



УДК 539.421

Моделирование процесса равновесного роста трещины в композитном образце с позиций механики закритического деформирования

В. Э. Вильдеман, А. И. Мугатаров

Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
Россия, 614990, Пермь, Комсомольский проспект, 29.

Аннотация

Обеспечение прочностной надежности и безопасности конструкций требует изучения вопросов возникновения и равновесного роста трещин. Существует аналогия между подходами механики распространения трещин и феноменологической механики разрушения, строящейся на основе использования полных диаграмм деформирования. Для описания процессов деформирования тел с трещинами целесообразно использовать разработанные ранее модели механики закритического деформирования, позволяющие описывать равновесные процессы накопления повреждений, сопровождающиеся разупрочнением. В работе на примере численного, с использованием когезионных элементов, моделирования межслойного разрушения композитного образца продемонстрирована реализация полной диаграммы деформирования материала вблизи вершины трещины. Построены расчетные диаграммы нагружения, на которых отображены точки появления зоны закритического деформирования и начала роста трещины. Выявлена связь между модулем спада материала и максимальными значениями расчетной нагрузки, раскрытия и длины пророщенной трещины. Отмечено влияние жесткости нагружающей системы. Сделан вывод о целесообразности рассмотрения задач моделирования процессов деформирования и разрушения конструкций с применением когезионных элементов с позиций механики закритического деформирования.

Ключевые слова: закритическое деформирование, когезионный элемент, композит, равновесный рост трещины.

Научная статья

© Коллектив авторов, 2022

© СамГТУ, 2022 (составление, дизайн, макет)

  Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International \(https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru)

Образец для цитирования

Вильдеман В. Э., Мугатаров А. И. Моделирование процесса равновесного роста трещины в композитном образце с позиций механики закритического деформирования // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 1. С. 48–61. EDN: DWDLIJ. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1886>.

Сведения об авторах

Валерий Эрвинович Вильдеман  <https://orcid.org/0000-0002-6240-4022>

доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой; каф. экспериментальной механики и конструкционного материаловедения; e-mail: wildemann@pstu.ru

Артур Ильдарович Мугатаров   <https://orcid.org/0000-0002-2229-8181>

магистрант; каф. экспериментальной механики и конструкционного материаловедения; e-mail: cem_mugatarov@mail.ru

Получение: 30 сентября 2021 г. / Исправление: 12 января 2022 г. /
 Принятие: 24 января 2022 г. / Публикация онлайн: 31 марта 2022 г.

Введение. Прогнозирование процессов разрушения, оценка живучести и безопасности конструкций требуют изучения вопросов возникновения и развития трещин и трещиноподобных дефектов в процессе нагружения или эксплуатации. Особого внимания заслуживает анализ условий, при которых реализуется равновесное развитие и распространение трещин. Связь вида ниспадающих участков диаграммы нагружения с микромеханизмами и стадиями разрушения предопределяет наличие определенной аналогии и общности между подходами механики распространения трещин и феноменологической механики разрушения, строящейся на основе использования полных диаграмм деформирования. Представляется целесообразным и перспективным применение для моделирования равновесного роста трещин в твердых телах основных положений механики закритического деформирования [1, 2], основанной на концепции рассмотрения разрушения как результата потери устойчивости сопровождаемого развитием дефектов процесса закритической деформации. Оценка устойчивости этого процесса осуществляется с учетом жесткостных свойств нагружающих систем.

С точки зрения рассмотрения отмеченной аналогии можно обратить внимание на следующую особенность. При анализе тел с трещинами рассматриваются докритические диаграммы разрушения, представляющие собой зависимости между средним растягивающим напряжением в неповрежденном сечении образца от длины трещины при различных начальных длинах последней [3]. Геометрическое место критических (соответствующих динамическому росту трещин) точек на этих кривых называется критической диаграммой разрушения. При испытаниях гладких образцов критическая точка соответствует пределу прочности. Поведение материала может быть описано без явного рассмотрения трещин и разрывов с использованием ниспадающей ветви диаграммы деформирования. Она также представляет собой критическую диаграмму, поскольку является геометрическим местом критических точек (соответствующих достижению предела прочности) для образцов с различной степенью поврежденности, получаемых в результате равновесного деформирования до той или иной степени. Поведение тел с трещинами в условиях снижения нагрузки при увеличивающихся перемещениях (величин раскрытия или длины трещины) может рассматриваться по аналогии с закономерностями закритического поведения образцов материалов в испытаниях. Так, в работе [4] приведена диаграмма кинематического нагружения образца с трещиной в координатах «раскрытие трещины – нагрузка»; зависимость аналогична полной диаграмме деформирования материала.

Для определения условий разрушения твердых тел крайне важными являются представления о физических процессах в окрестности вершины трещины и соответствующие модели механического поведения. С. Д. Волковым высказана идея, что характер распределения напряжений у вершины трещины в принципе повторяет ниспадающий участок кривой на полной диаграмме деформирования материала, полученной при испытании гладкого образца. В работе [5] приведена эпюра напряжений у вершины трещины с учетом за-

критической стадии деформирования материала. Полные диаграммы деформирования, содержащие ниспадающую ветвь, обнаружены экспериментально и отражают закон изменения деформационных характеристик материала (деформационного разупрочнения) при накоплении повреждений. В связи с этим естественным является предположение, что подобный характер деформирования воспроизводится в зоне концентрации напряжений у вершины трещины. Проблема сингулярности при этом решается автоматически вследствие убывания до нуля сопротивления материала в вершине трещины, где деформация максимальна и равна предельной для полностью равновесного состояния. Жесткость нагружающей системы для элемента материала у вершины трещины может быть конечной и достаточной для устойчивой за критической деформации в этой зоне, чем и объясняется возможность существования равновесных трещин. Характер развития трещины (устойчивый или неустойчивый) определяется устойчивостью процесса за критического деформирования. Предложен целый ряд моделей, определяющих наличие некоторой зоны сцепления или зоны с ослабленными связями — зоны предразрушения. К числу наиболее известных относятся модели Дж. Р. Ирвина, Г. И. Баренблатта, Дж. Р. Райса, Д. С. Дагдейла, М. Я. Леонова и В. В. Панасюка, М. П. Внука и др. [6–15]. Кроме С. Д. Волкова, рядом других авторов была отмечена целесообразность использования моделей разупрочняющихся сред при описании процессов деформирования в области концентраторов напряжений [16–20]. Авторы считают, что очевидна корреляция между полной диаграммой деформирования материала и характером распределения напряжений вблизи вершины трещины, качественно они перекликаются.

Показательно, что в настоящее время при численном моделировании развития трещин в твердых телах распространена «модель когезионной зоны». В ней предполагается наличие у вершины трещины зоны процесса разрушения с ослабленными связями, для описания поведения которой используются диаграммы с ниспадающим участком [21–29]. В работах [21–22] описаны основы когезионной модели трещин, рассмотрены вопросы смешанного разрушения. Стоит отметить, что данная модель является удобной для решения задач, в которых направление развития трещины заранее известно. Так, в работе [23] рассмотрены задачи разрушения балок с надрезами при различных вариантах нагружения. В статье [24] исследована задача деформирования неоднородной слоистой балки при различных свойствах адгезионного слоя. В работе [25] проведено численное и экспериментальное исследование поведения клеевого соединения дерева со стеклом. В работе [26] исследовано влияние толщины клеевого соединения на процесс деформирования склеенных металлических конструкций. В статье [27] авторами предложена методика решения задач разрушения конструкций с клеевыми соединениями, позволяющая сочетать процессы когезионного и адгезионного разрушения. В работе [28] исследовано влияние закона деформирования материала клеевого соединения на процесс деформирования балки, приклеенной к жесткому основанию, произведена оценка размера зоны сцепления. В работе [29] решены задачи изгиба балок с продольным клеевым соединением, а также растяжения балки с клеевым соединением под углом. Во всех работах модель когезионной зоны косвенно воспроизводит проявление за критического деформирования у вершины трещины.

В качестве удобного для анализа примера в данной работе рассмотрена задача деформирования композиционного образца на разрыв между слоями в рамках модели когезионной зоны. Решение получено в прикладном пакете ABAQUS CAE.

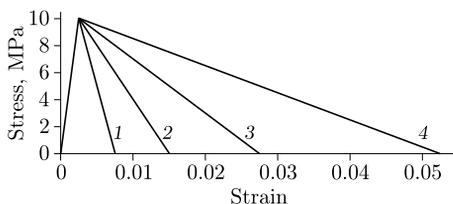
1. Постановка задачи. Для исследования влияния механического поведения на закритической стадии деформирования материала на процесс роста трещины рассмотрим модельную статическую задачу разрушения двухконсольной балки из композиционного материала. Данная задача аналогична методу расчета значения межслойной трещиностойкости полимерных композитов по ASTM D5528-01. В плоском деформированном состоянии рассматривается образец длиной 100 мм, состоящий из двух частей шириной по 2 мм, скрепленных через тонкий (0.001 мм) укороченный адгезионный слой. Отсутствие части адгезионного слоя задает начальную трещину (длина 25 мм). Композиционный материал — ортотропный, его упругие характеристики приведены в таблице. Материал адгезионного слоя является изотропным упруго-хрупким с линейным разупрочнением: модуль Юнга $E = 4000$ МПа; предел прочности на растяжение $\sigma_B = 10$ МПа; модуль спада D (взятый с противоположным знаком тангенс угла наклона касательной на закритической стадии деформирования) изменяется в диапазоне от 100 МПа до 4000 МПа. Высокое значение модуля спада характеризует склонность к хрупкому разрушению, низкое — к вязкому разрушению и равновесному накоплению повреждений. Некоторые диаграммы деформирования материала адгезионного слоя приведены на рис. 1. Удельные работы разрушения (площади под диаграммой деформирования), соответствующие работе, затраченной на разрушение единицы объема материала, могут быть рассчитаны через модуль спада по формуле

$$S_f = \frac{\sigma_B^2}{2} \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{D} \right).$$

Между частями конструкции заданы связанные контактные условия, между композитными частями прописаны контактные условия типа «поверхность–поверхность» во избежание взаимного проникновения друг в друга. Для упругих частей использована сетка из 4-узловых четырехугольников, для адгезионного слоя использован одномерный когезионный элемент. Линейный размер всех элементов — 0.1 мм. Граничные условия: шарнирно закреплена точка на расстоянии 10 мм от левого края нижней поверхности;

Рис. 1. Диаграммы деформирования материала адгезионного слоя, модуль спада: 1 — 1800 МПа, 2 — 800 МПа, 3 — 400 МПа, 4 — 200 МПа

[Figure 1. Adhesive layer material's deformation diagrams, softening modulus: 1 — 1800 МПа, 2 — 800 МПа, 3 — 400 МПа, 4 — 200 МПа]



Упругие свойства композита [Composite material's elastic properties]

E_{11} , GPa	E_{22} , GPa	E_{33} , GPa	ν_{12}	ν_{13}	ν_{23}	G_{12} , GPa	G_{13} , GPa	G_{23} , GPa
56	17	56	0.30	0.04	0.30	3	17	3

к аналогичной точке на верхней поверхности ступенчато прикладывается перемещение вдоль оси OY с фиксированным шагом 0.01 мм, перемещение вдоль оси OX отсутствует. Остальные поверхности являются свободными, массовые силы не учитываются. Начало координат поместим в вершину начальной трещины. Решение задачи прекращается, когда теряется сходимость итерационного процесса.

2. Результаты расчета и их анализ. Анализ поведения образца удобно проводить по эпоре нормальных напряжений σ_{22} в адгезионном слое, пример которой с соответствующим полем напряжений изображен на рис. 2. На эпоре можно выделить несколько характерных точек: 1 — точка, где полностью реализована закритическая стадия деформирования материала; 2 — точка, соответствующая частичной реализации закритической стадии; 3 — точка, соответствующая пределу прочности материала; 4 — точка в упругой области растяжения; 5 — точка в недеформированном состоянии, являющаяся переходной между областью растяжения и областью сжатия; 6 — точка в упругой области сжатия. Из эпоры видно, каким образом реализуется полная диаграмма деформирования, видны области (слева направо): с разрушенным материалом, реализации закритической стадии, упругого растяжения, упругого сжатия.

На рис. 3 приведены наложенные друг на друга эпоры нормальных напряжений в адгезионном слое в различные моменты после начала разрушения и соответствующие им изображения деформированных образцов. Из эпор видно, что по мере прорастания трещины область растяжения практически не изменяется, область сжатия увеличивается (снижается наименьшее значение напряжения).

По известному в различные моменты напряженно-деформированному состоянию получаем расчетную диаграмму нагружения конструкции в координатах «раскрытие трещины – нагрузка». Раскрытие трещины определяем

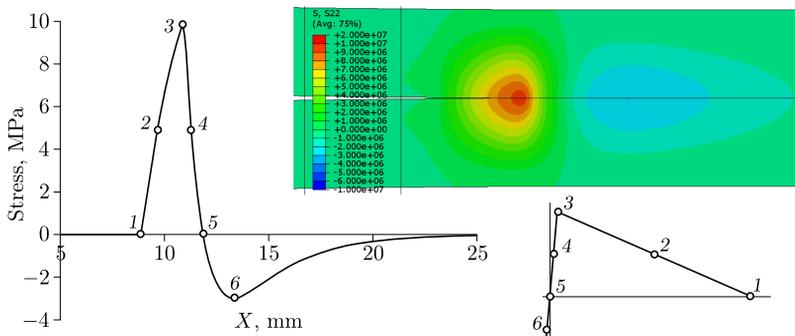


Рис. 2. Поле и эпора напряжений σ_{22} с соответствующими точками на диаграмме деформирования материала

[Figure 2. Stresses σ_{22} field and diagram with corresponding points on the material deformation diagram: 1 — the point where the supercritical stage of material deformation is fully realized; 2 — the point corresponding to the partial realization of the supercritical stage; 3 — the point corresponding to the ultimate strength of the material; 4 — the point in the elastic region of tension; 5 — the point in the undeformed state, which is a transition between the area of tension and the area of compression; 6 — the point in the elastic area of compression]

вдоль оси OY начала координат (в вершине заданной трещины). Внешнюю нагрузку получаем путем вычисления равнодействующей нормальных напряжений в адгезионном слое. На диаграмме нагружения, приведенной на рис. 4, точками обозначены: 1 — момент, где происходит образование зоны закритического деформирования материала; 2 — момент, где происходит первое удаление конечного элемента; 3–5 — различные состояния по мере равновесного роста трещины. Из рисунка видно, что внешняя нагрузка способна значительно увеличиваться после начала реализации закритической стадии деформирования, после начала роста трещины происходит монотонное снижение нагрузки. Полученные диаграммы нагружения для различных модулей спада изображены на рис. 5.

Зависимости максимальной нагрузки, выдерживаемой конструкцией, максимальных величин раскрытия и длины трещины от величины модуля спада и от удельной энергии разрушения представлены на рис. 6. Рост нагрузки при снижении величины модуля спада объясняется большим размером участка закритического деформирования (при равной деформации несущая способность увеличивается). Склонность к росту максимальной величины раскрытия трещины при уменьшении модуля спада связана с увеличением податли-

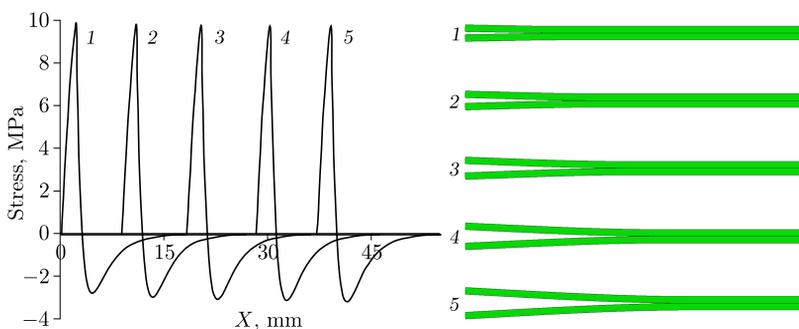


Рис. 3. Эпюры напряжений σ_{22} и изображения образца по мере роста трещины

[Figure 3. Stresses σ_{22} diagram and specimen images as the crack growth]

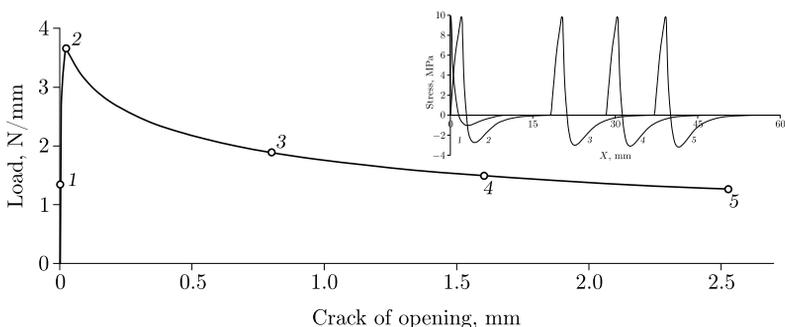


Рис. 4. Расчетная диаграмма нагружения и эпюры напряжений в различных состояниях

[Figure 4. Calculated loading diagram and stress diagrams in various states: 1 — the moment where the formation of a zone of supercritical deformation of the material occurs; 2 — the moment where the first removal of the finite element occurs; 3–5 — the different states as the crack grows in equilibrium]

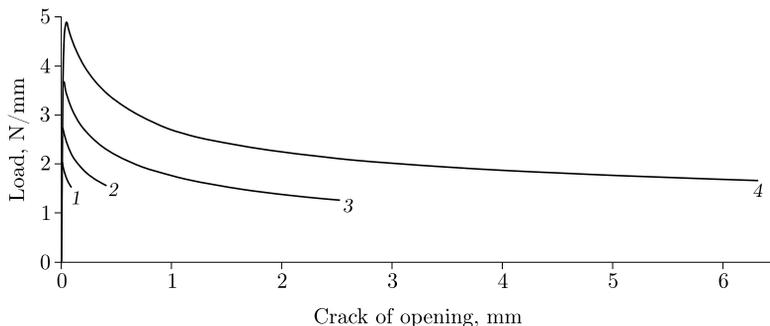


Рис. 5. Расчетные диаграммы нагружения, модуль спада: 1 — 1800 МПа, 2 — 800 МПа, 3 — 400 МПа, 4 — 200 МПа

[Figure 5. Calculated loading diagrams, softening modulus: 1 — 1800 МПа, 2 — 800 МПа, 3 — 400 МПа, 4 — 200 МПа]

вости системы. Из зависимости видно, что, как правило, в некотором диапазоне существует обратная пропорциональность между максимальной длиной трещины и модулем спада, т.е. чем более податливым является адгезионный слой, тем больше длина пророщенной трещины. После достижения некоторого значения модуля спада максимальная длина трещины изменяется слабо (достигается некоторое предельное для конструкции состояние). Стоит отметить, что зависимости, изображенные на рис. 6, *c–f*, не являются монотонными. Это может быть связано как с влиянием размера конечно-элементной сетки и величины шага нагружения [30], так и с отсутствием дополнительного условия устойчивости процесса деформирования, построенного в связи со свойствами нагружающей системы [1]. Данный вопрос требует отдельного рассмотрения.

Для исследования влияния жесткости нагружающей системы на процесс деформирования данного образца проведен расчет аналогичной задачи с условием, что перемещение передается через упругий элемент с заданным коэффициентом жесткости K . Рассмотрен случай, когда модуль спада $D = 200$ МПа. Установлено, что при $K = 3$ Н/м расчет завершается в точке с максимальной нагрузкой (соответствует случаю «мягкого» нагружения), при $K = 4$ Н/м расчет проходит полностью (как в случае «жесткого» нагружения). Это связано с тем, что наибольшая скорость спада нагрузки соответствует началу разрушения, дальше жесткость нагружающей системы оказывается достаточной для продолжения процесса равновесного роста трещины.

Заключение. Для демонстрации аналогии между подходами механики трещин и механики закритического деформирования, а также целесообразности использования последней для описания равновесного роста трещин в твердых телах рассмотрена задача деформирования образца на разрыв между слоями в рамках когезионной модели трещин. Рассмотрена двухзвенная аппроксимация полной диаграммы деформирования материала при различных значениях модуля спада, соответствующих определенным значениям удельной энергии разрушения. Построены эпюры нормальных напряжений в адгезионном слое: показано, каким образом реализуется полная диаграмма деформирования материала вблизи вершины трещины. Изучена эволюция процесса деформирования. Построены расчетные диаграммы нагруже-

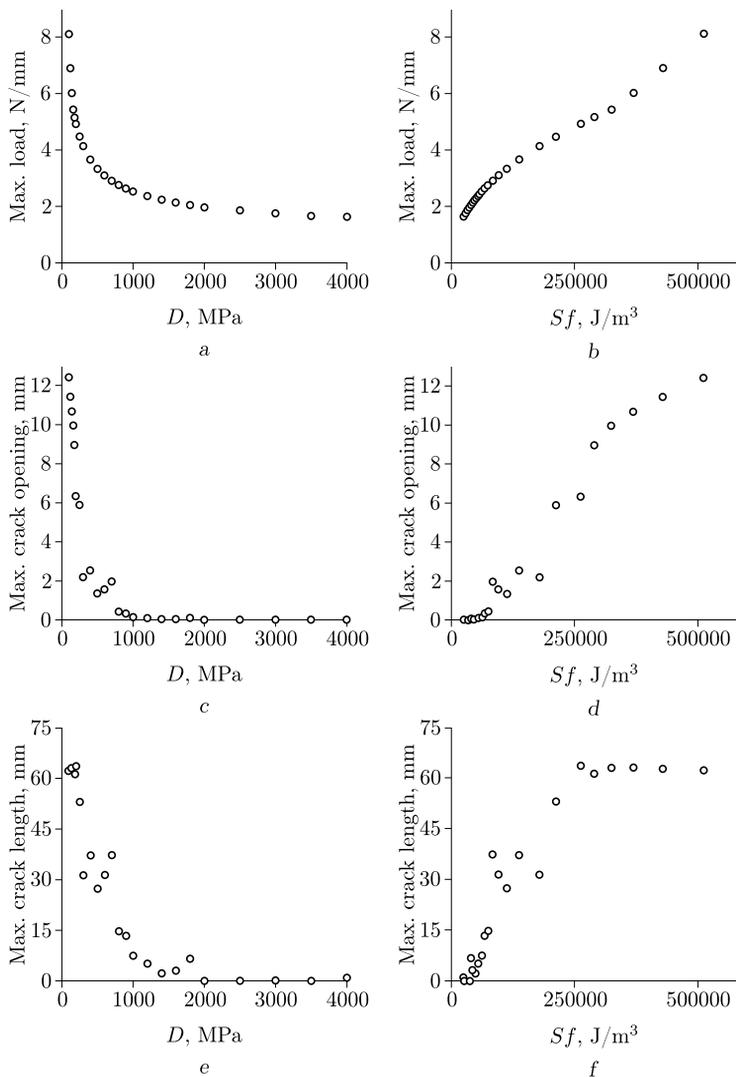


Рис. 6. Зависимости максимальной нагрузки от модуля спада (a) и удельной энергии разрушения (b); максимальной величины раскрытия трещины от модуля спада (c) и удельной энергии разрушения (d); максимальной длины трещины от модуля спада (e) и удельной энергии разрушения (f)

[Figure 6. Dependences of the maximum load on softening modulus (a) and specific fracture energy (b); the maximum crack opening on softening modulus (c) and specific fracture energy (d); the maximum crack length on softening modulus (e) and specific fracture energy (f)]

ния, показаны точки появления зоны закритического деформирования и начала разрушения. Отмечено, что происходит существенное увеличение расчетной нагрузки по мере развития зоны закритического деформирования до начала разрушения. Изучено влияние величины модуля спада на процесс деформирования: с уменьшением модуля спада происходит увеличение выдерживаемой нагрузки и прикладываемых перемещений. Выявлена зависимость максимальной длины пророщенной трещины от модуля спада: данная зависимость является обратно пропорциональной в некотором диапазоне и имеет предел. Продемонстрировано, что процесс равновесного роста трещины возможен только при достаточном значении жесткости нагружающей системы. Можно сделать вывод о целесообразности рассмотрения задач моделирования процессов деформирования и разрушения конструкций с применением когезионных элементов с позиций механики закритического деформирования.

Конкурирующие интересы. Авторы конкурирующих интересов не имеют.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование процесса деформирования композитного образца на разрыв между слоёв в рамках когезионной модели трещин проводилось в рамках Государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (№ ФСНМ-2020-0027).

Благодарность. Авторы выражают благодарность профессорам С. В. Смирнову, В. П. Радченко, Н. Г. Чаусову за плодотворные обсуждения предмета исследования.

Библиографический список

1. Вильдеман В. Э., Соколкин Ю. В., Ташкинов А. А. *Механика неупругого деформирования и разрушения композиционных материалов*. М.: Наука, 1997. 288 с.
2. Вильдеман В. Э. О решениях упругопластических задач с граничными условиями контактного типа для тел с зонами разупрочнения // *ПММ*, 1998. Т. 62, № 2. С. 304–312.
3. Керштейн И. М., Ключников В. Д., Ломакин Е. В., Шестериков С. А. *Основы экспериментальной механики разрушения*. М.: Моск. ун-т, 1989. 140 с.
4. Бажуков П. С., Вильдеман В. Э., Ильиных А. В., Третьяков М. П. Влияние жесткости нагружающей системы на равновесный рост трещин при квазистатическом нагружении // *Вестник ПНИПУ. Механика*, 2013. № 2. С. 7–20.
5. Волков С. Д., Ставров В. П. *Статистическая механика композитных материалов*. Минск: БГУ, 1978. 206 с.
6. Баренблатт Г. И. О равновесных трещинах образующихся при хрупком разрушении. Общие представления и гипотезы. Осесимметричные трещины // *ПММ*, 1959. Т. 23, № 3. С. 434–444.
7. Rice J. R. Mathematical analysis in the mechanics of fracture / *Fracture: An Advanced Treatise*. vol. 2, Mathematical Fundamentals (ed. H. Liebowitz). New York: Academic Press, 1968. pp. 191–311. http://esag.harvard.edu/rice/018_Rice_MathAnalMechFract_68.pdf.
8. Dugdale D. S. Yielding of steel sheets containing slits // *J. Mech. Phys. Solids*, 1960. vol. 8, no. 2. pp. 100–104. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(60\)90013-2](https://doi.org/10.1016/0022-5096(60)90013-2).

9. Панасюк В. В. *Предельное равновесие хрупких тел с трещинами*. Киев: Наук. думка, 1968. 246 с.
10. Леонов М. Я. Элементы теории хрупкого разрушения // *ПМТФ*, 1961. №3. С. 85–92.
11. Внук М. П. Модель когезионной зоны с учетом параметра трехосности // *Физ. мезомех.*, 2001. Т. 4, №4. С. 9–19.
12. Wecharatana M., Shah S. P. Predictions of nonlinear fracture process zone in concrete // *J. Eng. Mech.*, 1983. vol. 109, no. 3. pp. 1231–1246. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1983\)109:5\(1231\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1983)109:5(1231)).
13. Bažant Z. P., Oh B. H. Crack band theory for fracture of concrete // *Mat. Constr.*, 1983. vol. 16, no. 3. pp. 155–177. <https://doi.org/10.1007/BF02486267>.
14. Ingraffea A. R., Gerstle W. H. Non-linear fracture models for discrete crack propagation / *Application of Fracture Mechanics to Cementitious Composites* / NATO ASI Series, 94. Dordrecht: Springer, 1985. pp. 247–285. https://doi.org/10.1007/978-94-009-5121-1_9.
15. Shlyannikov V. N., Martínez Pañeda E., Tumanov A. V., Tartygasheva A. M. Crack tip fields and fracture resistance parameters based on strain gradient plasticity // *Int. J. Sol. Struct.*, 2021. vol. 208–209. pp. 63–82. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2020.10.015>.
16. Волков С. Д., Дубровина Г. И., Соковнин Ю. П. О краевой задаче механики разрушения // *Пробл. прочности*, 1978. №1. С. 3–7.
17. Гольдштейн Р. В., Перельмутер М. Н. Трещина на границе соединения материалов со связями между берегами // *Изв. РАН. МТТ*, 2001. №1. С. 94–112.
18. Линьков А. М. Потеря устойчивости при разупрочнении / *Исследования по упругости и пластичности*. Т. 14, Проблемы механики деформируемого твердого тела. Л.: ЛГУ, 1982. С. 41–46.
19. Чаусов Н. Г., Богданович А. З. Моделирование кинетики деформирования материала в зоне предразрушения // *Пробл. прочности*, 2003. №2. С. 54–65.
20. Радченко В. П., Горбунов С. В. Метод решения краевой упругопластической задачи о растяжении полосы с концентраторами напряжений с учетом локальных областей пластического разупрочнения материала // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2014. Т. 4(37). С. 98–110. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1366>.
21. Schwalbe K.-H., Scheider I., Cornec A. *Guidelines for Applying Cohesive Models to the Damage Behaviour of Engineering Materials and Structures*. Heidelberg: Springer, 2003. xii+89 pp. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-29494-5>.
22. Carpinteri A., Cornetti P., Barpi F., Valente S. Cohesive crack model description of ductile to brittle size-scale transition: dimensional analysis vs. renormalization group theory // *Eng. Fract. Mech.*, 2003. vol. 70, no. 14. pp. 1809–1839. [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(03\)00126-7](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(03)00126-7).
23. de Borst R. Numerical aspects of cohesive-zone models // *Eng. Fract. Mech.*, 2003. vol. 70, no. 14. pp. 1743–1757. [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(03\)00122-X](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(03)00122-X).
24. Khan M. A., Silberschmidt V. V., El-Rimawi J. Controlled failure warning and mitigation of prematurely failing beam through adhesive // *Compos. Struct.*, 2017. vol. 161. pp. 119–131. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.11.049>.
25. Piculin S., Nicklisch F., Brank B. Numerical and experimental tests on adhesive bond behaviour in timber-glass walls // *Int. J. Adh. Adh.*, 2016. vol. 70. pp. 204–217. <https://doi.org/10.1016/j.ijadhadh.2016.06.012>.
26. Xu W., Yu H., Tao C. Damage and stress evolution in the bondlines of metallic adhesively bonded joints accompanied by bondline thickness effect // *Int. J. Adh. Adh.*, 2015. vol. 59. pp. 86–97. <https://doi.org/10.1016/j.ijadhadh.2015.02.007>.
27. Belnoue J. P. H., Hallett S. R. Cohesive/adhesive failure interaction in ductile adhesive joints. Part I: A smeared-crack model for cohesive failure // *Int. J. Adh. Adh.*, 2016. vol. 68. pp. 359–368. <https://doi.org/10.1016/j.ijadhadh.2016.03.009>.

28. Valoroso N., de Barros S. Adhesive joint computations using cohesive zones // *Appl. Adhes. Sci.*, 2013. vol. 1, 8. <https://doi.org/10.1186/2196-4351-1-8>.
29. Silva D. F. O., Campilho R. D. S. G., Silva F. J. G, Carvalho U. T. F. Application a direct/cohesive zone method for the evaluation of scarf adhesive joints // *Appl. Adhes. Sci.*, 2018. vol. 6, no. 1, 13. <https://doi.org/10.1186/s40563-018-0115-2>.
30. Feklistova E. V., Tretyakov M. P., Wildemann V. E. Numerical implementation issues of the deformation and destruction process of bodies with stress concentrators // *AIP Conf. Proc.*, 2021. vol. 2371, 050002. <https://doi.org/10.1063/5.0059553>.

MSC: 74R20

Modeling the process of equilibrium crack growth in a composite specimen from the standpoints of the postcritical deformation mechanics

*V. E. Wildemann, A. I. Mugatarov*Perm National Research Polytechnic University,
29, Komsomolsky prospect, Perm, 614990, Russian Federation.

Abstract

Ensuring the strength and safety of structures requires studying the issues of crack initiation and equilibrium growth. An analogy between the approaches of phenomenological fracture mechanics, which is based on the complete deformation diagrams usage, and crack propagation mechanics is noted. The applying of previously developed postcritical deformation mechanics models, which describes accompanied by softening equilibrium damage accumulation processes, is advisable. On the example of the numerical, with cohesive elements using, simulation of composite specimen interlayer fracture, the realization of the material deformation complete diagram near the crack tip is demonstrated. The calculated loading diagrams are constructed, the points of the postcritical deformation zone initiation and the beginning of crack growth are shown. Relations between softening modulus value and maximum values of load, crack opening and length are revealed. The influence of the loading system rigidity is noted. It is concluded that consideration of the constructions deformation and fracture processes modeling problems using cohesive elements from the postcritical mechanics deformation standpoints is expedient.

Keywords: postcritical deformation, cohesive element, composite, equilibrium crack growth.

Received: 30th September, 2021 / Revised: 12th January, 2022 /Accepted: 24th January, 2022 / First online: 31st March, 2022

Research Article

© Authors, 2022

© Samara State Technical University, 2022 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this paper in press as:

Wildemann V. E., Mugatarov A. I. Modeling the process of equilibrium crack growth in a composite specimen from the standpoints of the postcritical deformation mechanics, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 1, pp. 48–61. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1886> (In Russian).

Authors' Details:

Valeriy E. Wildemann  <https://orcid.org/0000-0002-6240-4022>Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Head of Dept.; Dept. of Experimental Mechanics and Structural Materials Science; e-mail: wildemann@pstu.ru*Artur I. Mugatarov*   <https://orcid.org/0000-0002-2229-8181>Master's Student; Dept. of Experimental Mechanics and Structural Materials Science; e-mail: cem_mugatarov@mail.ru

Competing interests. We have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. We take full responsibility for submit the final manuscript to print. We approved the final version of the manuscript.

Funding. Investigation of the composite specimen for rupture between layers deformation process within the framework of a cohesive model of cracks was conducted within the State Assignment of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (no. FSNM–2020–0027).

Acknowledgments. The authors are grateful to professors S. V. Smirnov, V. P. Radchenko, N. G. Chaouf for productive discussions of the subject of research.

References

1. Wildemann V. E., Sokolkin Yu. V., Tashkinov A. A. *Mekhanika neuprugogo deformirovaniia i razrusheniia kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of Inelastic Deformation and Fracture of Composite Materials]. Moscow, Nauka, 1997, 288 pp. (In Russian)
2. Wildemann V. E. On the solutions of elastic-plastic problems with contact-type boundary conditions for solids with loss-of-strength zones, *J. Appl. Math. Mech.*, 1998, vol. 62, no. 2, pp. 281–288. [https://doi.org/10.1016/S0021-8928\(98\)00036-7](https://doi.org/10.1016/S0021-8928(98)00036-7).
3. Kershtein I. M., Klyushnikov V. D., Lomakin E. V., Shesterikov S. A. *Osnovy eksperimental'noi mekhaniki razrusheniia* [Fundamentals of Experimental Fracture Mechanics]. Moscow, Moscow Univ., 1989, 140 pp. (In Russian)
4. Bazhukov P. S., Vildeman V. E., Ilinykh A. V., Tretyakov M. P. Effect of stiffness loading system on the equilibrium of the crack growth under quasi-static loading, *PNNRU Mechanics Bulletin*, 2013, no. 2, pp. 7–20.
5. Volkov S. D., Stavrov V. P. *Statisticheskaiia mekhanika kompozitnykh materialov* [Statistical Mechanics of Composite Materials]. Minsk, Belarus State Univ., 1978, 206 pp. (In Russian)
6. Barenblatt G. I. The formation of equilibrium cracks during brittle fracture. General ideas and hypotheses. Axially-symmetric cracks, *J. Appl. Math. Mech.*, 1959, vol. 23, no. 3, pp. 622–636. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(59\)90157-1](https://doi.org/10.1016/0021-8928(59)90157-1).
7. Rice J. R. Mathematical analysis in the mechanics of fracture, In: *Fracture: An Advanced Treatise*, vol. 2, Mathematical Fundamentals (ed. H. Liebowitz). New York, Academic Press, 1968, pp. 191–311. http://esag.harvard.edu/rice/018_Rice_MathAnalMechFract_68.pdf.
8. Dugdale D. S. Yielding of steel sheets containing slits, *J. Mech. Phys. Solids*, 1960, vol. 8, no. 2, pp. 100–104. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(60\)90013-2](https://doi.org/10.1016/0022-5096(60)90013-2).
9. Panasyuk V. V. *Predel'noe ravnovesie khрупkikh tel s treshchinami* [Limit Equilibrium of Brittle Bodies with Cracks]. Kiev, Nauk. Dumka, 1968, 246 pp. (In Russian)
10. Leonov M. Ya. Elements of the theory of brittle fracture, *Prikl. Mech. Techn. Fiz.* [J. Appl. Mech. Tech. Phys.], 1961, no. 3, pp. 85–92 (In Russian).
11. Wnuk M. P. Model of the cohesive zone taking into account the triaxiality parameter, *Phys. Mesomech.*, 2001, vol. 4, no. 4, pp. 9–19 (In Russian).
12. Wecharatana M., Shah S. P. Predictions of nonlinear fracture process zone in concrete, *J. Eng. Mech.*, 1983, vol. 109, no. 3, pp. 1231–1246. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1983\)109:5\(1231\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1983)109:5(1231)).
13. Bažant Z. P., Oh B. H. Crack band theory for fracture of concrete, *Mat. Constr.*, 1983, vol. 16, no. 3, pp. 155–177. <https://doi.org/10.1007/BF02486267>.
14. Ingraffea A. R., Gerstle W. H. Non-linear fracture models for discrete crack propagation, In: *Application of Fracture Mechanics to Cementitious Composites*, NATO ASI Series, 94. Dordrecht, Springer, 1985, pp. 247–285. https://doi.org/10.1007/978-94-009-5121-1_9.
15. Shlyannikov V. N., Martínez Pañeda E., Tumanov A. V., Tartygasheva A. M. Crack tip fields and fracture resistance parameters based on strain gradient plasticity, *Int. J. Sol. Struct.*, 2021, vol. 208–209, pp. 63–82. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2020.10.015>.

16. Volkov S. D., Dubrovina G. I., Sokovnin Yu. P. The edge problem of fracture mechanics, *Strength of Materials*, 1978, vol. 10, no. 1, pp. 1–5. <https://doi.org/10.1007/bf01523685>.
17. Goldstein R. V., Perelmuter M. N. An interface crack with bonds between the surfaces, *Mech. Solids*, 2001, vol. 36, no. 1, pp. 77–92.
18. Lin'kov A. M. Loss of stability during softening, In: *Issledovaniya po uprugosti i plastichnosti* [Research on Elasticity and Plasticity], vol. 14, Problems of Solid Mechanics. Leningrad, Leningrad State Univ., 1982, pp. 41–46 (In Russian).
19. Chausov N. G., Bogdanovich A. Z. Modeling of material deformation kinetics in the pre-fracture zone, *Strength of Materials*, 2003, vol. 35, no. 2, pp. 140–148. <https://doi.org/10.1023/A:1023710511523>.
20. Radchenko V. P., Gorbunov S. V. The method of solution of the elastic-plastic boundary value problem of tension of strip with stress raisers with allowance for local domains of softening plasticity of material, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2014, no. 4(37), pp. 98–110 (In Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1366>.
21. Schwalbe K.-H., Scheider I., Cornec A. *Guidelines for Applying Cohesive Models to the Damage Behaviour of Engineering Materials and Structures*. Heidelberg, Springer, 2003, xii+89 pp. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-29494-5>.
22. Carpinteri A., Cornetti P., Barpi F., Valente S. Cohesive crack model description of ductile to brittle size-scale transition: dimensional analysis vs. renormalization group theory, *Eng. Fract. Mech.*, 2003, vol. 70, no. 14, pp. 1809–1839. [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(03\)00126-7](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(03)00126-7).
23. de Borst R. Numerical aspects of cohesive-zone models, *Eng. Fract. Mech.*, 2003, vol. 70, no. 14, pp. 1743–1757. [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(03\)00122-X](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(03)00122-X).
24. Khan M. A., Silberschmidt V. V., El-Rimawi J. Controlled failure warning and mitigation of prematurely failing beam through adhesive, *Compos. Struct.*, 2017, vol. 161, pp. 119–131. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.11.049>.
25. Piculin S., Nicklisch F., Brank B. Numerical and experimental tests on adhesive bond behaviour in timber-glass walls, *Int. J. Adh. Adh.*, 2016, vol. 70, pp. 204–217. <https://doi.org/10.1016/j.ijadhadh.2016.06.012>.
26. Xu W., Yu H., Tao C. Damage and stress evolution in the bondlines of metallic adhesively bonded joints accompanied by bondline thickness effect, *Int. J. Adh. Adh.*, 2015, vol. 59, pp. 86–97. <https://doi.org/10.1016/j.ijadhadh.2015.02.007>.
27. Belnoue J. P. H., Hallett S. R. Cohesive/adhesive failure interaction in ductile adhesive joints. Part I: A smeared-crack model for cohesive failure, *Int. J. Adh. Adh.*, 2016, vol. 68, pp. 359–368. <https://doi.org/10.1016/j.ijadhadh.2016.03.009>.
28. Valoroso N., de Barros S. Adhesive joint computations using cohesive zones, *Appl. Adhes. Sci.*, 2013, vol. 1, 8. <https://doi.org/10.1186/2196-4351-1-8>.
29. Silva D. F. O., Campilho R. D. S. G., Silva F. J. G., Carvalho U. T. F. Application a direct/cohesive zone method for the evaluation of scarf adhesive joints, *Appl. Adhes. Sci.*, 2018, vol. 6, no. 1, 13. <https://doi.org/10.1186/s40563-018-0115-2>.
30. Feklistova E. V., Tretyakov M. P., Wildemann V. E. Numerical implementation issues of the deformation and destruction process of bodies with stress concentrators, *AIP Conf. Proc.*, 2021, vol. 2371, 050002. <https://doi.org/10.1063/5.0059553>.