

# Механика деформируемого твёрдого тела



УДК 539.372

## Численное моделирование процесса ползучести титанового сплава ВТ6 при многоосном напряженном состоянии с учетом влияния агрессивной среды

© Л. А. Игумнов<sup>1,2</sup>, И. А. Волков<sup>2,3</sup>, Д. А. Казаков<sup>1,2</sup>,  
Д. Н. Шишулин<sup>1,2</sup>, И. А. Модин<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Самарский государственный технический университет,  
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

<sup>2</sup> Научно-исследовательский институт механики  
Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского,  
Россия, 603022, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23, корпус 6.

<sup>3</sup> Волжский государственный университет водного транспорта,  
Россия, 603600, Нижний Новгород, ул. Нестерова, 5.


### Аннотация

Рассматривается проблема оценки прочности и ресурса ответственных инженерных объектов, условия эксплуатации которых характеризуются высокотемпературными нестационарными термомеханическими воздействиями, приводящими к деградации начальных прочностных свойств конструкционных материалов (металлов и их сплавов) по механизму длительной прочности.

С позиции механики поврежденной среды развита математическая модель, описывающая кинетику напряженно-деформированного состояния и накопления повреждений при деградации материала по механизму длительной прочности в условиях сложного многоосного напряженного состояния.

Предложена экспериментально-теоретическая методика нахождения материальных параметров и скалярных функций определяющих соотношений механики поврежденной среды по результатам специально поставленных экспериментов на лабораторных образцах.

### Научная статья

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

### Образец для цитирования

Игумнов Л. А., Волков И. А., Казаков Д. А., Шишулин Д. Н., Модин И. А. Численное моделирование процесса ползучести титанового сплава ВТ6 при многоосном напряженном состоянии с учетом влияния агрессивной среды // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 3. С. 435–456. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1873>.

### Сведения об авторах

Леонид Александрович Игумнов  <https://orcid.org/0000-0003-3035-0119>

доктор физико-математических наук, профессор; ведущий научный сотрудник; каф. прикладной математики и информатики<sup>1</sup>; главный научный сотрудник; лаб. моделирования физико-механических процессов<sup>2</sup>; e-mail: [igumnov@mech.unn.ru](mailto:igumnov@mech.unn.ru)

Приводятся результаты экспериментальных исследований и численного моделирования процесса кратковременной высокотемпературной ползучести титанового сплава ВТ6 при одноосных и многоосных напряженных состояниях. Численные результаты сравниваются с данными натуральных экспериментов. Особое внимание уделяется вопросам моделирования процесса нестационарной ползучести для сложных режимов деформирования, сопровождающихся вращением главных площадок тензоров напряжений, деформаций и деформаций ползучести с учетом воздействия агрессивной среды, которая имитируется путем предварительного наводораживания лабораторных образцов до различной концентрации водорода по массе.

Показано, что развитый вариант определяющих соотношений механики поврежденной среды позволяет с достаточной для инженерных расчетов точностью описывать процессы нестационарной ползучести и длительной прочности конструкционных сплавов при многоосных напряженных состояниях с учетом воздействия агрессивной среды (водородной коррозии).

**Ключевые слова:** нестационарная ползучесть, длительная прочность, повреждение, ресурс, математическое моделирование, базовый эксперимент, материальные параметры, численный и натуральный эксперимент, агрессивная среда, наводораживание.

Получение: 27 июня 2021 г. / Исправление: 9 сентября 2021 г. /

Принятие: 20 сентября 2021 г. / Публикация онлайн: 30 сентября 2021 г.

---


**Введение.** Особенностью работы элементов конструкций, разрушающихся в результате высокотемпературной ползучести, является нестационарность теплового и силового воздействий, которые определяют характер процесса деформирования материала в зонах концентрации напряжений и включают выдержки различной длительности при различных уровнях напряжений и температуры [1–4].

Многочисленные результаты экспериментальных исследований свидетельствуют о том, что при термоциклическом нагружении с различной длительно-

---

*Иван Андреевич Волков*  <https://orcid.org/0000-0003-1176-4906>

доктор физико-математических наук, профессор; главный научный сотрудник; лаб. физико-механических испытаний материалов<sup>2</sup>; заведующий кафедрой; каф. подъемно-транспортных машин и машиноремонта<sup>3</sup>; e-mail: [pmptmvgavt@yandex.ru](mailto:pmptmvgavt@yandex.ru)

*Дмитрий Александрович Казаков*  <https://orcid.org/0000-0002-9316-4105>

кандидат технических наук; научный сотрудник; каф. прикладной математики и информатики<sup>1</sup>; научный сотрудник; лаб. физико-механических испытаний материалов<sup>2</sup>; e-mail: [kazakov@mech.unn.ru](mailto:kazakov@mech.unn.ru)

*Денис Николаевич Шишулин*  <https://orcid.org/0000-0002-6527-557X>

кандидат технических наук; научный сотрудник; каф. прикладной математики и информатики<sup>1</sup>; научный сотрудник; лаб. физико-механических испытаний материалов<sup>2</sup>; e-mail: [shishulindn@gmail.com](mailto:shishulindn@gmail.com)

*Иван Александрович Модин*  <https://orcid.org/0000-0002-3561-4606>

кандидат технических наук; научный сотрудник; каф. прикладной математики и информатики<sup>1</sup>; научный сотрудник; лаб. моделирования физико-механических процессов<sup>2</sup>; e-mail: [mianet@mail.ru](mailto:mianet@mail.ru)

стью циклов нагружения характер разрушения различается вследствие различия комбинаций двух основных видов повреждения: процесса повреждения, вызванного деформацией ползучести и развивающегося в основном по границам зерен (межкристаллитное разрушение), и процесса повреждения, вызванного пластической деформацией по плоскостям скольжения дислокаций (транскристаллитное разрушение).

Вследствие того, что процессы накопления повреждений зависят от кинетики напряженно-деформированного состояния (НДС), точность расчетных оценок прочности и ресурса конструктивных элементов будет зависеть от того, насколько используемая математическая модель механики поврежденной среды (МПС) достоверно описывает процессы деформирования и повреждения опасных зон элементов конструкции в заданных условиях эксплуатации и насколько точно определены параметры материала, входящие в используемую математическую модель.

Ресурс элементов конструкций, работающих в условиях повышенных температур и механических воздействий, имеющих циклический характер, определяется в основном физическими процессами малоциклового усталости и накоплением повреждений в результате процесса ползучести, которые приводят к одному из наиболее опасных типов разрушения — хрупкому разрушению конструкций, изначально изготовленных из пластичных материалов.

Для описания стандартных кривых ползучести предложено много упрощенных одномерных определяющих уравнений. Однако эти формулы пригодны только для случая постоянных напряжений и представляют собой попытку математической формализации первой и второй стадий процесса ползучести [5–10].

При переменных напряжениях получили развитие модели временного и деформационного упрочнения [9, 10]. Однако определяющие соотношения ползучести, представленные в форме моделей временного и деформационного упрочнения, предназначены лишь для описания первой и второй стадий процесса ползучести. Они не охватывают всех стадий процесса ползучести, а также не описывают важного явления обратной ползучести при разгрузке материала. Поэтому в ряде случаев необходимо строить более сложные определяющие соотношения ползучести и длительной прочности [11–24]. В работах отечественных и зарубежных исследователей, которые можно найти в [9], предложено большое количество разных формулировок моделей ползучести. Можно утверждать, что соотношения, основанные на обобщении моделей упрочнения путем применения концепции «скрытых» или «внутренних» параметров состояния, позволяют описывать численно в хорошем согласии с экспериментальными данными многоосные напряженные состояния. Такие соотношения обладают двумя важными преимуществами: позволяют охватить широкий диапазон поведения материалов, включая определение склерономной пластической деформации и реономной деформации ползучести, и в то же время очень удобны для анализа действующих эффективных напряжений.

Особое внимание необходимо уделять экспериментальным исследованиям процессов высокотемпературной ползучести при многоосном нагружении, так как данная экспериментальная информация является базисом для построения достоверной математической модели, позволяющей учитывать эффекты,

возникающие при сложных непропорциональных нагружениях и существенным образом влияющих на точность расчетов длительной прочности конструкций.

В настоящей работе на базе работ отечественных и зарубежных исследователей [1, 11–18] развита математическая модель МПС, предназначенная для описания процессов нестационарной ползучести и длительной прочности поликристаллических конструкционных сплавов. Проведена оценка достоверности предложенных определяющих соотношений МПС путем сравнения с опытными данными численных результатов процесса кратковременной высокотемпературной ползучести титанового сплава ВТ6 при одноосном и многоосном напряженных состояниях с учетом воздействия агрессивной среды (наводораживания).

**1. Экспериментальное оборудование и программа испытаний.** Возможности испытательного оборудования [26–30] с интегрированным математическим обеспечением позволяют создать различные программы испытаний. В работе [26] представлены результаты экспериментальных исследований кратковременной высокотемпературной ползучести титанового сплава ВТ6, полученные на лабораторных трубчатых образцах в условиях одноосного и многоосного напряженных состояний по схеме «мягкого» нагружения при температуре 600 °С. Часть испытаний проводилась на образцах из исследуемого материала в состоянии поставки. Для исследования влияния водородной коррозии на механические характеристики сплава ВТ6 ряд образцов был подвергнут влиянию агрессивной среды (наводораживанию при концентрациях водорода по массе 0.15 % и 0.3 %).

Эксперименты получены при кручении образцов (рис. 1, схемы А, В) с интенсивностями действующих напряжений  $\sigma_i = 50$  и 66 МПа, при одноосном растяжении (рис. 1, схемы С–F) с интенсивностями напряжений  $\sigma_i = 30, 66, 78$  и 90 МПа и при многоосном нагружении при двух уровнях интенсивности напряжений  $\sigma_i = 50$  и 78 МПа и углах между компонентами тензора напряжений  $\sigma_{11}$  и  $\sigma_{12}$ , равных 30° и 60° соответственно (рис. 1, схема J).

На рис. 1 графически представлены программы нагружения, где красной стрелкой указан вектор действующего напряжения в экспериментальных исследованиях процесса ползучести, а указанные радиусы окружностей равны следующим значениям:  $\sigma_{i(1)} = 30$  МПа,  $\sigma_{i(2)} = 50$  МПа,  $\sigma_{i(3)} = 66$  МПа,  $\sigma_{i(4)} = 78$  МПа,  $\sigma_{i(5)} = 90$  МПа.

По результатам проведенных экспериментальных исследований построены кривые ползучести — зависимости деформаций ползучести от времени ( $\epsilon_{11}^c(t)$ ,  $\epsilon_{12}^c(t)$ ) для указанных выше программ нагружения (рис. 5–22).

**2. Определяющие соотношения механики поврежденной среды.** Модель поврежденной среды, развитая для описания деградации начальных прочностных свойств материала по механизму длительной прочности, состоит из трех взаимосвязанных составных частей:

- соотношений, описывающих вязкопластическое поведение материала с учетом зависимости процесса разрушения;
- эволюционных уравнений, описывающих кинетику накопления повреждений;
- критерия прочности поврежденного материала.

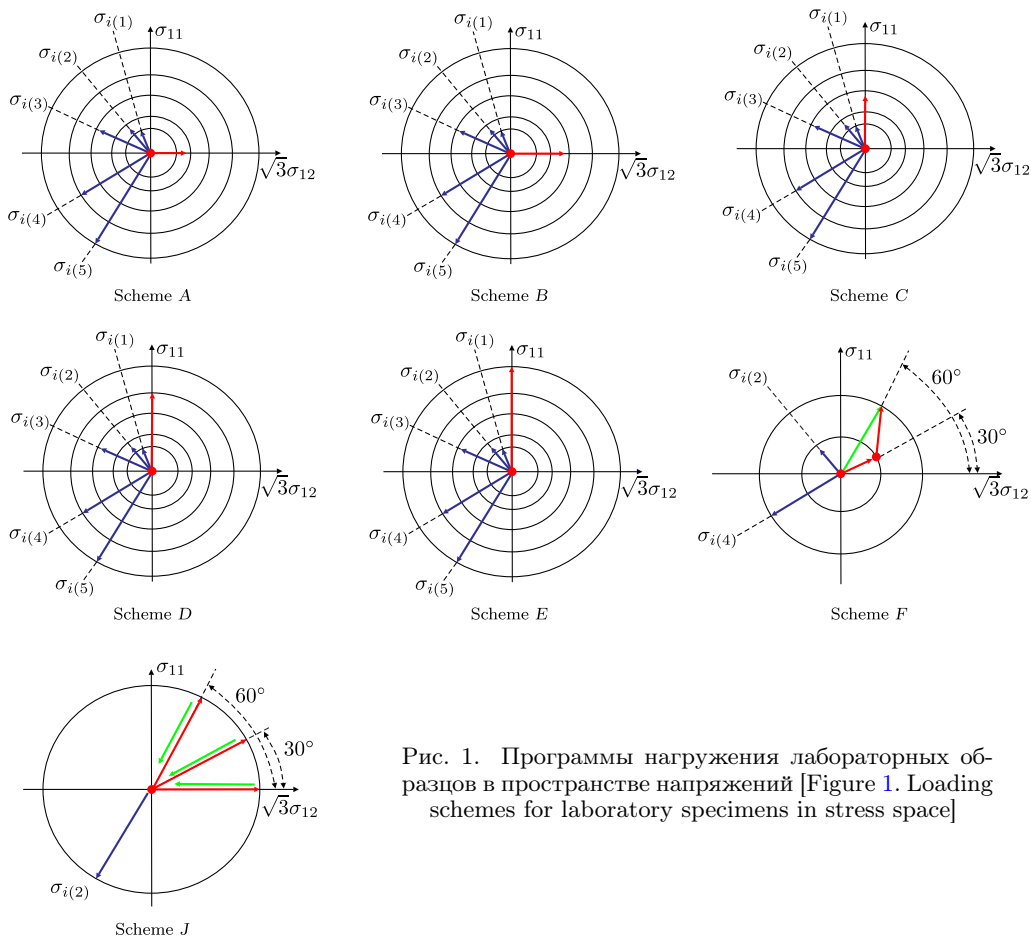


Рис. 1. Программы нагружения лабораторных образцов в пространстве напряжений [Figure 1. Loading schemes for laboratory specimens in stress space]

**2.1. Определяющее соотношение термоползучести.** Для проведения расчетных оценок процесса ползучести использовалась математическая модель, где предполагается, что закономерности изменения внутренних параметров состояния материала определяются двумя физическими механизмами: упрочнением и разупрочнением материалов. Такой подход имеет аналог в математической теории пластичности (теории течения).

Основные положения используемого варианта соотношений нестационарной ползучести, предложенного Ю. Г. Коротких и развитого в работах его учеников (И. А. Волков, Д. А. Казаков, Д. Н. Шишулин), заключаются в следующем [1, 11, 21, 25].

1. Рассматриваются начально изотропные среды.
2. Тензоры деформаций и скоростей деформаций представляют собой сумму «мгновенной» и «временной» составляющих. «Мгновенная» составляющая состоит из упругой компоненты, не зависящей от истории деформирования и определяющей конечное состояние процесса, и пластической компоненты, зависящей от истории процесса деформирования. Временная составляющая (деформаций ползучести) описывает временную зависимость процессов деформирования при низких скоростях нагружения.

3. В пространстве напряжений существует семейство эквипотенциальных поверхностей ползучести радиуса  $C_c$  и координат общего центра  $\rho_{ij}^c$ , векторы скоростей деформаций ползучести к которой направлены по нормали.
4. Изменение объема элемента тела упругое, т.е.  $e_{ii}^p = e_{ii}^c = 0$ .
5. Рассматриваются процессы деформирования, характеризующиеся малыми деформациями.

Принимается, что компоненты тензора деформаций  $e_{ij}$  и их скоростей  $\dot{e}_{ij}$  являются суммами упругих составляющих  $e_{ij}^e, \dot{e}_{ij}^e$ , пластических составляющих  $e_{ij}^p, \dot{e}_{ij}^p$  и деформаций ползучести  $e_{ij}^c, \dot{e}_{ij}^c$ :

$$e_{ij} = e_{ij}^e + e_{ij}^p + e_{ij}^c, \quad \dot{e}_{ij} = \dot{e}_{ij}^e + \dot{e}_{ij}^p + \dot{e}_{ij}^c, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1)$$

Связь между тензором напряжений и тензором упругих деформаций на базе уравнений термоупругости определяется зависимостями

$$\sigma = 3K[e - \alpha T], \quad \dot{\sigma} = 3K[\dot{e} - \dot{\alpha}T - \alpha\dot{T}] + \frac{\dot{K}}{K}\sigma, \quad (2)$$

$$\sigma'_{ij} = 2Ge'_{ij}, \quad \dot{\sigma}'_{ij} = 2G\dot{e}'_{ij} + \frac{\dot{G}}{G}\sigma'_{ij}, \quad e'_{ij} = e'_{ij} - e_{ij}^c - e_{ij}^p, \quad (3)$$

где  $\sigma, e$  — шаровые, а  $\sigma'_{ij}, e'_{ij}$  — девиаторные компоненты тензоров напряжений  $\sigma_{ij}$  и деформаций  $e_{ij}$  соответственно;  $G = G(T)$  — модуль сдвига;  $K = K(T)$  — объемный модуль упругости;  $\alpha = \alpha(T)$  — коэффициент температурного расширения,  $T$  — температура.

Для описания процессов ползучести вводим в пространстве напряжений эквипотенциальные поверхности ползучести  $F_c$ , имеющие общий центр  $\rho_{ij}^c$  и различные радиусы  $C_c$ , определяемые текущим напряженным состоянием

$$F_c^{(i)} = S_{ij}^c S_{ij}^c - C_c^2 = 0, \quad S_{ij}^c = \sigma'_{ij} - \rho_{ij}^c, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

согласно ассоциированному закону

$$\dot{e}_{ij}^c = \lambda_c \frac{\partial F_c^{(i)}}{\partial S_{ij}^c} = \lambda_c S_{ij}^c, \quad (5)$$

где  $\lambda_c$  соответствует текущей поверхности  $F_c^{(i)}$ , определяющей текущее напряженное состояние  $S_{ij}^c$ .

Среди этих эквипотенциальных поверхностей можно выделить поверхность с радиусом  $\bar{C}_c$ , соответствующую нулевой скорости ползучести:

$$F_c^{(0)} = \bar{S}_{ij}^c \bar{S}_{ij}^c - \bar{C}_c^2 = 0, \quad \bar{S}_{ij}^c = \bar{\sigma}'_{ij} - \rho_{ij}^c, \quad (6)$$

где  $\bar{S}_{ij}^c$  и  $\bar{\sigma}'_{ij}$  — совокупность напряженных состояний, отвечающих (с определенным допуском) нулевой скорости ползучести,  $C_c$  — экспериментально определяемая функция температуры  $T$  и  $\chi_c$ :

$$\chi_c = \int_0^t \dot{\chi}_c dt, \quad \dot{\chi}_c = \left( \frac{2}{3} \dot{e}_{ij}^c \dot{e}_{ij}^c \right)^{1/2}. \quad (7)$$

Эволюционное уравнение для изменения координат центра поверхности ползучести имеет вид [1, 11]

$$\dot{\rho}_{ij}^c = g_1^c \dot{e}_{ij}^c - g_2^c \rho_{ij}^c \dot{\chi}_c, \quad (8)$$

где  $g_1^c$  и  $g_2^c > 0$  — экспериментально определяемые материальные параметры.

Конкретизируя соотношение (5), закон градиентальности можно представить в виде

$$\dot{e}_{ij}^c = \lambda_c(\psi_c, T) S_{ij}^c = \lambda_c \psi_c S_{ij}^c = \frac{\lambda_c}{C_c} (\sqrt{S_{ij}^c S_{ij}^c} - \bar{C}_c) S_{ij}^c, \quad (9)$$

$$\psi_c = \frac{1}{C_c} (\sqrt{S_{ij}^c S_{ij}^c} - \bar{C}_c). \quad (10)$$

В выражении (9)  $\lambda_c = \lambda_c(\sigma_i)$  — экспериментально определяемая функция.

Длина траектории деформаций ползучести примет вид

$$\dot{\chi}_c = \sqrt{2/3} \lambda_c (\sqrt{S_{ij}^c S_{ij}^c} - \bar{C}_c). \quad (11)$$

Зависимость  $\chi_c$  от времени  $t$  при  $S_i^c = \text{const}$  для многоосного деформирования по лучевой траектории имеет вид, представленный на рис. 2.

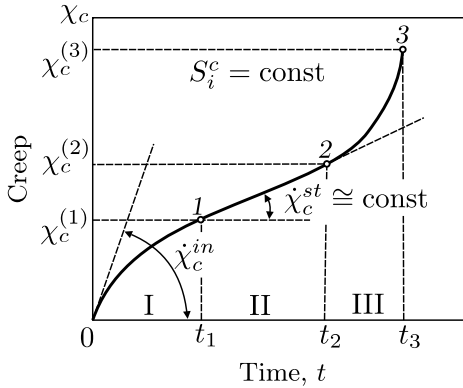


Рис. 2. Обобщенная кривая ползучести  
[Figure 2. Typical creep curve]

На кривой  $\chi_c(t)$  с определенной долей условности можно выделить три участка:

- I — участок неустановившейся ползучести от 0 до  $\chi_c^{(1)}$ , скорость деформации ползучести  $\dot{\chi}_c$  убывает;
- II — участок установившейся ползучести от  $\chi_c^{(1)}$  до  $\chi_c^{(2)}$ , скорость деформации ползучести  $\dot{\chi}_c$  приблизительно постоянна, то есть  $\dot{\chi}_c = \dot{\chi}_c^{st} \cong \text{const}$ ;
- III — участок неустановившейся ползучести  $\chi_c > \chi_c^{(2)}$ , деформации ползучести быстро растут (участок предшествует разрушению),  $\dot{\chi}_c$  резко возрастает.

Длины участков существенным образом зависят от величины  $S_i^c$ .

В случае многоосного нагружения будем иметь

$$\lambda_c = \begin{cases} 0, & \psi_c \leq 0 \vee \chi_c = 0, \\ \lambda_c^{\text{I}}, & 0 \leq \chi_c \leq \chi_c^{(1)}, \\ \lambda_c^{\text{II}}, & \chi_c^{(1)} \leq \chi_c \leq \chi_c^{(2)}, \\ \lambda_c^{\text{III}}, & \chi_c^{(2)} \leq \chi_c \leq \chi_c^{(3)}. \end{cases} \quad (12)$$

Выражение для  $\lambda_c^{\text{I}}$  на первом участке кривой ползучести можно представить в виде

$$\lambda_c^{\text{I}} = \lambda_c^{(0)} \left( 1 - \frac{\chi_c}{\chi_c^{(1)}} \right) + \lambda_c^{\text{II}} \frac{\chi_c}{\chi_c^{(1)}}, \quad (13)$$

где  $\lambda_c^{(0)}$  и  $\lambda_c^{\text{II}}$  — значения  $\lambda_c$  в начальной и конечной точках первого участка кривой ползучести материала.

На стадии активного развития и слияния дефектов в объеме материала наблюдается влияние степени повреждения на физико-механические характеристики. В первом приближении этот эффект можно описать, основываясь на концепции деградирующего континуума, путем введения эффективных напряжений [1, 20]:

$$\tilde{\sigma}'_{ij} = F_1(\omega) \sigma'_{ij} = \frac{G}{\tilde{G}} \sigma'_{ij}, \quad \tilde{\sigma} = F_2(\omega) \sigma = \frac{K}{\tilde{K}} \sigma, \quad (14)$$

где эффективные модули упругости определяются формулами Маккензи [20]:

$$\tilde{G} = G \left( 1 - \frac{6K + 12G}{9K + 8G} \omega \right) (1 - \omega), \quad \tilde{K} = \frac{4GK}{4G + 3K\omega} (1 - \omega). \quad (15)$$

Аналогичным образом определяется эффективный тензор микронапряжений  $\tilde{\rho}_{ij}^c$ :

$$\tilde{\rho}_{ij}^c = F_1(\omega) \rho_{ij}^c = \frac{G}{\tilde{G}} \rho_{ij}^c. \quad (16)$$

**2.2. Эволюционные уравнения накопления повреждений.** Постулируем, что эволюционное уравнение накопления повреждений при ползучести можно представить в виде [1, 21]

$$\dot{\omega} = f_1(\beta) f_2(\omega) f_3(W_c) f_4(\dot{W}_c), \quad (17)$$

где  $f_1(\beta)$  — функция влияния объемности НДС;  $f_2(\omega)$  — функция влияния уровня накопленной поврежденности;  $f_3(W_c)$  — функция, учитывающая уровень накопленной относительной энергии, идущей на образование микродефектов;  $f_4(\dot{W}_c)$  — функция скорости изменения энергии, идущей на образование микродефектов. Предлагается следующая конкретизация введенных



функций:

$$\begin{aligned}
 f_1(\beta) &= \exp(k\beta), \\
 f_2(\omega) &= \begin{cases} 0, & W_c \leq W_c^a, \\ \omega^{1/3}(1-\omega)^{2/3}, & W_c > W_c^a \wedge \omega \leq 1/3, \\ (\sqrt[3]{16}/9)\omega^{-1/3}(1-\omega)^{-2/3}, & W_c > W_c^a \wedge \omega > 1/3, \end{cases} \\
 f_3(W_c) &= \frac{W_c - W_c^a}{W_c - W_c^f}, \quad f_4(\dot{W}_c) = \frac{\dot{W}_c}{W_c - W_c^f}, \\
 \dot{W}_c &= \rho_{ij}^c \dot{\epsilon}_{ij}^c, \quad W_c = \int_0^t \dot{W}_c dt,
 \end{aligned} \tag{18}$$

где  $\beta = \sigma/\sigma_i$  — параметр объемности НДС;  $W_c^a$  — значение энергии в конце стадии зарождения микродефектов в объеме материала;  $W_c^f$  — значение энергии при образовании макроскопической трещины;  $W_c^a$ ,  $k$  — параметры материала. Эволюционное уравнение накопления повреждений (17) включает в себя двухстадийность кинетики накопления рассеянных по объему повреждений: первая стадия — зарождение и рост микродефектов, вторая стадия — слияние и дальнейший рост микродефектов со значительным влиянием поврежденности на физико-механические свойства материала.

**2.3. Критерий прочности поврежденного материала.** Критерием окончания фазы развития рассеянных микродефектов (началом стадии образования макротрещины) считается условие достижения поврежденностью критического значения:

$$\omega = \omega_f = 1. \tag{19}$$

**3. Определение материальных параметров соотношений термоползучести.** Для практического применения уравнений термоползучести (1)–(9) необходимо иметь следующие зависимости от температуры  $T$ :

- зависимости  $G = G(T)$ ,  $K = K(T)$ ,  $\alpha = \alpha(T)$ ;
- зависимость текущего радиуса поверхности ползучести нулевого уровня (нулевой скорости ползучести)  $\bar{C}_c = \bar{C}_c(\chi_c, T)$ ;
- зависимости параметров  $\lambda_c^{(0)} = \lambda_c^{(0)}(T)$ ,  $\lambda_c^{\text{II}} = \lambda_c^{\text{II}}(T)$  для различных участков кривой ползучести;
- зависимости модулей кинематического упрочнения  $g_1^c = g_1^c(T)$ ,  $g_2^c = g_2^c(T)$ .

Материальные параметры уравнений термоползучести определяются из базовых экспериментов [1, 11, 21]. В качестве основных базовых экспериментов принимаются эксперименты на одноосное растяжение–сжатие цилиндрических лабораторных образцов. Основные типы базовых экспериментов — изотермические эксперименты при постоянных базовых температурах  $T_j$  ( $j = 1, 2, \dots$ ). Типы образцов — цилиндрический сплошной и цилиндрический трубчатый. Выбранные типы образцов обеспечивают однородное распределение полей напряжений деформаций и температур в пределах рабочей части, что исключает возможность потери устойчивости и формоизменения образца при знакопеременном нагружении, а также максимально исключает влияние концентраторов на НДС при переходе от рабочей части образца к утолщенным местам [11].

Для определения модулей кинематического (анизотропного) упрочнения  $g_1^c$  и  $g_2^c$  и зависимости для радиуса поверхности ползучести, соответствующего нулевой скорости ползучести, образец нагревается до значения температуры базового эксперимента  $T_j = \text{const}$  и проводятся испытания на кратковременную ползучесть при одноосном растяжении по схеме «мягкого» нагружения.

Сначала образец нагружается до величины напряжения  $\sigma_{11}^{(1)}$  в точке 1 (рис. 3). Этот уровень напряжений выбирается из анализа имеющегося веера кривых ползучести, полученных при базовой температуре  $T_j$  (кривая ползучести, соответствующая нулевой скорости ползучести). В результате релаксации процесс заканчивается в точке 2 (напряжение  $\bar{\sigma}_{11}^{(2)}$ ), где скорость деформации ползучести стремится к нулю.

Далее образец нагружается до напряжения обратного знака  $\sigma_{11}^{(3)}$  (точка 3 на рис. 3) и в результате процесса релаксации оказывается в точке 4. Таким образом, напряжения  $\bar{\sigma}_{11}^{(0)+}$  (точка 2) и  $\bar{\sigma}_{11}^{(0)-}$  (точка 4) характеризуют (с определенным допуском на остаточную деформацию) начальные верхнюю и нижнюю границы поверхности ползучести, соответствующие нулевой скорости ползучести.

Для определения трансформации поверхности ползучести на том же самом образце при заданном напряжении  $\sigma_{11}^* = \text{const}$  проводится ряд аналогичных действий после достижения назначенных уровней деформаций ползучести  $e_{11}^{c(1)}, e_{11}^{c(2)}, \dots, e_{11}^{c(m)}$ . Полученный таким образом набор точек 2, 7, 12, 17 и т.д. характеризует изменение верхней (при растяжении) границы поверхности ползучести в зависимости от накопленной деформации ползучести. Точки 4, 8, 13, 19 и т.д. характеризуют изменение нижней (при сжатии) границы поверхности ползучести.

Таким образом, по результатам эксперимента при базовых постоянных температурах  $T_j$  определяются:

- геометрическое место пределов ползучести при растяжении с заданным допуском на остаточную деформацию;
- геометрическое место обратных пределов ползучести при сжатии (рис. 4).

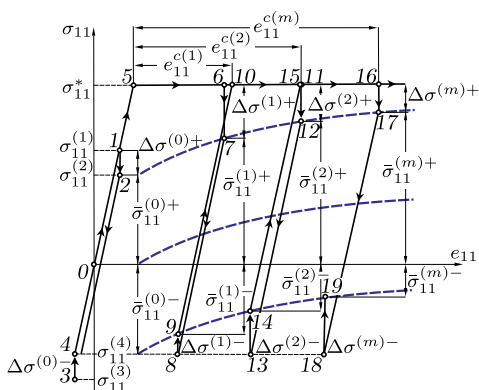


Рис. 3. Базовый эксперимент по схеме мягкого нагружения

[Figure 3. Soft loading experiment]

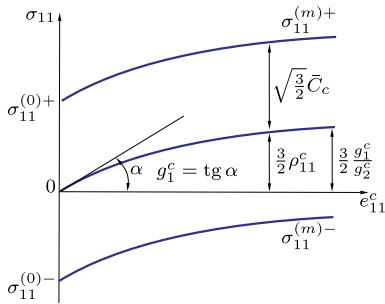


Рис. 4. Геометрическое место пределов ползучести при растяжении и сжатии

[Figure 4. The geometric value of the tensile and compressive creep limits]

Зависимость радиуса поверхности ползучести, соответствующей нулевой скорости деформации ползучести, определяется формулой

$$\bar{C}_c = \sqrt{1/6}(\sigma_{11}^{(m)+} + \sigma_{11}^{(m)-}).$$

Для определения модулей кинематического (анизотропного) упрочнения  $g_1^c(T)$  и  $g_2^c(T)$  необходимо проинтегрировать соотношение (8) при температуре  $T_j = \text{const}$ :

$$\rho_{11}^c = \frac{g_1^c}{g_2^c}(1 - \exp(-g_2^c e_{11}^c)), \quad (20)$$

где  $g_1^c$  — тангенс угла наклона касательной к кривой  $\rho_{11}^c \bar{e}_{11}^c$  в начале координат (рис. 4),  $\rho_{\text{max}}^c = g_1^c/g_2^c$  — предельное асимптотическое значение  $\rho_{11}^c$  при данной температуре  $T_j$ . Отсюда определяются модули  $g_1^c$  и  $g_2^c$  анизотропного (кинематического) упрочнения.

При одноосном напряженном состоянии лабораторного образца соотношения (1)–(18) принимают вид

$$\begin{aligned} \sqrt{S_{ij}^c S_{ij}^c} - \bar{C}_c &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left( \sigma'_{11} - \frac{3}{2} \rho_{11}^c - \bar{\sigma}_c \right); \\ \dot{e}_{11}^c &= \frac{2}{3} \lambda_c \left( \sigma'_{11} - \frac{3}{2} \rho_{11}^c - \bar{\sigma}_c \right), \end{aligned} \quad (21)$$

где  $\bar{\sigma}_c = \bar{\sigma}_c(e_{11}^c, T)$  — предел ползучести материала, соответствующий нулевой скорости ползучести;

$$\begin{aligned} \dot{\chi}_c &= \dot{e}_{11}^c, \quad \chi_c = e_{11}^c; \\ \bar{C}_c &= \sqrt{2/3} \bar{\sigma}_c. \end{aligned}$$

Параметры  $\lambda_c^{(0)}$  и  $\lambda_c^{\text{II}}$  определяются из соотношений (20) и (21) соответственно:

$$\lambda_c^{(0)} = \frac{3}{2} \frac{\dot{e}_{11}^{c \text{ in}}}{\sigma'_{11} - \bar{\sigma}_c}, \quad \lambda_c^{\text{II}} = \frac{3}{2} \frac{\dot{e}_{11}^{c \text{ st}}}{\sigma'_{11} - (3/2)\rho_{11}^c - \bar{\sigma}_c},$$

где  $\dot{e}_{11}^{c \text{ in}}$  — начальная скорость деформации ползучести в точке  $e_{11}^c = 0$  на кривой  $e_{11}^c(t)$ ,  $\dot{e}_{11}^{c \text{ st}}$  — скорость деформации ползучести на участке установившейся ползучести (участок II на рис. 2).

Экспериментальное определение материальных параметров эволюционных уравнений накопления повреждений проводится на второй стадии процесса накопления повреждений, с которой начинается значимое влияние поврежденности на физико-механические характеристики материала, при одновременном расчете экспериментальных процессов деформирования на этой стадии с использованием определяющих соотношений МПС. Метод заключается в том, что все отклонения результатов численного моделирования процессов деформирования без учета влияния поврежденности от экспериментальных на второй стадии процесса накопления повреждений приписываются влиянию поврежденности  $\omega$  (уменьшение модуля упругости, падение

амплитуды напряжений при постоянной амплитуде деформаций, увеличение амплитуды деформаций при постоянной амплитуде напряжений и т.п.).

Приближенно границы  $W_c^a$  и  $W_c^f$  могут быть определены из испытаний на ползучесть при заданной амплитуде напряжений по моменту начала разупрочнения материала ( $W_c^a$  определяются по началу второго участка кривой ползучести, а  $W_c^f$  — по моменту образования макроскопической трещины).

В табл. 1, 2 и 3 приведены материальные параметры титанового сплава ВТ6 в зависимости от уровня наводороживания при температуре 600 °С.

Таблица 1

Материальные параметры математической модели ползучести [Material parameters of the mathematical creep model]

Материальные параметры модели [Material model parameters]	исходное состояние сплава [initial state of alloy]	уровень наводороживания [hydrogen saturation level], %	
		0.15	0.3
Модуль объемной упругости $K$ , МПа [Module of volumetric elasticity $K$ , МПа]		62 855	
Модуль сдвига $G$ , МПа [Shear modulus $G$ , МПа]		29 010	
Длина участка неустановившейся ползучести $\chi_c^{(1)}$ [Length of the unsteady creep area $\chi_c^{(1)}$ ]		0.005	0.003
Модуль кинематического упрочнения $g_1^c$ , МПа [Kinematic hardening module $g_1^c$ , МПа]		3 500	
Модуль кинематического упрочнения $g_2^c$ [Kinematic hardening module $g_2^c$ ]	157.7	330.0	340.0
Энергия окончания первой стадии накопления повреждений $W_c^a$ , МДж/м <sup>3</sup> [Energy of the first level of damage accumulation $W_c^a$ , MJ/m <sup>3</sup> ]	4.00	3.00	0
Энергия разрушения при ползучести $W_c^f$ , МДж/м <sup>3</sup> [Energy of damage during creep $W_c^f$ , MJ/m <sup>3</sup> ]	19.0	10.0	8.50
Начальный радиус поверхности ползучести нулевого уровня $C_c$ , МПа [Initial radius of the zero-level creep surface $C_c$ , МПа]	15.0	14.0	12.0

Таблица 2

Зависимость радиуса  $C_c$  (МПа) поверхности ползучести нулевого уровня от длины пути  $\chi_c$  пластического деформирования [Dependence of the radius of the zero-level creep surface ( $C_c$ , МПа) on the length of the plastic deformation path ( $\chi_c$ )]

		Длина пути $\chi_c$ пластического деформирования Length of the plastic deformation path ( $\chi_c$ )									
		0	0.03	0.04	0.06	0.08	0.10	0.12	0.14	0.16	0.20
исходное состояние сплава [initial state of alloy]		15.0		14.9	14.7	14.3	13.0	8.50	3.75	2.00	
	уровень наводороживания [hydrogen saturation level], %	0.15	14.0	13.95	13.9	13.7	13.3	12	7.50		
	0.3	12.0	11.0	8.00	5.50	3.60	2.00	1.45	1.20	1.00	

Таблица 3

Зависимость коэффициентов пропорциональности  $\lambda_c^0$  и  $\lambda_c^{\text{II}}$  (1/МПа·ч) от интенсивности напряжения  $\sigma_i$  (МПа) [Dependence of the proportionality coefficients  $\lambda_c^0$  and  $\lambda_c^{\text{II}}$  (1/МПа·h) on the stress intensity  $\sigma_i$  (МПа)]

		Интенсивности напряжения $\sigma_i$ (МПа) [Stress intensity $\sigma_i$ (МПа)]					
		0	20	40	50	70	80
Коэффициент $\lambda_c^0$ (1/МПа·ч) [Coefficient $\lambda_c^0$ (1/МПа·h)]							
исходное состояние сплава [initial state of alloy]		0.00100					
уровень наводо- раживания [hydrogen saturation level], %	0.15	0.00075					
	0.3	0.00040		0.00075		0.00120	0.00170
Коэффициент $\lambda_c^{\text{II}}$ (1/МПа·ч) [Coefficient $\lambda_c^{\text{II}}$ (1/МПа·h)]							
исходное состояние сплава [initial state of alloy]		0.00041					
уровень наводо- раживания [hydrogen saturation level], %	0.15	0.00041					
	0.3	0.00015		0.00024		0.00045	0.00065

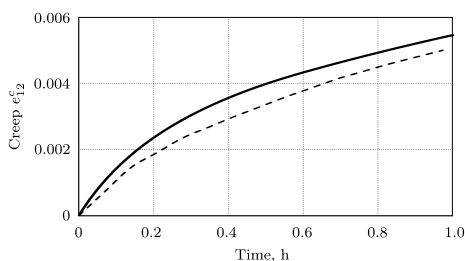


Рис. 5. Кривые ползучести при кручении (схема нагружения А, исходное состояние)

[Figure 5. Torsional creep curves (loading scheme A, initial state; solid line — calculation; dashed line — experimental data)]

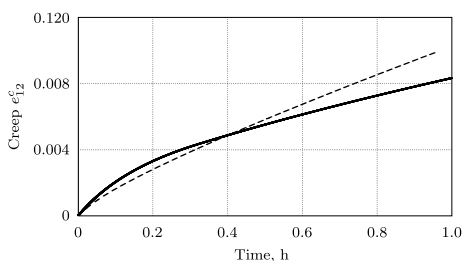


Рис. 6. Кривые ползучести при кручении (схема нагружения В, исходное состояние)

[Figure 6. Torsional creep curves (loading scheme B, initial state; solid line — calculation; dashed line — experimental data)]

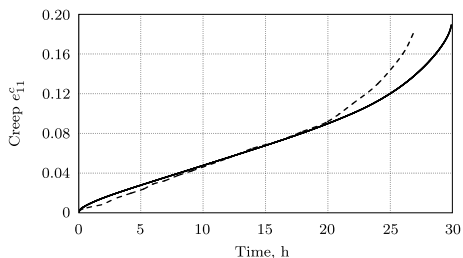


Рис. 7. Кривые ползучести при растяжении (схема нагружения С, исходное состояние)

[Figure 7. Tensile creep curves (loading scheme C, initial state; solid line — calculation; dashed line — experimental data)]

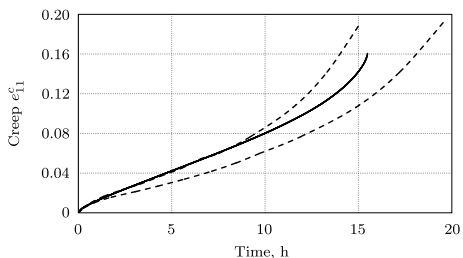


Рис. 8. Кривые ползучести при растяжении (схема нагружения D, исходное состояние)

[Figure 8. Tensile creep curves (loading scheme D, initial state; solid line — calculation; dashed lines — experimental data)]

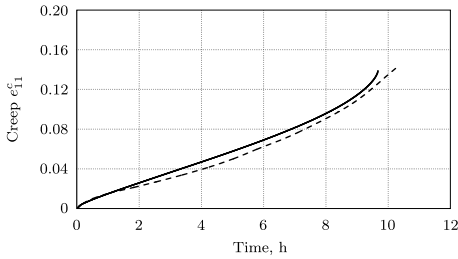


Рис. 9. Кривые ползучести при растяжении (схема нагружения  $E$ , исходное состояние)

[Figure 9. Tensile creep curves (loading scheme  $E$ , initial state; solid line — calculation; dashed line — experimental data)]

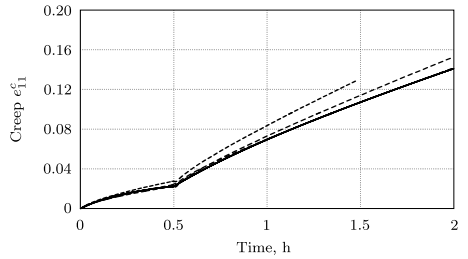


Рис. 10. Зависимость осевой деформации  $\epsilon_{11}^c$  от времени (схема нагружения  $F$ , исходное состояние)

[Figure 10. Dependence of axial deformation  $\epsilon_{11}^c$  on the time (loading scheme  $F$ , initial state; solid line — calculation; dashed lines — experimental data)]

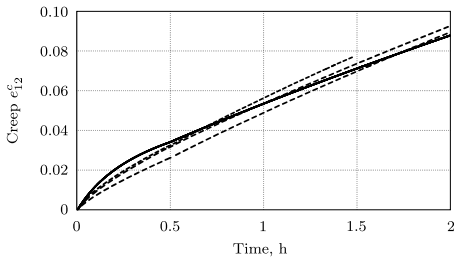


Рис. 11. Зависимость осевой деформации  $\epsilon_{12}^c$  от времени (схема нагружения  $F$ , исходное состояние)

[Figure 11. Dependence of axial deformation  $\epsilon_{12}^c$  on the time (loading scheme  $F$ , initial state; solid line — calculation; dashed lines — experimental data)]

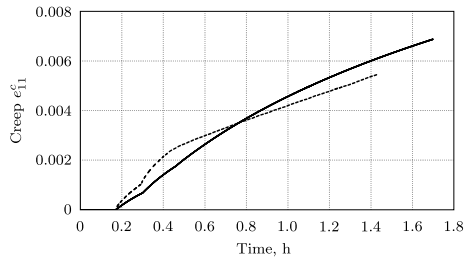


Рис. 12. Зависимость сдвиговой деформации  $\epsilon_{11}^c$  от времени (схема нагружения  $J$ , исходное состояние)

[Figure 12. Dependence of the shear deformation  $\epsilon_{11}^c$  on the time (loading scheme  $J$ , initial state; solid line — calculation; dashed line — experimental data)]

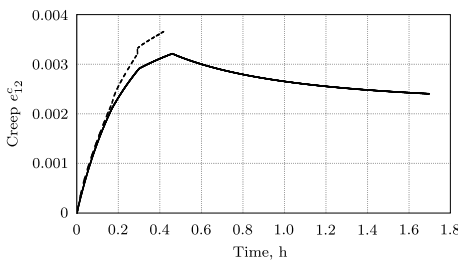


Рис. 13. Зависимость сдвиговой деформации  $\epsilon_{12}^c$  от времени (схема нагружения  $J$ , исходное состояние)

[Figure 13. Dependence of the shear deformation  $\epsilon_{12}^c$  on the time (loading scheme  $J$ , initial state; solid line — calculation; dashed line — experimental data)]

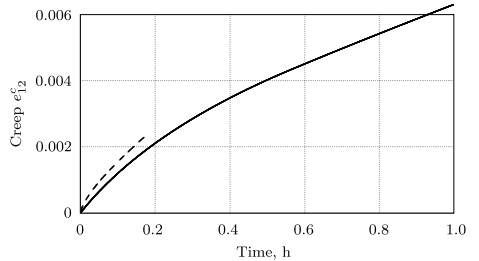


Рис. 14. Кривая ползучести при кручении (схема нагружения  $A$ , уровень наводораживания — 0.15%)

[Figure 14. Torsional creep curve (loading scheme  $A$ , hydrogen saturation level — 0.15%; solid line — calculation; dashed line — experimental data)]

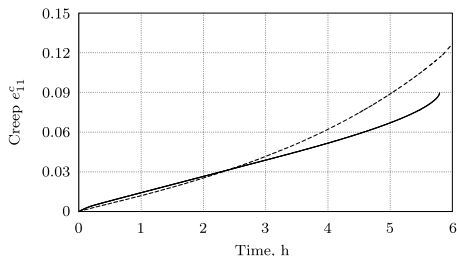


Рис. 15. Кривая ползучести при кручении (схема нагружения  $D$ , уровень наводороживания — 0.15%)

[Figure 15. Torsional creep curve (loading scheme  $D$ , hydrogen saturation level — 0.15%; solid line — calculation; dashed line — experimental data)]

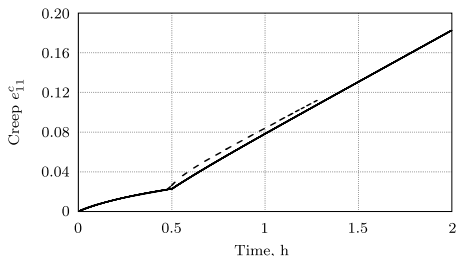


Рис. 16. Зависимость осевой деформации  $\epsilon_{11}^c$  от времени (схема нагружения  $F$ , уровень наводороживания — 0.3%)

[Figure 16. Dependence of axial deformation  $\epsilon_{11}^c$  on the time (loading scheme  $F$ , hydrogen saturation level — 0.3%; solid line — calculation; dashed line — experimental data)]

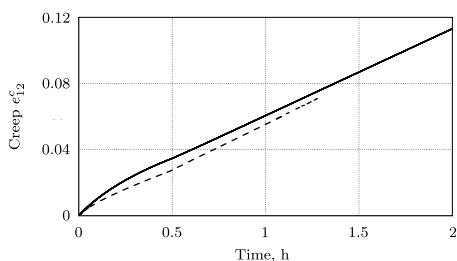


Рис. 17. Зависимость осевой деформации  $\epsilon_{11}^c$  от времени (схема нагружения  $F$ , уровень наводороживания — 0.3%)

[Figure 17. Dependence of axial deformation  $\epsilon_{11}^c$  on the time (loading scheme  $F$ , hydrogen saturation level — 0.3%; solid line — calculation; dashed line — experimental data)]

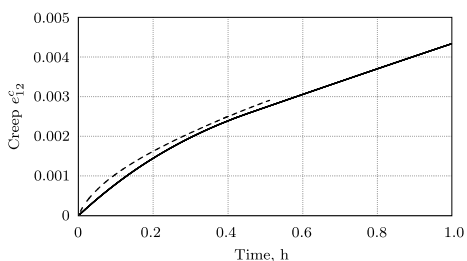


Рис. 18. Кривая ползучести при кручении (схема нагружения  $A$ , уровень наводороживания — 0.3%)

[Figure 18. Torsional creep curve (loading scheme  $A$ , hydrogen saturation level — 0.3%; solid line — calculation; dashed line — experimental data)]

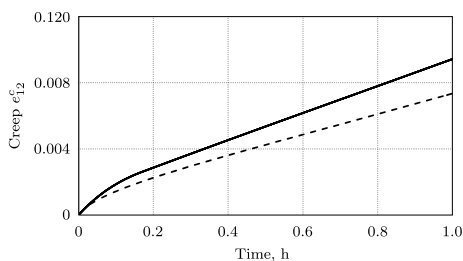


Рис. 19. Кривая ползучести при кручении (схема нагружения  $B$ , уровень наводороживания — 0.3%)

[Figure 19. Torsional creep curve (loading scheme  $B$ , hydrogen saturation level — 0.3%; solid line — calculation; dashed line — experimental data)]

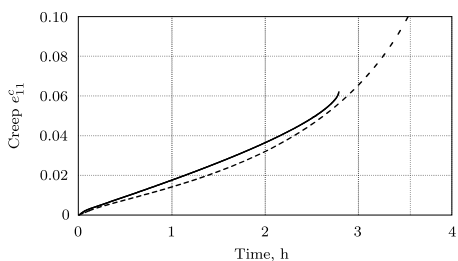


Рис. 20. Кривая ползучести при растяжении (схема нагружения  $D$ , уровень наводороживания — 0.3%)

[Figure 20. Tensile creep curve (loading scheme  $D$ , hydrogen saturation level — 0.3%; solid line — calculation; dashed line — experimental data)]

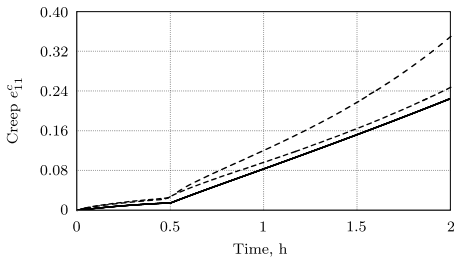


Рис. 21. Зависимость осевой деформации  $\epsilon_{11}^c$  от времени (схема нагружения  $F$ , уровень наводороживания — 0.3%)

[Figure 21. Dependence of axial deformation  $\epsilon_{11}^c$  on the time (loading scheme  $F$ , hydrogen saturation level — 0.3%; solid line — calculation; dashed lines — experimental data)]

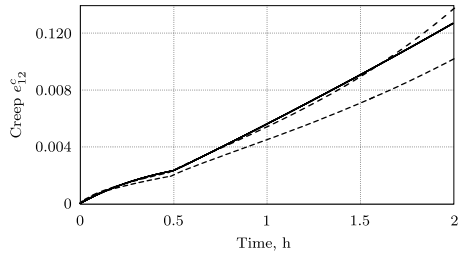


Рис. 22. Зависимость осевой деформации  $\epsilon_{12}^c$  от времени (схема нагружения  $F$ , уровень наводороживания — 0.3%)

[Figure 22. Dependence of axial deformation  $\epsilon_{12}^c$  on the time (loading scheme  $F$ , hydrogen saturation level — 0.3%; solid line — calculation; dashed lines — experimental data)]

#### 4. Численные результаты и сравнение с опытными данными.

На рис. 5–22 представлены результаты расчетов процесса ползучести при растяжении и кручении по программе испытаний, приведенной на рис. 1. Здесь сплошными линиями приведены результаты численного моделирования экспериментальных процессов с использованием определяющих соотношений МПС (1)–(19), а пунктирными — соответствующие экспериментальные данные.

Сравнивая экспериментальные данные с результатами численного моделирования экспериментальных процессов, можно отметить качественное и количественное совпадение результатов. Некоторые отличия расчетных данных от экспериментальных могут быть объяснены неточностью при задании материальных параметров и скалярных функций.

**Заключение.** Развита математическая модель МПС, описывающая процессы высокотемпературной нестационарной ползучести и длительной прочности конструкционных материалов (металлов и их сплавов) при многоосных напряженных состояниях и произвольных сложных режимах комбинированного термомеханического нагружения.

Разработана экспериментально-теоретическая методика определения материальных параметров и скалярных функций предложенных определяющих соотношений МПС. Получены материальные параметры и скалярные функции математической модели МПС для титанового сплава ВТ6 при температуре 600 °С в исходном состоянии и при уровнях наводороживания 0.15 и 0.3 %.

Проведены численные исследования процессов высокотемпературной ползучести титанового сплава ВТ6 при одноосных и многоосных напряженных состояниях. Численные результаты сопоставлялись с экспериментальными данными, что позволило сделать выводы о достаточной для инженерных расчетов точности описания процессов нестационарной ползучести и длительной прочности конструкционных сплавов при одноосных и многоосных напряженных состояниях с учетом влияния агрессивной среды.

**Конкурирующие интересы.** Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.



**Авторский вклад и ответственность.** Л.А. Игумнов — визуализация и верификация результатов, работа с черновиком и переработанным вариантом рукописи. И.А. Волков — формулировка целей и задач исследования, работа с черновиком и переработанным вариантом рукописи. Д.А. Казаков — идея исследования, формулировка целей и задач исследования, визуализация и верификация результатов, работа с черновиком и переработанным вариантом рукописи. Д.Н. Шишулин — проведение численных расчетов, визуализация и верификация результатов, работа с черновиком и переработанным вариантом рукописи. И.А. Модин — проведение численных расчетов и экспериментальных исследований, обработка и анализ результатов, работа с черновиком и переработанным вариантом рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

**Финансирование.** Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (РНФ 19-19-00062, Самарский государственный технический университет).

### Библиографический список

1. Волков И. А., Коротких Ю. Г. *Уравнения состояния вязкоупругопластических сред с повреждениями*. М.: Физматлит, 2008. 424 с.
2. Collins J. A. *Failure of Materials in Mechanical Design: Analysis, Prediction, Prevention*. New York: John Wiley and Sons, 1981.
3. Дульнев Р. А., Котов П. И. *Термическая усталость металлов*. М.: Машиностроение, 1980. 200 с.
4. Казанцев А. Г. Исследование взаимодействия малоциклового усталости и использования при неизотермическом нагружении // *Проблемы прочности*, 1985. № 5. С. 25–31.
5. Работнов Ю. Н. *Ползучесть элементов конструкций*. Наука, 1966. 752 с.
6. Гохфельд Д. А., Садаков О. С. *Пластичность и ползучесть элементов конструкций при повторных нагружениях*. М.: Машиностроение, 1984. 256 с.
7. Дегтярев В. П. *Пластичность и ползучесть машиностроительных конструкций*. М.: Машиностроение, 1967. 130 с.
8. Малинин Н. Н. *Прикладная теория пластичности и ползучести*. М.: Машиностроение, 1968. 400 с.
9. Локощенко А. М. *Ползучесть и длительная прочность металлов*. М.: Физматлит, 2016. 504 с.
10. Boyle J. T., Spence J. *Stress Analysis for Creep*. London: Butterworth, 1980. viii+283 pp. <https://doi.org/10.1016/C2013-0-00873-0>.
11. Волков И. А., Игумнов Л. А., Коротких Ю. Г. *Прикладная теория вязкопластичности*. Н. Новгород: Нижегородск. гос. ун-т, 2015. 318 с.
12. Бондарь В. С. *Неупругость. Варианты теории*. М.: Физматлит, 2004. 144 с.
13. Perzyna P. Fundamental problems in viscoplasticity // *Advances in Applied Mechanics*, 1966. vol. 9. pp. 243–377. [https://doi.org/10.1016/S0065-2156\(08\)70009-7](https://doi.org/10.1016/S0065-2156(08)70009-7).
14. Шевченко Ю. Н., Терехов Р. Г. *Физические уравнения термовязкопластичности*. Киев: Наук. думка, 1982. 240 с.
15. Chaboche J. L. Constitutive equations for cyclic plasticity and cyclic viscoplasticity // *Int. J. Plasticity*, 1989. vol. 5, no. 3. pp. 247–302. [https://doi.org/10.1016/0749-6419\(89\)90015-6](https://doi.org/10.1016/0749-6419(89)90015-6).
16. Malinin N. N., Khadjinsky G. M. Theory of creep with anisotropic hardening // *Int. J. Mech. Sci.*, 1972. vol. 14, no. 4. pp. 235–246. [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(72\)90065-3](https://doi.org/10.1016/0020-7403(72)90065-3).
17. Miller A. An inelastic constitutive model for monotonic, cyclic, and creep deformation: Part I—Equations development and analytical procedures // *J. Eng. Mater. Technol.*, 1976. vol. 98, no. 2. pp. 97–105. <https://doi.org/10.1115/1.3443367>.

18. Krieg R. D., Swearngen J. C., Jones W. B. A physically-based internal variable model for rate-dependent plasticity // *Unified Constitutive Equations for Creep and Plasticity*. Dordrecht: Springer, 1978. pp. 245–271. [https://doi.org/10.1007/978-94-009-3439-9\\_5](https://doi.org/10.1007/978-94-009-3439-9_5).
19. Ohashi Y., Ohno N., Kawai M. Evaluation of creep constitutive equations for type 304 stainless steel under repeated multiaxial loading // *J. Eng. Mater. Technol.*, 1982. vol. 104, no. 3. pp. 155–164. <https://doi.org/10.1115/1.3225059>.
20. Волков И. А., Игумнов Л. А. *Введение в континуальную механику поврежденной среды*. М.: Физматлит, 2017. 304 с.
21. Волков И. А., Игумнов Л. А., Казаков Д. А., Миронов А. А., Тарасов И. С., Шишулин Д. Н., Сметанин И. В. Модель поврежденной среды для описания длительной прочности конструкционных материалов (металлов и их сплавов) // *Проблемы прочности и пластичности*, 2017. Т. 79, № 3. С. 285–300. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2017-79-3-285-300>.
22. Самарин Ю. П. *Уравнения состояния материалов со сложными реологическими свойствами*. Куйбышев: Куйб. гос. ун-т, 1979. 84 с.
23. Радченко В. П., Самарин Ю. П., Хренов С. М. Определяющие уравнения для материалов при наличии трех стадий ползучести // *Докл. АН СССР*, 1986. Т. 288, № 3. С. 571–574.
24. Радченко В. П., Еремин Ю. А. *Реологическое деформирование и разрушение материалов и элементов конструкций*. М.: Машиностроение-1, 2004. 263 с.
25. Казаков Д. А., Капустин С. А., Коротких Ю. Г. *Моделирование процессов деформирования и разрушения материалов и конструкций*. Н. Новгород: Нижегородск. гос. ун-т, 1994. 226 с.
26. Игумнов Л. А., Казаков Д. А., Шишулин Д. Н., Модин И. А., Жегалов Д. В. Экспериментальные исследования высокотемпературной ползучести титанового сплава ВТ6 в условиях сложного напряженного состояния под воздействием агрессивной среды // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 2. С. 286–302. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1850>.
27. Balandin V. V., Kochetkov A. V., Krylov S. V., Modin I. A. Numerical and experimental study of the penetration of a package of woven metal grid by a steel ball // *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2019. vol. 1214, 012004. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1214/1/012004>.
28. Igumnov L. A., Vlasov S. Y., Kazakov D. A., Zhegalov D. V., Modin I. A. Experimental studies of elastic-plastic deformation of structural materials under conditions of triaxial loading // *Multiscale Solid Mechanics / Advanced Structured Materials*, 141. Cham: Springer, 2021. pp. 203–212. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-54928-2\\_16](https://doi.org/10.1007/978-3-030-54928-2_16).
29. Кочетков А. В., Леонтьев Н. В., Модин И. А., Савихин А. О. Исследование деформационных и прочностных свойств металлических плетеных сеток // *Вестн. Том. гос. ун-та. Математика и механика*, 2018. № 52. С. 53–62. <https://doi.org/10.17223/19988621/52/6>.
30. Modin I. A., Kochetkov A. V., Leontiev N. V. Numerical simulation of quasistatic and dynamic compression of a granular layer // *AIP Conference Proceedings*, 2019. vol. 2116, no. 1, 270003. <https://doi.org/10.1063/1.5114277>.

MSC: 74-05, 74C99

## Numerical simulation of the creep process of titanium alloy VT6 under a multi-axis stress state taking into account the influence of an aggressive environment

© L. A. Igumnov<sup>1,2</sup>, I. A. Volkov<sup>2,3</sup>, D. A. Kazakov<sup>1,2</sup>,  
D. N. Shishulin<sup>1,2</sup>, I. A. Modin<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Samara State Technical University,

244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

<sup>2</sup> Research Institute of Mechanics,

National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod,

23, korp. 6, pr. Gagarina, Nizhny Novgorod, 603022, Russian Federation.

<sup>3</sup> Volga State University of Water Transport,

5, Nesterova str., Nizhny Novgorod, 603600, Russian Federation.

### Abstract


The problem of assessing the strength and resource of critical engineering objects is considered. The operating conditions of objects are characterized by high-temperature non-stationary thermomechanical effects, which lead to degradation of the initial strength properties of structural materials by the mechanism of long-term strength.

From the standpoint of the mechanics of a damaged medium, a mathematical model has been developed that describes the kinetics of the stress-strain state and the accumulation of damage during material degradation by the mechanism of long-term strength under conditions of a complex multiaxial stress state.

An experimental-theoretical method for finding the material parameters and scalar functions of the constitutive relations of the mechanics of a damaged medium based on the results of specially set experiments on laboratory samples is proposed.

The results of experimental studies and numerical modeling of the short-term high-temperature creep of VT6 titanium alloy under uniaxial and multiaxial stress states are presented. The numerical results are compared with the data of field experiments. Particular attention is paid to the issues of modeling the process of unsteady creep for complex deformation modes, accompanied by the rotation of the main areas of stress tensors, deformations and creep deformations, taking into account the effect of an aggressive environment, which is simulated by preliminary hydrogenation of laboratory samples to various hydrogen concentrations by mass.

### Research Article

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

**Please cite this article in press as:**

Igumnov L. A., Volkov I. A., Kazakov D. A., Shishulin D. N., Modin I. A. Numerical simulation of the creep process of titanium alloy VT6 under a multi-axis stress state taking into account the influence of an aggressive environment, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 3, pp. 435–456. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1873> (In Russian).

**Authors' Details:**

Leonid A. Igumnov  <https://orcid.org/0000-0003-3035-0119>

Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Leading Researcher; Dept. of Applied Mathematics and Computer Science<sup>1</sup>; Chief Researcher; Lab. of Simulation of Physical and Mechanical Processes<sup>2</sup>; e-mail: [igumnov@mech.unn.ru](mailto:igumnov@mech.unn.ru)

It is shown that the developed version of the constitutive relations of the mechanics of a damaged medium allows, with sufficient accuracy for engineering calculations, to describe unsteady creep and long-term strength of structural alloys under multiaxial stress states, taking into account the effect of an aggressive medium (hydrogen corrosion).

**Keywords:** unsteady creep, long-term strength, damage, resource, mathematical modeling, basic experiment, material parameters, numerical and full-scale experiment, aggressive environment, hydrogen saturation.

Received: 27<sup>th</sup> June, 2021 / Revised: 9<sup>th</sup> September, 2021 /

Accepted: 20<sup>th</sup> September, 2021 / First online: 30<sup>th</sup> September, 2021

---

**Competing interests.** We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

**Authors' contributions and responsibilities.** L.A. Igumnov: Visualization and verification of results; Writing — original draft and review & editing. I.A. Volkov: Formulation of research goals and aims; Writing — original draft and review & editing. D.A. Kazakov: Idea of study; Formulation of research goals and aims; Visualization and verification of results; Writing — original draft and review & editing. D.N. Shishulin: Numerical calculations; Visualization and verification of results; Writing — original draft and review & editing. I.A. Modin: Numerical calculations; Experimental research; Processing and verification of results; Writing — original draft and review & editing. The authors are absolutely responsible for submit the final manuscript to print. Each author has approved the final version of manuscript.

**Funding.** This study was supported by the Russian Science Foundation (RSF 19–19–00062, Samara State Technical University).

## References

1. Volkov I. A., Korotkikh Yu. G. *Uravneniia sostoianiia viazkouprugoplasticheskikh sred s povrezhdeniiami* [Equations of State of Damaged Viscoelastoplastic Media]. Moscow, Fizmatlit, 2008, 424 pp. (In Russian)
2. Collins J. A. *Failure of Materials in Mechanical Design: Analysis, Prediction, Prevention*. New York, John Wiley and Sons, 1981.


---

Ivan A. Volkov  <https://orcid.org/0000-0003-1176-4906>

Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Chief Researcher; Lab. of Physical and Mechanical Testing of Materials<sup>2</sup>; Head of Dept.; Dept of Hoisting-and-transport Machines and Machine Repair<sup>3</sup>; e-mail: [pmptmvgavt@yandex.ru](mailto:pmptmvgavt@yandex.ru)

Dmitriy A. Kazakov  <https://orcid.org/0000-0002-9316-4105>

Cand. Techn. Sci.; Researcher; Dept. of Applied Mathematics and Computer Science<sup>1</sup>; Researcher; Lab. of Physical and Mechanical Testing of Materials<sup>2</sup>; e-mail: [kazakov@mech.unn.ru](mailto:kazakov@mech.unn.ru)

Denis N. Shishulin  <https://orcid.org/0000-0002-6527-557X>

Cand. Techn. Sci.; Researcher; Dept. of Applied Mathematics and Computer Science<sup>1</sup>; Researcher; Lab. of Physical and Mechanical Testing of Materials<sup>2</sup>; e-mail: [shishulindn@gmail.com](mailto:shishulindn@gmail.com)

Ivan A. Modin  <https://orcid.org/0000-0002-3561-4606>

Cand. Techn. Sci.; Researcher; Dept. of Applied Mathematics and Computer Science<sup>1</sup>; Researcher; Lab. of Simulation of Physical and Mechanical Processes<sup>2</sup>; e-mail: [mianet@mail.ru](mailto:mianet@mail.ru)

3. Dul'nev R. A., Kotov P. I. *Termicheskaiia ustalost' metallov* [Thermal Fatigue of Metals]. Moscow, Mashinostroenie, 1980, 200 pp. (In Russian)
4. Kazantsev A. G. Interaction of low-cycle fatigue and creep in nonisothermal loading, *Strength Mater.*, 1985, vol. 17, no. 5, pp. 610–617. <https://doi.org/10.1007/BF01524181>.
5. Rabotnov Yu. N. *Creep of Structural Members*, North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics. Amsterdam, North-Holland, 1969, ix+822 pp.
6. Gokhfeld D. A., Sadakov O. S. *Plastichnost' i polzuchest' elementov konstruksii pri povtornykh nagruzheniiaxh* [Plasticity and Creep of Structural Elements under Repeated Loading]. Moscow, Mashinostroenie, 1984, 256 pp. (In Russian)
7. Degtyarev V. P. *Plastichnost' i polzuchest' mashinostroitel'nykh konstruksii* [Plasticity and Creep of Mechanical-Engineering Structures]. Moscow, Mashinostroenie, 1967, 130 pp. (In Russian)
8. Malinin N. N. *Prikladnaia teoriia plastichnosti i polzuchesti* [The Applied Theory of Plasticity and Creep]. Moscow, Mashinostroenie, 1968, 400 pp. (In Russian)
9. Lokoshchenko A. M. *Creep and Long-Term Strength of Metals*. Boca, Raton, CRC Press, 2018, xviii+545 pp. <https://doi.org/10.1201/b22242>.
10. Boyle J. T., Spence J. *Stress Analysis for Creep*. London, Butterworth, 1980, viii+283 pp. <https://doi.org/10.1016/C2013-0-00873-0>.
11. Volkov I. A., Igumnov L. A., Korotkikh Yu. G. *Prikladnaia teoriia viazkoplastichnosti* [Applied Theory of Viscoplasticity]. Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod State Univ., 2015, 318 pp. (In Russian)
12. Bondar' V. S. *Neuprugost'. Varianty teorii* [Inelasticity. Theory Variants]. Moscow, Fizmatlit, 2004, 144 pp. (In Russian)
13. Perzyna P. Fundamental problems in viscoplasticity, *Advances in Applied Mechanics*, 1966, vol. 9, pp. 243–377. [https://doi.org/10.1016/S0065-2156\(08\)70009-7](https://doi.org/10.1016/S0065-2156(08)70009-7).
14. Shevchenko Iu. N., Terekhov R. G. *Fizicheskie uravneniia termoviazkoplastichnosti* [Physical Equations of Thermoviscoplasticity]. Kiev, Nauk. dumka, 1982, 240 pp. (In Russian)
15. Chaboche J. L. Constitutive equations for cyclic plasticity and cyclic viscoplasticity, *Int. J. Plasticity*, 1989, vol. 5, no. 3, pp. 247–302. [https://doi.org/10.1016/0749-6419\(89\)90015-6](https://doi.org/10.1016/0749-6419(89)90015-6).
16. Malinin N. N., Khadjinsky G. M. Theory of creep with anisotropic hardening, *Int. J. Mech. Sci.*, 1972, vol. 14, no. 4, pp. 235–246. [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(72\)90065-3](https://doi.org/10.1016/0020-7403(72)90065-3).
17. Miller A. An inelastic constitutive model for monotonic, cyclic, and creep deformation: Part I—Equations development and analytical procedures, *J. Eng. Mater. Technol.*, 1976, vol. 98, no. 2, pp. 97–105. <https://doi.org/10.1115/1.3443367>.
18. Krieg R. D., Swearngen J. C., Jones W. B. A physically-based internal variable model for rate-dependent plasticity, In: *Unified Constitutive Equations for Creep and Plasticity*. Dordrecht, Springer, 1978, pp. 245–271. [https://doi.org/10.1007/978-94-009-3439-9\\_5](https://doi.org/10.1007/978-94-009-3439-9_5).
19. Ohashi Y., Ohno N., Kawai M. Evaluation of creep constitutive equations for type 304 stainless steel under repeated multiaxial loading, *J. Eng. Mater. Technol.*, 1982, vol. 104, no. 3, pp. 155–164. <https://doi.org/10.1115/1.3225059>.
20. Volkov I. A., Igumnov L. A. *Vvedenie v kontinual'nuiu mekhaniku povrezhdennoi sredy* [Introduction to the Continuum Mechanics of a Damaged Medium]. Moscow, Fizmatlit, 2017, 304 pp. (In Russian)
21. Volkov I. A., Igumnov L. A., Kazakov D. A., Mironov A. A., Tarasov I. S., Shishulin D. N., Smetanin I. V. A damaged medium model for describing the process of long-term strength of structural materials (metals and their alloys), *Problems of Strength and Plasticity*, 2017, vol. 79, no. 3, pp. 285–300 (In Russian). <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2017-79-3-285-300>.
22. Samarin Yu. P. *Uravneniia sostoyaniya materialov so slozhnymi reologicheskimi svoystvami* [Equations of State of Materials with Complex Rheological Properties]. Kuibyshev, Kuibyshev State Univ., 1979, 84 pp. (In Russian)

23. Radchenko V. P., Samarin Yu. P., Khrenov S. M. Determining equations for the materials in the presence of three stages of creep, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1986, vol. 288, no. 3, pp. 571–574 (In Russian).
24. Radchenko V. P., Eremin Yu. A. *Reologicheskoe deformirovanie i razrushenie materialov i elementov konstruksii* [Rheological Deformation and Destruction of Materials and Structural Elements]. Moscow, Mashinostroenie-1, 2004, 263 pp. (In Russian)
25. Kazakov D. A., Kapustin S. A., Korotkikh Yu. G. *Modelirovanie protsessov deformirovaniia i razrusheniia materialov i konstruksii* [Modeling the Processes of Deformation and Destruction of Materials and Structures]. Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod State Univ., 1994, 226 pp. (In Russian)
26. Igumnov L. A., Kazakov D. A., Shishulin D. N., Modin I. A., Zhegalov D. V. Experimental studies of high-temperature creep of titanium alloy VT6 under conditions of a complex stress state under the influence of an aggressive medium, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 2, pp. 286–302 (In Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1850>.
27. Balandin V. V., Kochetkov A. V., Krylov S. V., Modin I. A. Numerical and experimental study of the penetration of a package of woven metal grid by a steel ball, *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2019, vol. 1214, 012004. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1214/1/012004>.
28. Igumnov L. A., Vlasov S. Y., Kazakov D. A., Zhegalov D. V., Modin I. A. Experimental studies of elastic-plastic deformation of structural materials under conditions of triaxial loading, In: *Multiscale Solid Mechanics*, Advanced Structured Materials, 141. Cham, Springer, 2021, pp. 203–212. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-54928-2\\_16](https://doi.org/10.1007/978-3-030-54928-2_16).
29. Kochetkov A. V., Leont'ev N. V., Modin I. A., Savikhin A. O. Study of the stress-strain and strength properties of the metal woven grids, *Vestn. Tomsk. Gosud. Univ. Matem. Mekh.* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics], 2018, no. 52, pp. 53–62 (In Russian). <https://doi.org/10.17223/19988621/52/6>.
30. Modin I. A., Kochetkov A. V., Leontiev N. V. Numerical simulation of quasistatic and dynamic compression of a granular layer, *AIP Conference Proceedings*, 2019, vol. 2116, no. 1, 270003. <https://doi.org/10.1063/1.5114277>.