+1,1} = \nu_p$, $a_{p+1,2} = \mu_p$, $a_{p+1,3} = \beta_p$, $p = 0, 1, 2, \dots, n$ — столбцы матрицы A ; $f_{j,p+1} = T_j^p$, $j = \overline{1, M}$, $p = 0, 1, 2, \dots, n$ — столбцы матрицы регрессоров F .

Легко убедиться, что в этом случае матрица $\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{\nu}_0 & \hat{\mu}_0 & \hat{\beta}_0 \\ \hat{\nu}_1 & \hat{\mu}_1 & \hat{\beta}_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{\nu}_n & \hat{\mu}_n & \hat{\beta}_n \end{bmatrix}$ средне-

квадратичных оценок может быть найдена по формуле

$$\hat{A} = (F^T F)^{-1} F^T B. \quad (27)$$

4. Уточнение оценок параметров моделей температурных зависимостей $\alpha(T)$, $m(T)$ и $c(T)$, обеспечивающих наименьшее среднеквадратичное отклонение построенной модели от результатов эксперимента. Полученные среднеквадратичные оценки параметров моделей температурных зависимостей $\alpha(T)$, $m(T)$ и $c(T)$ могут быть уточнены на основе параметрической линеаризации модели (4).

Введем $(n+1)$ -мерные векторы $a_1 = (\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n)^T$, $a_2 = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n)^T$ и $a_3 = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n)^T$ — столбцы матрицы A .

Линеаризация по параметрам нелинейной зависимости (4) $3(n+1)$ -параметрической функции

$$\hat{t}_{k,i,j}(a_1, a_2, a_3) = \hat{t}_{k,i,j}(\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n, \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n)$$

имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{t}_{k,i,j}(a_1, a_2, a_3) \approx & \hat{t}_{k,i,j}^{(s)} + \sum_{p=0}^n \frac{\partial \hat{t}_{k,i,j}^{(s)}}{\partial \nu_p} (\nu_p - \hat{\nu}_p^{(s)}) + \\ & + \sum_{p=0}^n \frac{\partial \hat{t}_{k,i,j}^{(s)}}{\partial \mu_p} (\mu_p - \hat{\mu}_p^{(s)}) + \sum_{p=0}^n \frac{\partial \hat{t}_{k,i,j}^{(s)}}{\partial \beta_p} (\beta_p - \hat{\beta}_p^{(s)}), \quad (28) \end{aligned}$$

где $\hat{t}_{k,i,j}^{(s)} = \hat{t}_{k,i,j}(\hat{\nu}_0^{(s)}, \hat{\nu}_1^{(s)}, \dots, \hat{\nu}_n^{(s)}, \hat{\mu}_0^{(s)}, \hat{\mu}_1^{(s)}, \dots, \hat{\mu}_n^{(s)}, \hat{\beta}_0^{(s)}, \hat{\beta}_1^{(s)}, \dots, \hat{\beta}_n^{(s)})$, а частные производные вычисляются по формулам

$$\frac{\partial \hat{t}_{k,i,j}}{\partial \nu_p} = \frac{\partial \hat{t}_{k,i,j}}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial \nu_p} = T_j^p \frac{\partial \hat{t}_{k,i,j}}{\partial \alpha},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{t}_{k,i,j}}{\partial \mu_p} &= \frac{\partial \hat{t}_{k,i,j}}{\partial c} \cdot \frac{\partial c}{\partial \mu_p} = T_j^p \frac{\partial \hat{t}_{k,i,j}}{\partial c}, \\ \frac{\partial \hat{t}_{k,i,j}}{\partial \beta_p} &= \frac{\partial \hat{t}_{k,i,j}}{\partial m} \cdot \frac{\partial m}{\partial \beta_p} = T_j^p \frac{\partial \hat{t}_{k,i,j}}{\partial m}, \quad p = 0, 1, 2, \dots, n,\end{aligned}$$

где производные $\frac{\partial \hat{t}_{k,i,j}}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial \hat{t}_{k,i,j}}{\partial c}$ и $d \frac{\partial \hat{t}_{k,i,j}}{\partial m}$ описываются соотношениями (20)–(22):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{t}_{k,i,j}}{\partial \alpha} &= -\frac{\hat{t}_{k,i,j}}{\alpha_j} + \frac{p_{k,i,j} e^{-\alpha_j m_j \sigma_{0i,j} p_{k,i,j}}}{\alpha_j c_j \sigma_{0i,j}^{m_j}}, \\ \frac{\partial \hat{t}_{k,i,j}}{\partial c} &= -\frac{1 - e^{-\alpha_j m_j \sigma_{0i,j} p_{k,i,j}}}{\alpha_j m_j c_j^2 \sigma_{0i,j}^{m_j+1}} = -\frac{\hat{t}_{k,i,j}}{c_j}\end{aligned}$$

и

$$\frac{\partial \hat{t}_{k,i,j}}{\partial m} = -\frac{\hat{t}_{k,i,j}(1 + m_j \ln \sigma_{0i,j})}{m_j} + \frac{p_{k,i,j} e^{-\alpha_j m_j \sigma_{0i,j} p_{k,i,j}}}{m_j c_j \sigma_{0i,j}^{m_j}},$$

$k = \overline{0, N_{i,j}}$, $i = \overline{1, L_j}$, $j = \overline{1, M}$, $M > 1$.

С учетом линеаризации (28) и условия минимизации (критерия средне-квадратичного оценивания)

$$\|y - \hat{t}\|^2 = \|\varepsilon\|^2 = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^{L_j} \sum_{k=0}^{N_{i,j}-1} (y_{k,i,j} - \hat{t}_{k,i,j})^2 \rightarrow \min$$

сформирована линейная регрессионная модель вида (23):

$$\Delta t^{(s)} = F^{(s)} \Delta a^{(s)} + \varepsilon,$$

где $\Delta t^{(s)} = [\Delta t_1^{(s)} \quad \Delta t_2^{(s)} \quad \dots \quad \Delta t_M^{(s)}]^\top$ – блочная матрица-столбец размера

$[\sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^{L_j} N_{i,j} \times 1]$, состоящая из M блочных матриц-столбцов $\Delta t_j^{(s)} =$

$[\Delta t_{1,j}^{(s)} \quad \Delta t_{2,j}^{(s)} \quad \dots \quad \Delta t_{L_j,j}^{(s)}]^\top$ размера $[\sum_{i=1}^{L_j} N_{i,j} \times 1]$, $j = \overline{1, M}$, каждая из ко-

торых включает вектор $\Delta t_{i,j}^{(s)} = \{y_{k,i,j} - \hat{t}_{k,i,j}^{(s)}\}$, $k = 0, 1, 2, \dots, N_{i,j} - 1$, размера

$$[N_{i,j} \times 1], \quad i = \overline{1, L_j}, \quad j = \overline{1, M}; \quad F^{(s)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{t}_{k,i,j}^{(s)}}{\partial \nu_0} & \frac{\partial \hat{t}_{k,i,j}^{(s)}}{\partial \nu_1} & \dots & \frac{\partial \hat{t}_{k,i,j}^{(s)}}{\partial \nu_n} \\ \frac{\partial \hat{t}_{k,i,j}^{(s)}}{\partial \mu_0} & \frac{\partial \hat{t}_{k,i,j}^{(s)}}{\partial \mu_1} & \dots & \frac{\partial \hat{t}_{k,i,j}^{(s)}}{\partial \mu_n} \\ \frac{\partial \hat{t}_{k,i,j}^{(s)}}{\partial \beta_0} & \frac{\partial \hat{t}_{k,i,j}^{(s)}}{\partial \beta_1} & \dots & \frac{\partial \hat{t}_{k,i,j}^{(s)}}{\partial \beta_n} \end{bmatrix} \text{ – матрица}$$

регрессоров размера $[\sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^{L_j} N_{i,j} \times 3(n+1)]$, столбцы которой образуют част-

ные производные по параметрам моделей температурных зависимостей $\alpha(T)$,

$c(T)$ и $m(T)$, вычисленные в точке $y_{k,i,j}$, $k = 0, 1, \dots, N_{i,j}$, $i = \overline{1, L_j}$, $j = \overline{1, M}$, при значениях параметров $\hat{\nu}_0^{(s)}, \hat{\nu}_1^{(s)}, \dots, \hat{\nu}_n^{(s)}, \hat{\mu}_0^{(s)}, \hat{\mu}_1^{(s)}, \dots, \hat{\mu}_n^{(s)}, \hat{\beta}_0^{(s)}, \hat{\beta}_1^{(s)}, \dots, \hat{\beta}_n^{(s)}$, где $s = 0, 1, 2, 3, \dots$ — номер итерации.

Каждый из $3(n+1)$ столбцов $f_p^{(s)} = [f_{1,p}^{(s)} \quad f_{2,p}^{(s)} \quad \dots \quad f_{M,p}^{(s)}]^\top$, $p = \overline{1, 3(n+1)}$, матрицы $F^{(s)}$ включает M блоков:

$$f_{j,p}^{(s)} = [f_{1,j,p}^{(s)} \quad f_{2,j,p}^{(s)} \quad \dots \quad f_{L_j,j,p}^{(s)}]^\top, \quad j = \overline{1, M},$$

размера $[\sum_{i=1}^{L_j} N_{i,j} \times 1]$, которые, в свою очередь, содержат L_j векторов $f_{i,j,p}^{(s)}$, $i = \overline{1, L_j}$, размера $[N_{i,j} \times 1]$ вида

$$f_{i,j,p}^{(s)} = T_j^{p-1} \left\{ \frac{\partial \hat{t}_{k,i,j}^{(s)}}{\partial \alpha} \right\}, \quad p = \overline{1, n+1};$$

$$f_{i,j,p}^{(s)} = T_j^{p-1} \left\{ \frac{\partial \hat{t}_{k,i,j}^{(s)}}{\partial c} \right\}, \quad p = \overline{n+2, 2n+2};$$

$$f_{i,j,p}^{(s)} = T_j^{p-1} \left\{ \frac{\partial \hat{t}_{k,i,j}^{(s)}}{\partial m} \right\}, \quad p = \overline{2n+3, 3n+3}; \quad k = 0, 1, 2, \dots, N_{i,j};$$

$\hat{a}^{(s)} = (\hat{\nu}_0^{(s)}, \hat{\nu}_1^{(s)}, \dots, \hat{\nu}_n^{(s)}, \hat{\mu}_0^{(s)}, \hat{\mu}_1^{(s)}, \dots, \hat{\mu}_n^{(s)}, \hat{\beta}_0^{(s)}, \hat{\beta}_1^{(s)}, \dots, \hat{\beta}_n^{(s)})^\top$ — вектор промежуточных оценок параметров модели размера $[3(n+1) \times 1]$;

$$\Delta a^{(s)} = a - \hat{a}^{(s)} =$$

$$\begin{aligned} &= (\Delta \hat{\nu}_0^{(s)}, \Delta \hat{\nu}_1^{(s)}, \dots, \Delta \hat{\nu}_n^{(s)}, \Delta \hat{\mu}_0^{(s)}, \Delta \hat{\mu}_1^{(s)}, \dots, \Delta \hat{\mu}_n^{(s)}, \Delta \hat{\beta}_0^{(s)}, \Delta \hat{\beta}_1^{(s)}, \dots, \Delta \hat{\beta}_n^{(s)})^\top = \\ &= (\nu_0 - \hat{\nu}_0^{(s)}, \nu_1 - \hat{\nu}_1^{(s)}, \dots, \nu_n - \hat{\nu}_n^{(s)}, \mu_0 - \hat{\mu}_0^{(s)}, \mu_1 - \hat{\mu}_1^{(s)}, \dots, \mu_n - \hat{\mu}_n^{(s)}, \\ &\quad \beta_0 - \hat{\beta}_0^{(s)}, \beta_1 - \hat{\beta}_1^{(s)}, \dots, \beta_n - \hat{\beta}_n^{(s)})^\top \end{aligned}$$

— вектор коэффициентов, подлежащих нахождению, размера $[3(n+1) \times 1]$.

Алгоритм уточнения среднеквадратичных оценок параметров модели (4) с учетом температурных зависимостей (25) и среднеквадратичного критерия оценивания

$$\|\varepsilon\|^2 = \|\Delta t^{(s)} - F^{(s)} \Delta a^{(s)}\|^2 \rightarrow \min$$

описывается итерационной формулой (24):

$$\hat{a}^{(s+1)} = \hat{a}^{(s)} + [F^{(s)T} F^{(s)}]^{-1} F^{(s)T} \Delta t^{(s)}, \quad s = 0, 1, 2, 3, \dots$$

В качестве начального приближения вектора оценок параметров моделей (25) $\hat{a}^{(0)} = (\hat{\nu}_0^{(0)}, \hat{\nu}_1^{(0)}, \dots, \hat{\nu}_n^{(0)}, \hat{\mu}_0^{(0)}, \hat{\mu}_1^{(0)}, \dots, \hat{\mu}_n^{(0)}, \hat{\beta}_0^{(0)}, \hat{\beta}_1^{(0)}, \dots, \hat{\beta}_n^{(0)})^\top$ могут быть приняты промежуточные оценки, полученные на предыдущем шаге алгоритма. Итерационная процедура (24) уточнения среднеквадратичных оценок параметров модели (4) с учетом температурных зависимостей (25) завершается при выполнении условия $\|\Delta a^{(s+1)}\| < \delta$, где δ — некоторое наперед заданное положительное малое число.

Вопрос о целесообразности уточнения оценок моделей температурных зависимостей (25) на втором этапе предлагаемого алгоритма численного метода оценивания характеристик неизотермической ползучести решается с учетом априорной информации о величине случайной помехи в результатах наблюдений и требований к точности оценок.

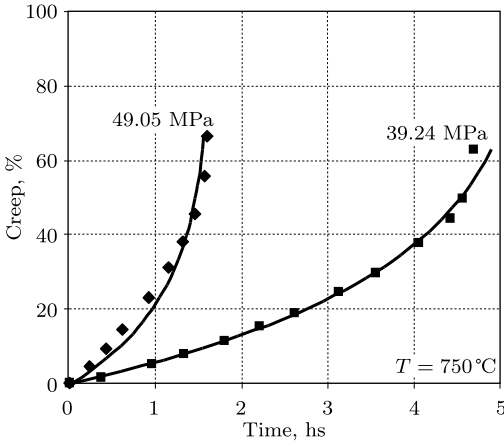
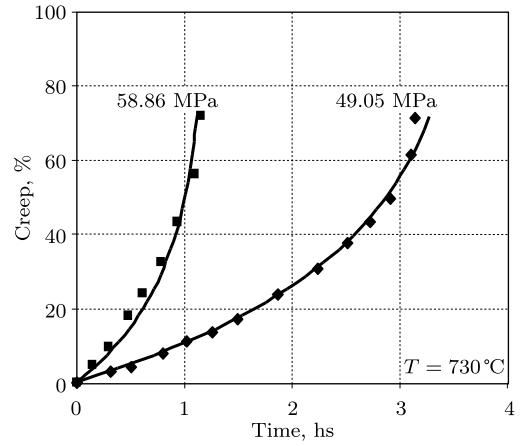
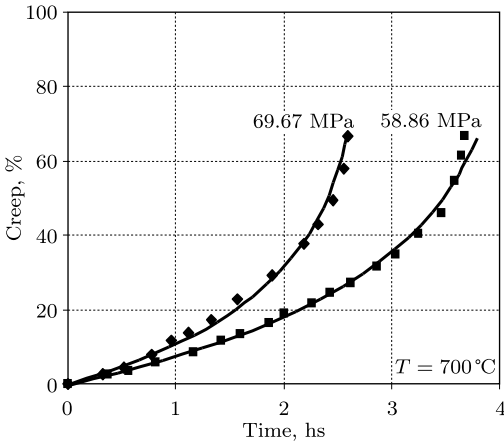
Отметим, что если не ставится промежуточная задача построения моделей изотермической ползучести для каждой из температур T_j , $j = \overline{1, M}$, в отдельности, то в ряде случаев последний шаг первого этапа — уточнение оценок $\hat{\alpha}_j$, \hat{c}_j и \hat{m}_j , $j = \overline{1, M}$, на основе итерационной процедуры (24) — может быть пропущен. А в качестве результатов расчета в формулах (26) на втором этапе могут быть использованы оценки $\hat{\alpha}_j^{(0)}$, $\hat{c}_j^{(0)}$ и $\hat{m}_j^{(0)}$, $j = \overline{1, M}$.

При степени аппроксимирующих многочленов (26) $n = M - 1$ задача вычисления среднеквадратичных оценок их коэффициентов на основе формулы (27) сводится к задаче построения интерполяционного многочлена. В этом случае оценки параметров $\alpha(T_j)$, $c(T_j)$ и $m(T_j)$ в модели (3), описывающей неизотермическую деформацию ползучести при температурах T_j , $j = \overline{1, M}$, будут совпадать с результатами расчетов $\hat{\alpha}_j$, \hat{c}_j и \hat{m}_j , $j = \overline{1, M}$, полученными на первом этапе алгоритма. Так как на последнем шаге первого этапа на основе итерационной процедуры уточнения этих оценок обеспечивается минимум суммы квадратов отклонений модели от данных эксперимента, то очевидно, что оценки коэффициентов в моделях температурных зависимостей (26), найденные по формуле (27), будут оптимальными, и их уточнения на основе итерационной процедуры не требуется. Применение последнего шага второго этапа алгоритма — итерационной процедуры уточнения оценок коэффициентов температурных зависимостей параметров модели (3) — при $n = M - 1$ имеет смысл только в том случае, когда не используется итерационная процедура уточнения результатов расчета параметров $\hat{\alpha}_j$, \hat{c}_j и \hat{m}_j , $j = \overline{1, M}$, на последнем шаге первого этапа.

5. Апробация численного метода оценки параметров третьей стадии неизотермической ползучести по результатам эксперимента. Разработанный численный метод оценки характеристик третьей стадии неизотермической ползучести прошел апробацию при обработке результатов эксперимента, представленных в виде диаграмм испытаний на ползучесть для сплава 09Г2С [27]. На рисунке точками представлены результаты испытаний, проведенных при $M = 3$ температурах: $T_1 = 700^\circ\text{C}$, $T_2 = 730^\circ\text{C}$ и $T_3 = 750^\circ\text{C}$ и $L_1 = L_2 = L_3 = 2$ напряжениях: $\sigma_{01,1} = 69.67$ МПа, $\sigma_{02,1} = \sigma_{01,2} = 58.86$ МПа, $\sigma_{02,2} = \sigma_{01,3} = 49.05$ МПа и $\sigma_{02,3} = 39.24$ МПа.

В результате предварительной обработки диаграмм испытаний, параметры которых приведены в табл. 1, где $N_{i,j}^e$ — объем первоначальной выборки, были сформированы выборки результатов эксперимента $y_{k,i,j}$, $k = 0, 1, \dots, 20$, одинакового объема $N_{i,j} = 21$, $i = \overline{1, 2}$, $j = \overline{1, 3}$, и с шагом равномерной дискретизации $h_{i,j}$, % кривой ползучести $p_{i,j}$, %, $i = \overline{1, 2}$, $j = \overline{1, 3}$.

В соответствии с описанным выше алгоритмом на первом шаге на основе итерационной процедуры (10) находились оценки коэффициентов обобщенной регрессионной модели (9) $\hat{\lambda}_{1i,j}$ и $\hat{\lambda}_{2i,j}$, а затем на их основе по формулам (11) вычислялись оценки $\hat{u}_{i,j}$ и $\hat{v}_{i,j}$, $i = \overline{1, 2}$, $j = \overline{1, 3}$, параметров модели (5) для каждой отдельной кривой ползучести (см. табл. 2).



Результаты эксперимента [27] (точки) и кривые ползучести сплава 09Г2С при различных температурах

[Experimental results [27] (points) and creep curves for the 09G2C alloy at different temperatures]

Таблица 1

Исходные данные для построения математической модели на основе результатов эксперимента [Initial data for the mathematical model construction based on the experimental results]

| | i | j | | |
|-----------------------------|-----|-------|-------|-------|
| | | 1 | 2 | 3 |
| $T_j, ^\circ\text{C}$ | — | 700 | 730 | 750 |
| $\sigma_{0i,j}, \text{MPa}$ | 1 | 69.67 | 58.86 | 49.05 |
| | 2 | 58.86 | 49.05 | 39.24 |
| $N_{i,j}^e$ | 1 | 14 | 9 | 10 |
| | 2 | 19 | 14 | 13 |
| $N_{i,j}$ | 1 | 21 | 21 | 21 |
| | 2 | 21 | 21 | 21 |
| $h_{i,j}, \%$ | 1 | 3.33 | 3.59 | 3.32 |
| | 2 | 3.33 | 3.57 | 3.15 |

Таблица 2

Результаты промежуточных расчетов параметров по каждой кривой ползучести (первый шаг первого этапа алгоритма) [Results of intermediate calculations of parameters for each creep curve (the first step of the first stage of the algorithm)]

| | <i>i</i> | <i>j</i> | | |
|-----------------------------|----------|----------------------|----------------------|----------------------|
| | | 1 | 2 | 3 |
| $T_j, ^\circ\text{C}$ | — | 700 | 730 | 750 |
| $\sigma_{0i,j}, \text{MPa}$ | 1 | 69.67 | 58.86 | 49.05 |
| | 2 | 58.86 | 49.05 | 39.24 |
| $\hat{\lambda}_{1i,j}$ | 1 | 0.887 | 0.922 | 0.912 |
| | 2 | 0.881 | 0.894 | 0.893 |
| $\hat{\lambda}_{2i,j}$ | 1 | 0.329 | 0.116 | 0.173 |
| | 2 | 0.487 | 0.384 | 0.579 |
| $\hat{u}_{i,j}$ | 1 | $5.14 \cdot 10^{-4}$ | $3.82 \cdot 10^{-4}$ | $5.63 \cdot 10^{-4}$ |
| | 2 | $6.44 \cdot 10^{-4}$ | $6.41 \cdot 10^{-4}$ | $9.13 \cdot 10^{-4}$ |
| $\hat{v}_{i,j}$ | 1 | 9.557 | 29.862 | 18.304 |
| | 2 | 6.436 | 8.789 | 5.140 |
| $s_{i,j}, \%$ | 1 | 1.7 | 1.7 | 2.3 |
| | 2 | 1.7 | 1.5 | 1.7 |

В последней строке табл. 2 представлены оценки адекватности построенных моделей экспериментальным данным в форме их среднеквадратичных отклонений от результатов наблюдений в относительных единицах:

$$s_{i,j}, \% = \frac{\|y - \hat{t}\|}{\|y\|} \cdot 100\% = \sqrt{\frac{\sum_{k=0}^{20} (y_{k,i,j} - \hat{t}_{k,i,j})^2}{\sum_{k=0}^{20} y_{k,i,j}^2}} \cdot 100\%.$$

В табл. 3 приведены результаты вычислений оценок параметров моделей деформации ползучести, описывающих совокупности диаграмм при различных напряжениях $\sigma_{0i,j}$ для каждой из температур $T_j, j = \overline{1, 3}$.

В третьем, четвертом и пятом столбцах табл. 3 приведены значения предварительных оценок параметров $\hat{\alpha}_j^{(0)}, \hat{c}_j^{(0)}$ и $\hat{m}_j^{(0)}, j = \overline{1, 3}$, полученные на основе формул (15)–(17). А в столбцах седьмом, восьмом и девятом этой же таблицы — оценки параметров $\hat{\alpha}_j, \hat{c}_j$ и \hat{m}_j , уточненные на основе итерационной процедуры (24) и минимизирующие среднеквадратичное отклонение

Таблица 3

Оценки параметров моделей третьей стадии ползучести при различных температурах (второй и третий шаги первого этапа алгоритма) [Estimates of the model parameters for the third creep stage at different temperatures (the second and third steps of the first stage of the algorithm)]

| <i>j</i> | $T_j, ^\circ\text{C}$ | $\hat{\alpha}_j^{(0)}$ | $\hat{c}_j^{(0)}$ | $\hat{m}_j^{(0)}$ | $s_j^{(0)}, \%$ | $\hat{\alpha}_j$ | \hat{c}_j | \hat{m}_j | $s_j, \%$ |
|----------|-----------------------|------------------------|-----------------------|-------------------|-----------------|----------------------|----------------------|-------------|-----------|
| 1 | 700 | $2.47 \cdot 10^{-4}$ | $4.56 \cdot 10^{-4}$ | 2.345 | 7.0 | $3.88 \cdot 10^{-4}$ | $1.28 \cdot 10^{-2}$ | 1.537 | 2.4 |
| 2 | 730 | $7.62 \cdot 10^{-5}$ | $4.01 \cdot 10^{-11}$ | 6.708 | 13.3 | $1.16 \cdot 10^{-4}$ | $1.48 \cdot 10^{-8}$ | 5.197 | 2.7 |
| 3 | 750 | $1.30 \cdot 10^{-4}$ | $4.36 \cdot 10^{-9}$ | 5.692 | 12.7 | $1.93 \cdot 10^{-4}$ | $3.96 \cdot 10^{-7}$ | 4.472 | 2.8 |

моделей от результатов эксперимента по каждой совокупности T_j , $j = \overline{1, 3}$, диаграмм ползучести. Полученные на данном шаге алгоритма результаты могут быть использованы при построении математических моделей (2) третьей стадии изотермической ползучести для известной температуры T_j , $j = \overline{1, 3}$:

$$p(t, \sigma_{0i}) = -\frac{1}{5.964 \cdot 10^{-4} \sigma_{0i}} \ln(1 - 7.633 \cdot 10^{-6} \sigma_{0i}^{2.537} t) \text{ для } T = 700^\circ\text{C}; \quad (29)$$

$$p(t, \sigma_{0i}) = -\frac{1}{6.029 \cdot 10^{-4} \sigma_{0i}} \ln(1 - 8.922 \cdot 10^{-12} \sigma_{0i}^{6.197} t) \text{ для } T = 730^\circ\text{C}; \quad (30)$$

$$p(t, \sigma_{0i}) = -\frac{1}{8.631 \cdot 10^{-4} \sigma_{0i}} \ln(1 - 34.18 \cdot 10^{-11} \sigma_{0i}^{5.472} t) \text{ для } T = 750^\circ\text{C}. \quad (31)$$

В шестом и последнем столбцах табл. 3 приведены оценки адекватности построенных моделей в форме их среднеквадратичных отклонений от результатов наблюдений в относительных единицах:

$$s_j, \% = \sqrt{\sum_{i=1}^2 \sum_{k=0}^{20} (y_{k,i,j} - \hat{t}_{k,i,j})^2 / \sum_{i=1}^2 \sum_{k=0}^{20} y_{k,i,j}^2} \cdot 100 \%$$

В шестом столбце табл. 3 оценки адекватности соответствуют моделям, параметры которых $\hat{\alpha}_j^{(0)}$, $\hat{c}_j^{(0)}$ и $\hat{m}_j^{(0)}$, $j = \overline{1, 3}$, получены на основе формул (15)–(17). В последнем столбце этой же таблицы приведены оценки адекватности моделей, построенных на основе итерационной процедуры (24) уточнения оценок параметров $\hat{\alpha}_j$, \hat{c}_j и \hat{m}_j , минимизирующих величину $s_j, \%$, $j = \overline{1, 3}$. Очевидно, что применение итерационной процедуры уточнения оценок параметров модели изотермической ползучести (2) позволило существенно повысить адекватность построенных моделей (29)–(31) результатам испытаний.

При апробации разработанного численного метода на втором этапе алгоритма в качестве математических моделей, описывающих температурные зависимости $\alpha(T)$, $c(T)$ и $m(T)$ параметров математической модели неизо-термической деформации ползучести (3), с учетом соотношения $n \leq M - 1$ были выбраны алгебраические многочлены второй степени $n = 2$:

$$\alpha(T) = \nu_0 + \nu_1 T + \nu_2 T^2, \quad c(T) = \mu_0 + \mu_1 T + \mu_2 T^2, \quad m(T) = \beta_0 + \beta_1 T + \beta_2 T^2. \quad (32)$$

Предварительная оценка параметров моделей температурных зависимостей (32) на основе результатов расчета $\hat{\alpha}_j$, \hat{c}_j и \hat{m}_j , $j = \overline{1, M}$, полученных на первом этапе, выполнялась на основе формулы (27):

$$\hat{A} = (F^\top F)^{-1} F^\top B,$$

в которой матрицы F и B имеют вид

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 700 & 490000 \\ 1 & 730 & 532900 \\ 1 & 750 & 562500 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3.88 \cdot 10^{-4} & 1.28 \cdot 10^{-2} & 1.537 \\ 1.16 \cdot 10^{-4} & 1.48 \cdot 10^{-8} & 5.197 \\ 1.93 \cdot 10^{-4} & 3.96 \cdot 10^{-7} & 4.472 \end{bmatrix}.$$

Отсюда получаем

$$F^T F = \begin{bmatrix} 3 & 2.18 \cdot 10^3 & 1.59 \cdot 10^6 \\ 2.18 \cdot 10^3 & 1.59 \cdot 10^6 & 1.15 \cdot 10^9 \\ 1.59 \cdot 10^6 & 1.15 \cdot 10^9 & 8.40 \cdot 10^{11} \end{bmatrix},$$

$$F^T B = \begin{bmatrix} 6.98 \cdot 10^{-4} & 0.0128 & 11.21 \\ 0.501 & 8.991 & 8223.6 \\ 360.83 & 6293.8 & 6.04 \cdot 10^6 \end{bmatrix},$$

$$(F^T F)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.16 \cdot 10^6 & -3.21 \cdot 10^3 & 2.213 \\ -3.21 \cdot 10^3 & 8.859 & -6.12 \cdot 10^{-3} \\ 2.213 & -6.12 \cdot 10^{-3} & 4.22 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix},$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0.139 & 4.688 & -1701.7 \\ -3.78 \cdot 10^{-4} & -1.27 \cdot 10^{-2} & 4.649 \\ 2.58 \cdot 10^{-7} & 8.56 \cdot 10^{-6} & -3.17 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}.$$

Полученные на основе результатов расчетов $\hat{\alpha}_j$, \hat{c}_j и \hat{m}_j , $j = \overline{1, 3}$, представленных в табл. 3, предварительные оценки параметров моделей температурных зависимостей (32) приведены во второй строке табл. 4.

Таблица 4

Оценки параметров моделей температурных зависимостей характеристик неизоотермической ползучести (второй и третий шаги второго этапа алгоритма) [Estimates of the model parameters for the temperature dependence of the non-isothermal creep characteristics (the second and third steps of the second stage of the algorithm)]

| | $\hat{\nu}_0$ | $\hat{\nu}_1 \cdot 10^4$ | $\hat{\nu}_2 \cdot 10^7$ | $\hat{\mu}_0$ | $\hat{\mu}_1 \cdot 10^2$ | $\hat{\mu}_2 \cdot 10^6$ | $\hat{\beta}_0$ | $\hat{\beta}_1$ | $\hat{\beta}_2 \cdot 10^3$ | s, % |
|-----------------------|---------------|--------------------------|--------------------------|---------------|--------------------------|--------------------------|-----------------|-----------------|----------------------------|------|
| Preliminary estimates | 0.139 | -3.78 | 2.58 | 4.69 | -1.27 | 8.56 | -1701.7 | 4.65 | -3.17 | 2.93 |
| Revised estimates | 0.141 | -3.86 | 2.63 | 4.69 | -1.27 | 8.56 | -1752.1 | 4.79 | -3.26 | 2.89 |

Уточнение этих оценок проводилось на основе параметрической линейризации (28) нелинейной зависимости (4), моделей (32) и результатов испытаний ($t_{k,i,j}, p_{k,i,j}$), $k = 0, 1, 2, \dots, N_{i,j}^e$, $i = 1, 2$, $j = \overline{1, 3}$. Уточненные оценки параметров моделей температурных зависимостей (32) приведены в третьей строке табл. 4. В последнем столбце табл. 4 приведены оценки адекватности построенных моделей экспериментальным данным в относительных единицах. Очевидно, что уточнение среднеквадратичных оценок параметров температурных зависимостей практически не повлияло на адекватность модели неизоотермической ползучести результатам испытаний в форме диаграмм ползучести.

Таким образом, математическая модель третьей стадии неизоотермической ползучести, построенная на основе результатов эксперимента, представленных в виде диаграмм испытаний на ползучесть для сплава 09Г2С, имеет вид (3):

$$p(t, \sigma_0, T) = -\frac{1}{\sigma_0 m(T) \alpha(T)} \ln[1 - \alpha(T) m(T) c(T) \sigma_0^{m(T)+1} t], \quad (33)$$

где

$$\alpha(T) = 0.141 - 3.86 \cdot 10^{-4} \cdot T + 2.63 \cdot 10^{-7} \cdot T^2, \quad (34)$$

$$c(T) = 4.69 - 1.27 \cdot 10^{-2} \cdot T + 8.56 \cdot 10^{-6} \cdot T^2, \quad (35)$$

$$m(T) = -1752.1 + 4.79 \cdot T - 3.26 \cdot 10^{-3} \cdot T^2. \quad (36)$$

Кривые ползучести, построенные по модели (33) с учетом температурных зависимостей (34)–(36) при температурах $T_1 = 700^\circ\text{C}$, $T_2 = 730^\circ\text{C}$, $T_3 = 750^\circ\text{C}$ и напряжениях $\sigma_{01,1} = 69.67$ МПа, $\sigma_{02,1} = 58.86$ МПа, $\sigma_{01,2} = 58.86$ МПа, $\sigma_{02,2} = \sigma_{01,3} = 49.05$ МПа, $\sigma_{02,3} = 39.24$ МПа, приведены на рисунке.

Заключение. Разработан численный метод оценивания характеристик третьей стадии неизотермической ползучести по совокупности диаграмм ползучести, построенных при обработке результатов испытаний для различных значений номинального напряжения и температур. В основе метода лежат нелинейные регрессионные модели, среднеквадратичные оценки параметров которых находятся посредством линеаризации, в том числе на основе разностных уравнений, описывающих результаты наблюдений. Предлагаемый численный метод может быть также использован для оценки параметров третьей стадии деформации ползучести, когда результаты эксперимента в форме совокупности диаграмм испытаний представлены только для одной температуры. Результаты апробации численного метода при обработке результатов эксперимента в форме диаграмм ползучести сплава 09Г2С при температурах 700, 730 и 750 °С подтвердили достоверность полученных соотношений и выводов, а также высокую эффективность нового численного метода в задачах оценивания параметров моделей третьей стадии неизотермической ползучести.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00550_a).

Библиографический список

1. Работнов Ю. Н. *Избранные труды. Проблемы механики деформируемого тела*. М.: Наука, 1991. 196 с.
2. Работнов Ю. Н. *Ползучесть элементов конструкций*. М.: Наука, 1966. 752 с.
3. Малинин Н. Н. *Прикладная теория пластичности и ползучести*. М.: Машиностроение, 1975. 400 с.
4. Малинин Н. Н. *Расчеты на ползучесть элементов машиностроительных конструкций*. М.: Машиностроение, 1981. 220 с.
5. Локощенко А. М. *Ползучесть и длительная прочность металлов*. М.: Физматлит, 2016. 504 с.
6. Бойцов Ю. И., Данилов В. Л., Локощенко А. М., Шестериков С. А. *Исследование ползучести металлов при растяжении*. М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1997. 98 с.
7. Соснин О. В., Горев Б. В., Никитенко А. Ф. *Энергетический вариант теории ползучести*. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО РАН СССР, 1986. 95 с.
8. Соснин О. В., Любашевская И. В., Новоселя И. В. Сравнительные оценки высокотемпературной ползучести и разрушения конструкционных материалов // *ПМТФ*, 2008. № 2. С. 123–130.
9. Самарин Ю. П., Клебанов Я. М. *Обобщенные модели в теории ползучести конструкций*. Самара: СамГТУ, 1994. 196 с.

10. Самарин Ю. П. Построение экспоненциальных аппроксимаций для кривых ползучести методом последовательного выделения экспоненциальных слагаемых // *Проблемы прочности*, 1974. №9. С. 24–27.
11. Радченко В. П. Математическая модель неупругого деформирования и разрушения металлов при ползучести энергетического типа // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 1996. №4. С. 43–63. <https://doi.org/10.14498/vsgtu237>.
12. Радченко В. П., Еремин Ю. А. *Реологическое деформирование и разрушение материалов и элементов конструкций*. М.: Машиностроение-1, 2004. 264 с.
13. Радченко В. П., Симонов А. В. Разработка автоматизированной системы построения моделей неупругого деформирования металлов на основе методов непараметрического выравнивания экспериментальных данных // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 1999. №7. С. 51–62. <https://doi.org/10.14498/vsgtu208>.
14. Катанаха Н. А., Семенов А. С., Гецов Л. Б. Единая модель долгосрочной и краткосрочной ползучести и идентификация ее параметров // *Проблемы прочности*, 2013. №4. С. 143–157.
15. Bellenger E., Bussy P. Phenomenological modeling and numerical simulation of different modes of creep damage evolution // *Int. J. Solids Struct.*, 2001. vol. 38, no. 4. pp. 577–604. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(00\)00042-1](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(00)00042-1).
16. Besseling J. F. Plasticity and creep theory in engineering mechanics / *Topics in Applied Continuum Mechanics*. Vienna: Springer, 1974. pp. 115–135. https://doi.org/10.1007/978-3-7091-4188-5_6.
17. Benedetti M., Fontanari V., Scandi P., Ricardo C.L.A., Bandini M. Reverse bending fatigue of shot peened 7075-T651 aluminium alloy: The role of residual stress relaxation // *Int. J. Fatigue*, 2009. vol. 31, no. 8–9. pp. 1225–1236. <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2008.11.017>.
18. Draper N. R., Smith H. *Applied Regression Analysis* / Wiley Series in Probability and Statistics. New York: John Wiley and Sons, 1998. xix+716 pp. <https://doi.org/10.1002/9781118625590>.
19. Демиденко Е. З. *Линейная и нелинейная регрессии*. М.: Финансы и статистика, 1981. 302 с. [Demidenko E. Z. *Lineinaia i nelineinaia regressii* [Linear and Nonlinear Regressions]. Moscow: Finance and Statistics, 1981. 302 pp. (In Russian)]
20. Зотеев В. Е., Макаров Р. Ю. Численный метод определения параметров модели ползучести разупрочняющегося материала // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2016. Т. 20, № 2. С. 328–341. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1488>.
21. Зотеев В. Е., Макаров Р. Ю. Численный метод оценки параметров деформации ползучести при степенной зависимости параметра разупрочнения от напряжения // *Современные технологии. Системный анализ. Моделирование*, 2016. №3 (51). С. 18–25.
22. Грановский В. А., Сирая Т. Н. *Методы обработки экспериментальных данных при измерениях*. Л.: Энергоатомиздат, 1990. 288 с.
23. Себер Дж. *Линейный регрессионный анализ*. М.: Мир, 1980. 456 с.
24. Вучков И., Бояджиева Л., Солаков О. *Прикладной линейный регрессионный анализ*. М.: Финансы и статистика, 1987. 238 с.
25. Зотеев В. Е. *Параметрическая идентификация диссипативных механических систем на основе разностных уравнений*. М.: Машиностроение, 2009. 344 с.
26. Зотеев В. Е. Численный метод нелинейного оценивания на основе разностных уравнений // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2018. Т. 22, №4. С. 669–701. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1643>.
27. Бойко С. В. *Моделирование формообразования элементов конструкций в условиях нестационарной ползучести*. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск: Ин-т гидродинамики им. М. А. Лаврентьева, 2020. 133 с.

MSC: 74C10

Mathematical modeling and numerical method for estimating the characteristics of non-isothermal creep based on the experimental data

© V. E. Zoteev

Samara State Technical University,

244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

The desire to reduce the mass of machines and structures while improving their quality, as well as to make the most complete use of the mechanical properties of materials, requires permanent improvement and development of known methods for calculating and analyzing the stress-strain state of materials under creep conditions.

The article proposes a numerical method for estimating the characteristics of the third stage of non-isothermal creep based on a set of creep diagrams constructed when processing test results for various values of nominal stress and temperature.

The method is based on the nonlinear regression model, the root-mean-square estimates of the parameters of which are found by linearization, including on the basis of difference equations describing the experimental results. The proposed numerical method can also be used to estimate the parameters of the third creep stage, when the experimental results are presented in the form of a set of test diagrams for only one temperature.


The results of testing the developed numerical method for processing the experimental results in the form of creep diagrams for the 09G2C alloy at different temperatures are presented. The reliability and efficiency of the calculation algorithms and methods of nonlinear estimation presented in the work are confirmed by the results of numerical and analytical studies and mathematical models of the third stage of non-isothermal creep constructed on the basis of experimental data.

Keywords: stress-strain state of the material, non-isothermal creep, test diagrams, nonlinear regression model, difference equations, root-mean-square parameter estimates.

Received: 24th June, 2021 / Revised: 7th September, 2021 /

Accepted: 20th September, 2021 / First online: 30th September, 2021

Research Article

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Zoteev V. E. Mathematical modeling and numerical method for estimating the characteristics of non-isothermal creep based on the experimental data, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 3, pp. 531–555. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1871> (In Russian).

Author's Details:

Vladimir E. Zoteev  <https://orcid.org/0000-0001-7114-4894>

Dr. Tech. Sci.; Professor; Dept. of Applied Mathematics and Computer Science;

e-mail: zoteev-ve@mail.ru

Competing interests. I have no competing interests.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submit the final manuscript to print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 19-01-00550_a).

References

1. Rabotnov Yu. N. *Izbrannye trudy. Problemy mekhaniki deformiruемого tela* [Selected Papers. Problems of the Mechanics of a Deformable Rigid Body]. Moscow, Nauka, 1991, 196 pp. (In Russian)
2. Rabotnov Yu. N. *Creep problems in structural members*. Amsterdam, London, North-Holland Publ. Co., 1969, xiv+822 pp.
3. Malinin N. N. *Prikladnaia teoriia plastichnosti i polzuchesti* [Applied Theory of Plasticity and Creep]. Moscow, Mashinostroenie, 1975, 400 pp. (In Russian)
4. Malinin N. N. *Raschety na polzuchest' elementov mashinostroitel'nykh konstruksii* [Creep Calculations of Mechanical Engineering Structure Elements]. Moscow, Mashinostroenie, 1981, 220 pp. (In Russian)
5. Lokoshchenko A. M. *Polzuchest' i dlitel'naia prochnost' metallov* [Creep and Long-Term Strength of Metals]. Moscow, Fizmatlit, 2016, 504 pp. (In Russian)
6. Boytsov Yu. I., Danilov V. L., Lokoshchenko A. M., Shesterikov S. A. *Issledovanie polzuchesti metallov pri rastiazhenii* [Study of Tensile Creep of Metals]. Moscow, Bauman Moscow State Technical Univ., 1997, 98 pp. (In Russian)
7. Sosnin O. V., Gorev B. V., Nikitenko A. F. *Energeticheskii variant teorii polzuchesti* [Energy Variant of Creep Theory]. Novosibirsk, Inst. of Hydrodynamics, USSR Acad. of Sci., 1986, 95 pp. (In Russian)
8. Sosnin O. V., Lyubashevskaya I. V., Novoselya I. V. Comparative estimation of high-temperature creep and rupture of structural materials, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2008, vol. 49, no. 2, pp. 261–266. <https://doi.org/10.1007/s10808-008-0036-0>.
9. Samarin Yu. P., Klebanov Ya. M. *Obobshchennye modeli v teorii polzuchesti konstruksii* [Generalized Models in the Theory of Creep of Structures]. Samara, Samara State Techn. Univ., 1994, 196 pp. (In Russian)
10. Samarin Yu. P. Derivation of exponential approximations for creep curves by the method of successive isolation of exponential terms, *Strength Mater.*, 1974, vol. 6, no. 9, pp. 1062–1066. <https://doi.org/10.1007/BF01528264>.
11. Radchenko V. P. The mathematical model of inelastic deformation and failure of the metals by energy-type creep, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 1996, no. 4, pp. 43–63 (In Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu237>.
12. Radchenko V. P., Eremin Yu. A. *Reologicheskoe deformirovanie i razrushenie materialov i elementov konstruksii* [Rheological Deformation and Fracture of Materials and Structural Elements]. Moscow, Mashinostroenie-1, 2004, 264 pp. (In Russian)
13. Radchenko V. P., Simonov A. V. Development of an automated system for building models of inelastic deformation of metals on the basis of nonparametric alignment method of experimental data, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 1999, no. 7, pp. 51–62 (In Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu208>.
14. Katanakha N. A., Semenov A. S., Getsov L. B. Unified model of steady-state and transient creep and identification of its parameters, *Strength Mater.*, 2013, vol. 45, no. 4, pp. 495–505. <https://doi.org/10.1007/s11223-013-9485-7>.
15. Bellenger E., Bussy P. Phenomenological modeling and numerical simulation of different modes of creep damage evolution, *Int. J. Solids Struct.*, 2001, vol. 38, no. 4, pp. 577–604. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(00\)00042-1](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(00)00042-1).

16. Besseling J. F. Plasticity and creep theory in engineering mechanics, In: *Topics in Applied Continuum Mechanics*. Vienna, Springer, 1974, pp. 115–135. https://doi.org/10.1007/978-3-7091-4188-5_6.
17. Benedetti M., Fontanari V., Scandi P., Ricardo C.L.A., Bandini M. Reverse bending fatigue of shot peened 7075-T651 aluminium alloy: The role of residual stress relaxation, *Int. J. Fatigue*, 2009, vol. 31, no. 8–9, pp. 1225–1236. <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2008.11.017>.
18. Draper N. R., Smith H. Applied Regression Analysis, Wiley Series in Probability and Statistics. New York, John Wiley and Sons, 1998, xix+716 pp. <https://doi.org/10.1002/9781118625590>.
19. Demidenko E. Z. *Lineinaia i nelineinaia regressii* [Linear and Nonlinear Regressions]. Moscow, Finance and Statistics, 1981, 302 pp. (In Russian)
20. Zoteev V. E., Makarov R. Yu. A numerical method for the determination of parameters of the strain softening creep model, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2016, vol. 20, no. 2, pp. 328–341 (In Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1488>.
21. Zoteev V. E., Makarov R. Yu. Numerical method of estimation of parameters of deformation of creep in the exponential dependency of parameter of weakening from the strain, *Sovremennye tekhnologii. Sistemnyi analiz. Modelirovanie*, 2016, no. 3 (51), pp. 18–25 (In Russian).
22. Granovskii V. A., Siraya T. N. *Metody obrabotki eksperimental'nykh dannykh pri izmereniiakh* [Methods of Processing Experimental Data in Measurements]. Leningrad, Energoatomizdat, 1990, 288 pp. (In Russian)
23. Seber G. A. F., Lee A. J. *Linear Regression Analysis*, Wiley Series in Probability and Statistics. Hoboken, NJ, Wiley, 2003, xvi+565 pp. <https://doi.org/10.1002/9780471722199>.
24. Vuchkov I., Boyadzhieva L., Solakov O. *Prikladnoi lineinyi regressionnyi analiz* [Applied Linear Regression Analysis]. Moscow, Finance and Statistics, 1987, 238 pp. (In Russian)
25. Zoteev V. E. *Parametricheskaia identifikatsiia dissipativnykh mekhanicheskikh sistem na osnove raznostnykh uravnenii* [Parametric Identification of Dissipative Mechanical Systems Based on Difference Equations]. Moscow, Mashinostroenie, 2009, 344 pp. (In Russian)
26. Zoteev V. E. A numerical method of nonlinear estimation based on difference equations, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 4, pp. 669–701 (In Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1643>.
27. Boyko S. V. *Modeling the shaping of structural elements in nonstationary creep conditions*, Thesis of Dissertation (Cand. Phys. & Math. Sci.). Novosibirsk, Lavrentiev Inst. of Hydrodynamics, 2020, 133 pp. (In Russian)