Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2022. Т. 26, № 2. С. 273–292
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1893
EDN: LKMGUE

УДК 517.956

Начально-граничная задача для уравнения в частных производных высшего четного порядка с оператором Бесселя

А. К. Уринов[1,2]**, *М. С. Азизов***[1]

[1] Ферганский государственный университет,
Узбекистан, 150100, Фергана, ул. Мураббийлар, 19.
[2] Институт математики имени В. И. Романовского АН Республики Узбекистан,
Узбекистан, 100174, Ташкент, ул. Университетская, 46.

Аннотация

В данной статье для дифференциального уравнения в частных производных высокого четного порядка с оператором Бесселя в прямоугольнике сформулирована начально-граничная задача. На основе метода разделения переменных к поставленной задаче получена спектральная задача для обыкновенного дифференциального уравнения высокого четного порядка. Доказана самосопряженность последней задачи, откуда следует существование системы ее собственных функций, а также ортонормированность и полнота этой системы. Далее исследованы равномерная сходимость некоторых билинейных рядов и порядок коэффициентов Фурье, зависящих от найденных собственных функций. Решение изучаемой задачи найдено в виде суммы ряда Фурье по системе собственных функций спектральной задачи. Доказана равномерная сходимость этого ряда, а также рядов, полученных из него почленным дифференцированием. Методом спектрального анализа доказана единственность решения задачи. Получена оценка для решения задачи, откуда следует его непрерывная зависимость от заданных функций.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение в частных производных четного порядка, оператор Бесселя, начально-граничная задача, спектральный метод, функция Грина, интегральное уравнение, существование, единственность и устойчивость решения.

Дифференциальные уравнения и математическая физика
Научная статья

Образец для цитирования
Уринов А. К., Азизов М. С. Начально-граничная задача для уравнения в частных производных высшего четного порядка с оператором Бесселя // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 2. С. 273–292. EDN: LKMGUE. DOI: 10.14498/vsgtu1893.

Сведения об авторах

Ахмаджон Кушакович Уринов https://orcid.org/0000-0002-9586-1799
доктор физико-математических наук, профессор; профессор каф. математического анализа и дифференциальных уравнений[1]; ведущий научный сотрудник[2]; e-mail: urinovak@mail.ru

Музаффар Сулаймонович Азизов https://orcid.org/0000-0002-2091-9300
докторант; каф. математического анализа и дифференциальных уравнений[1];
e-mail: muzaffar.azizov.1988@mail.ru

Получение: 29 октября 2021 г. / Исправление: 9 марта 2022 г. /
Принятие: 12 марта 2022 г. / Публикация онлайн: 23 мая 2022 г.

Введение. Известно, что дифференциальные уравнения в частных производных имеют многочисленные приложения в науке и технике [1, 2]. В настоящее время эта теория развивается быстрыми темпами в различных направлениях. Особое место занимают дифференциальные уравнения в частных производных высокого четного порядка. Имеются многочисленные научные работы, в которых сформулированы и изучены начальные и начально-граничные задачи для таких уравнений. Например, в работе [3] в области $\Delta = \{(x,t) : 0 < x < p; 0 < t < T\}$ для уравнения $u_{tt} - u_{xxxx} = f(x,t)$ поставлена и исследована задача с условиями

$$u(x,0) = u(x,T) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant p,$$

$$u(0,t) = u_{xx}(0,t) = u(p,t) = u_{xx}(p,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1}$$

а в работе [4] — с условиями

$$u(x,0) = u_t(x,T) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant p,$$

$$u_x(0,t) = u_{xxx}(0,t) = u_x(p,t) = u_{xxx}(p,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{2}$$

В работах [5, 6] в области Δ аналогичные задачи изучены для уравнений $u_{xxxx} - u_{tt} - \lambda u = f(x,t)$ и $u_{xxxx} - u_{tt} - c(x,t)u = f(x,t)$ соответственно, а в работах [7–9] — для уравнения $u_{xxxx} + u_{tt} = f(x,t)$. В работе [10] для уравнения $u_{tt} + \alpha^2 u_{xxxx} = 0$ в верхней полуплоскости изучена задача Коши, а в работах [11–13] в области Δ исследованы начально-граничные задачи для уравнения $u_{tt} + \alpha^2 u_{xxxx} = f(x,t)$ с начальными условиями $u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = \psi(x)$, $0 \leqslant x \leqslant p$ и различными граничными условиями, в том числе с условиями $u(0,t) = u_x(0,t) = u_{xx}(p,t) = u_{xxx}(p,t) = 0$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Начально-граничная задача в области Δ для уравнения $u_{xxxx} + u_{tt} + (2\gamma/t)u_t = f(x,t)$, где $\gamma \in (0, 1/2)$ — const, с начальными $u(x,0) = \varphi_1(x)$, $\lim\limits_{t\to 0} t^{2\gamma} u_t(x,t) = \varphi_2(x)$ и граничными условиями (1), (2) исследована в работах [14, 15] соответственно.

В работе [16] в области Δ рассмотрена задача об определении решения уравнения

$$\frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x,t), \tag{3}$$

удовлетворяющего условиям

$$\frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}} u(0,t) = \frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}} u(p,t) = 0, \quad m = \overline{0, k-1}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad k \geqslant 2 \tag{4}$$

и одной из следующих пар условий:

$$u(x,0) = u(x,T) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant p;$$

$$u(x,0) = u_t(x,T) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant p; \tag{5}$$

$$u(x,0) = u(x,T), \quad u_t(x,0) = u_t(x,T), \quad 0 \leqslant x \leqslant p,$$

причем здесь подробно исследована задача (3)–(5). В [16] также поставлена задача для уравнения (3) с условиями (5) и

$$\frac{\partial^{2m+1}}{\partial x^{2m+1}}u(0,t) = \frac{\partial^{2m+1}}{\partial x^{2m+1}}u(p,t) = 0, \quad m = \overline{0, k-1}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad k \geqslant 2.$$

В работе [17] для уравнения (3) в области Δ исследована задача с условиями (4) и

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant p.$$

В работе [18] в области $D = \{(x,t) : 0 < x < \pi; 0 < t < 2\pi\}$ для уравнения (3) при $f(x,t) \equiv 0$, $k = 2n+1$, $n \in \mathbb{N}$ исследована некорректная задача с условиями

$$\frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}}u(0,t) = \frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}}u(\pi,t) = 0, \quad m = 0, 1, \ldots, k-1;$$

$$u(\alpha\pi, t) = f(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

а в [19] для квазилинейного уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} = f\big(t, x, u(t,x)\big), \quad k \in \mathbb{N}$$

в области $D_T = \{(t,x) : 0 < t < T; 0 < x < \pi\}$ рассмотрена задача с начальными

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad u_t(T,x) = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$$

и периодическими условиями вида

$$\left.\frac{\partial^j u}{\partial x^j}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial^j u}{\partial x^j}\right|_{x=\pi}, \quad j = 0, 1, \ldots, 2k-1, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

В работе [20] в области Δ для уравнения

$$\frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x,t)$$

исследованы задачи с условиями (4), (5) и (4), $u(x,0) = u_t(x,0) = 0$.

В работе [21] изучены начально-краевые задачи для уравнения вида

$$u_{tt} + A(x,D)u(x,t) = f(x,t),$$

где $A(x,D) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x) D^\alpha$ — произвольный положительный формально самосопряженный эллиптический дифференциальный оператор порядка $m = 2l$ с достаточно гладкими коэффициентами $a_\alpha(x)$, где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N)$ — мультииндекс и $D = (D_1, D_2, \ldots, D_N)$, $D_j = \partial/\partial x_j$, а в [22] — задачи для уравнения

$$\partial_t^\rho u(x,t) + A(x,D)u(x,t) = f(x,t),$$

где $\partial_t^\rho u(x,t)$ — дифференциальный оператор Римана—Лиувилля дробного порядка $\rho \in (0,1]$.

Кроме приведенного выше, в [23–27] исследована задача Коши в верхней полуплоскости для уравнений высокого четного порядка с оператором Бесселя.

1. Постановка задачи. Исследование спектральной задачи. В области $\Omega = \{(x,t): 0 < x < 1; 0 < t < T\}$ рассмотрим уравнение

$$B^t_{\gamma-1/2}u + (-1)^k \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} = f(x,t), \tag{6}$$

где γ, T — заданные действительные числа, причем $0 < \gamma < 1/2$, $f(x,t)$ — заданная функция, а $B^t_\omega \equiv \partial^2/\partial t^2 + [(1+2\omega)/t]\partial/\partial t$ — оператор Бесселя.

Исследуем следующую начально-граничную задачу.

Задача 1. *Найти функцию $u(x,t) \in C^{2k-1,0}_{x,t}(\bar{\Omega}) \cap C^{2k,2}_{x,t}(\Omega)$, удовлетворяющую в области Ω уравнению (6), а на границе области Ω следующим начальным и граничным условиям:*

$$u(x,0) = \varphi_1(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1; \quad \lim_{t\to+0} t^{2\gamma} u_t(x,t) = \varphi_2(x), \quad 0 < x < 1; \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned} u(0,t) = \frac{\partial}{\partial x}u(0,t) = \dots = \frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}u(0,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,\\ \frac{\partial^k}{\partial x^k}u(1,t) = \frac{\partial^{k+1}}{\partial x^{k+1}}u(1,t) = \dots = \frac{\partial^{2k-1}}{\partial x^{2k-1}}u(1,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — заданные непрерывные функции.

Исследуем существование, единственность и устойчивость решения задачи 1. Нетривиальные решения однородного уравнения

$$B^t_{\gamma-1/2}u + (-1)^k \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} = 0,$$

удовлетворяющего условиям (8), ищем в виде $u(x,t) = v(x)T(t)$. В результате относительно функции $T(t)$ получим уравнение

$$B^t_{\gamma-1/2}T(t) + \lambda T(t) = 0, \quad 0 < t < T,$$

а относительно функции $v(x)$ получим следующую спектральную задачу:

$$Mv \equiv (-1)^k v^{(2k)}(x) = \lambda v(x), \quad 0 < x < 1, \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned} v(0) = v'(0) = \dots = v^{(k-1)}(0) = 0,\\ v^{(k)}(1) = v^{(k+1)}(1) = \dots = v^{(2k-1)}(1) = 0.\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Рассмотрим задачу (9), (10). Пусть $v(x)$, $w(x) \in C^{(2k-1)}[0,1] \cap C^{(2k)}(0,1)$ и $v^{(2k)}(x)$, $w^{(2k)}(x) \in C(0,1) \cap L[0,1]$. Тогда интегрированием по частям нетрудно убедиться, что справедливо равенство

$$\int_0^1 wMv\,dx = \int_0^1 vMw\,dx + (-1)^k \Big[wv^{(2k-1)} - w'v^{(2k-2)} + \dots + \\ + (-1)^{k-1}w^{(k-1)}v^{(k)} + (-1)^k w^{(k)}v^{(k-1)} + \dots + (-1)^{2k-1}w^{(2k-1)}v\Big]_{x=0}^{x=1}.$$

Отсюда следует, что если функции $v(x)$ и $w(x)$ удовлетворяют условиям (10), то имеет место равенство $\int_0^1 wMv\,dx = \int_0^1 vLw\,dx$, откуда следует, что задача $Mv=0$, (10) самосопряженная. Теперь выясним, при каких λ задача (9), (10) имеет нетривиальные решения. С этой целью сначала умножим уравнение (9) на функцию $v(x)$, а затем проинтегрируем по x на отрезке $[0,1]$:

$$(-1)^k\int_0^1 v^{(2k)}(x)v(x)\,dx = \lambda\int_0^1 v^2(x)\,dx.$$

Применим правило интегрирования по частям k раз к первому интегралу:

$$\lambda\int_0^1 v^2(x)dx = \int_0^1\left[v^{(k)}(x)\right]^2dx +$$
$$+(-1)^k\Big[v^{(2k-1)}(x)v(x) - v^{(2k-2)}(x)v'(x) + \cdots + (-1)^{k-1}v^{(k)}(x)v^{(k-1)}(x)\Big]_0^1.$$

В силу условия (10) из последнего соотношения следует равенство

$$\lambda\int_0^1 v^2(x)\,dx = \int_0^1\left[v^{(k)}(x)\right]^2dx.$$

Отсюда следует, что $\lambda\geqslant 0$.

Рассмотрим случай $\lambda=0$. Здесь уравнение (9) принимает вид $v^{(2k)}(x)=0$. Общее решение этого уравнения определяется равенством

$$v(x) = c_1\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + c_2\frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!} + \cdots + c_{2k-2}\frac{x^{\,2}}{2!} + c_{2k-1}\frac{x}{1!} + c_{2k},$$

где c_j, $j=\overline{1,2k}$ — произвольные постоянные. Подчиняя эту функцию условиям (10), получим $c_j=0$, $j=\overline{1,2k}$. Тогда $v(x)\equiv 0$, $x\in[0,1]$.

Следовательно, задача (9), (10) может иметь нетривиальные решения только при $\lambda>0$.

Предполагая $\lambda>0$, приведем задачу (9), (10) к эквивалентному интегральному уравнению. С этой целью построим функцию Грина:

$$G(x,s) = \\ = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{k-1}x^{2k-1}}{(2k-1)!0!} + \dfrac{(-1)^{k-2}x^{2k-2}s}{(2k-2)!1!} + \cdots + \dfrac{x^k s^{k-1}}{k!\,(k-1)!}, & 0\leqslant x<s, \\ \dfrac{(-1)^{k-1}s^{2k-1}}{(2k-1)!0!} + \dfrac{(-1)^{k-2}s^{2k-2}x}{(2k-2)!1!} + \cdots + \dfrac{s^k x^{k-1}}{k!\,(k-1)!}, & s<x\leqslant 1. \end{cases} \tag{11}$$

Функция Грина (11) по переменной x удовлетворяет условиям (9), ее производные по x до порядка $2k-2$ включительно непрерывны при $x\in(0,1)$, производная порядка $2k-1$ при $x=s\in(0,1)$ имеет скачок вида

$$\frac{\partial^{2k-1}}{\partial x^{2k-1}}G(x,s)\Big|_{x=s+0} - \frac{\partial^{2k-1}}{\partial x^{2k-1}}G(x,s)\Big|_{x=s-0} = (-1)^k, \tag{12}$$

а производная порядка $2k$ удовлетворяет уравнению $(\partial^{2k}/\partial x^{2k})G(x,s) = 0$ при $x \neq s \in (0,1)$.

Пользуясь этими свойствами функции $G(x,s)$, нетрудно убедиться, что решение уравнения $Mv(x) = g(x)$, удовлетворяющее условиям (10), определяется формулой

$$v(x) = \int_0^1 G(x,s)g(s)\,ds, \tag{13}$$

где $g(x)$ — заданная непрерывная функция.

Докажем, что при (13) выполняется равенство $Mv(x) = g(x)$.

В силу свойств функции $G(x,s)$ из (13) сразу следует выполнение условий (10). Перепишем (13) в виде

$$v(x) = \int_0^x G(x,s)g(s)\,ds + \int_x^1 G(x,s)g(s)\,ds.$$

Это равенство последовательно продифференцируем $2k$ раз. Тогда, принимая во внимание непрерывность функции $g(x)$ и производных функции $G(x,s)$ до $(2k-2)$ порядка включительно, получим

$$\begin{aligned} v^{(2k)}(x) = \int_0^x G_x^{(2k)}(x,s)g(s)\,ds + \int_x^1 G_x^{(2k)}(x,s)g(s)\,ds +& \\ + \left[G_x^{(2k-1)}(x,x-0) - G_x^{(2k-1)}(x,x+0)\right]g(x-0) +& \\ + \left[g(x-0) - g(x+0)\right]G_x^{(2k-1)}(x,x+0).& \end{aligned}$$

Отсюда в силу равенств (12) и $(\partial^{2k}/\partial x^{2k})G(x,s) = 0$, $x \neq s$, а также непрерывности функции $g(x)$ следует, что $v^{(2k)}(x) = (-1)^k g(x)$, т. е. $Mv(x) = g(x)$.

Из доказанного выше следует, что задача (9), (10) эквивалентна следующему интегральному уравнению:

$$v(x) = \lambda \int_0^1 G(x,s)v(s)\,ds. \tag{14}$$

Так как $\lambda > 0$ и ядро $G(x,s)$ симметрично и непрерывно, согласно теории интегральных уравнений [28], уравнение (14) и, следовательно, задача (9), (10) имеет счетное число собственных значений

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots < \lambda_n < \cdots, \quad \lambda_n \to +\infty,$$

а соответствующие им собственные функции

$$v_1(x), \quad v_2(x), \quad v_3(x), \quad \ldots, \quad v_n(x), \quad \ldots$$

образуют ортонормированную систему в пространстве $L_2(0,1)$; при этом любая функция $g(x) \in L_2(0,1)$ разлагается в сходящийся в среднем ряд Фурье по этим собственным функциям. Так как задача $Mv = 0$, (10) самосопряженная, система функций $\{v_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ полна в пространстве $L_2(0,1)$ [29].

2. Сходимость основных билинейных рядов. Сформулируем и докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Следующие ряды равномерно сходятся на* $[0,1]$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{v_n^2(x)}{\lambda_n},\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{[v_n^{(j)}(x)]^2}{\lambda_n^2},\quad j=\overline{1,2k-1};\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{[v_n^{(2k)}(x)]^2}{\lambda_n^3}. \tag{15}$$

Доказательство. Так как ядро $G(x,s)$ интегрального уравнения (14) симметрично, непрерывно и положительно, согласно теореме Мерсера [28] справедливо равенство

$$G(x,s)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{v_n(x)v_n(s)}{\lambda_n}.$$

Отсюда в силу непрерывности ядра $G(x,s)$ при $x=s$ следует неравенство

$$G(x,x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{v_n^2(x)}{\lambda_n}\leqslant K, \tag{16}$$

где K — некоторое действительное положительное число. Следовательно, первый ряд в (15) сходится равномерно.

Далее согласно (14) справедливы следующие равенства:

$$v_n^{(j)}(x)=\lambda_n\int_0^1\frac{\partial^j}{\partial x^j}G(x,s)v_n(s)\,ds,\quad j=\overline{1,2k-1}$$

или

$$\frac{v_n^{(j)}(x)}{\lambda_n}=\int_0^1\frac{\partial^j}{\partial x^j}G(x,s)v_n(s)\,ds,\quad j=\overline{1,2k-1}.$$

Так как $\{v_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ ортонормированная система, из последнего равенства следует, что $v_n^{(j)}(x)/\lambda_n$ являются коэффициентами Фурье функции $(\partial^j/\partial x^j)G(x,s)$ по аргументу s. Тогда, учитывая, что $(\partial^j/\partial x^j)G(x,s)$, $j=\overline{1,2k-1}$, $\forall x\in[0,1]$ квадратично суммируемы, согласно неравенству Бесселя имеем

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\Big[\frac{v_n^{(j)}(x)}{\lambda_n}\Big]^2\leqslant\int_0^1\Big[\frac{\partial^j}{\partial x^j}G(x,s)\Big]^2ds\leqslant K_j,\quad j=\overline{1,2k-1},$$

где K_j — некоторые действительные положительные числа. Следовательно, вторые ряды в (15) равномерно сходятся.

Далее, учитывая уравнение (9) и неравенство (16), имеем

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{[v_n^{(2k)}(x)]^2}{\lambda_n^3}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{[\lambda_n(-1)^k v_n(x)]^2}{\lambda_n^3}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{[v_n(x)]^2}{\lambda_n}\leqslant K,$$

откуда следует, что последний ряд в (15) сходится равномерно. □

3. Порядок коэффициентов Фурье. Сформулируем и докажем следующие леммы.

Лемма 2. *Пусть* $g(x) \in C^{k-1}[0,1]$, $g^{(k)}(x) \in L_2(0,1)$ *и* $g(0) = g'(0) = \ldots = g^{(k-2)}(0) = g^{(k-1)}(0) = 0$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n g_n^2 \leqslant \int_0^1 [g^{(k)}(x)]^2 dx, \tag{17}$$

где g_n — *коэффициенты Фурье функции* $g(x)$ *по системе собственных функций* $\{v_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$.

Доказательство. Рассмотрим следующее выражение:

$$J = \int_0^1 \left[g^{(k)}(x) - \sum_{n=1}^{m-1} g_n v_n^{(k)}(x) \right]^2 dx \geqslant 0.$$

Имеют место следующие равенства:

$$J = \int_0^1 [g^{(k)}(x)]^2 dx + \int_0^1 \left[\sum_{n=1}^{m-1} g_n v_n^{(k)}(x) \right]^2 dx - 2 \int_0^1 g^{(k)}(x) \left[\sum_{n=1}^{m-1} g_n v_n^{(k)}(x) \right] dx =$$

$$= \int_0^1 [g^{(k)}(x)]^2 dx + \int_0^1 \sum_{n=1}^{m-1} [g_n v_n^{(k)}(x)]^2 dx + 2 \sum_{\substack{n,l=1 \\ n \neq l}}^{m-1} g_n g_l \int_0^1 v_n^{(k)}(x) v_l^{(k)}(x)\, dx -$$

$$- 2 \sum_{n=1}^{m-1} g_n \int_0^1 g^{(k)}(x) v_n^{(k)}(x)\, dx. \tag{18}$$

Применяя правило интегрирования по частям k раз, имеем

$$\int_0^1 v_n^{(k)}(x) v_l^{(k)}(x)\, dx = \Big[v_n^{(k)}(x) v_l^{(k-1)}(x) - v_n^{(k+1)}(x) v_l^{(k-2)}(x) +$$

$$+ \cdots + (-1)^{k-1} v_n^{(2k-1)}(x) v_l(x) \Big]_0^1 + (-1)^k \int_0^1 v_n^{(2k)}(x) v_l(x)\, dx.$$

Отсюда в силу равенств (10) и $(-1)^k v_n^{(2k)}(x) = \lambda v_n(x)$ следует, что

$$\int_0^1 v_n^{(k)}(x) v_l^{(k)}(x)\, dx = \lambda_n \int_0^1 v_n(x) v_l(x)\, dx = \begin{cases} 0, & n \neq l, \\ \lambda_n, & n = l. \end{cases} \tag{19}$$

Аналогично, принимая во внимание условия леммы 2, получим

$$\int_0^1 g^{(k)}(x) v_n^{(k)}(x)\, dx = \Big[g^{(k-1)}(x) v_n^{(k)}(x) - g^{(k-2)}(x) v_n^{(k+1)}(x) +$$

$$+ (-1)^{k-1} g(x) v_n^{(2k-1)}(x) \Big]_0^1 + (-1)^k \int_0^1 v_n^{(2k)}(x) g(x)\, dx =$$

$$= \lambda_n \int_0^1 g(x) v_n(x)\, dx = \lambda_n g_n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{20}$$

Учитывая равенства (19), (20) и $J \geqslant 0$, из равенства (18) получим

$$J = \int_0^1 [g^{(k)}(x)]^2 dx - \sum_{n=1}^{m-1} \lambda_n g_n^2 \geqslant 0.$$

Так как это неравенство имеет место $\forall m \in \mathbb{N}$, справедливо неравенство (17). $\square$

Лемма 3. *Пусть* $g(x) \in C^{2k-1}[0,1]$, $g^{(2k)}(x) \in L_2(0,1)$ *и* $g(0) = g'(0) = \dots = g^{(k-2)}(0) = g^{(k-1)}(0) = 0$, $g^{(k)}(1) = g^{(k+1)}(1) = \dots = g^{(2k-1)}(1) = 0$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^2 g_n^2 \leqslant \int_0^1 [g^{(2k)}(x)]^2 dx. \tag{21}$$

Доказательство. Применяя правило интегрирования по частям $2k$ раз, имеем

$$\int_0^1 g^{(2k)}(x) v_n(x)\, dx = \Big[g^{(2k-1)}(x) v_n(x) - g^{(2k-2)}(x) v_n'(x) + \\ + \dots + (-1)^{2k-1} g(x) v_n^{(2k-1)}(x) \Big]_0^1 + (-1)^{2k} \int_0^1 g(x) v_n^{(2k)}(x)\, dx = \\ = (-1)^k \lambda_n \int_0^1 g(x) v_n(x) dx = (-1)^k \lambda_n g_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, $(-1)^k \lambda_n g_n$ — коэффициенты Фурье функции $g^{(2k)}(x)$ по системе функций $\{v_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$. Так как $g^{(2k)}(x) \in L_2(0,1)$, согласно неравенству Бесселя справедливо неравенство (21). $\square$

Лемма 4. *Пусть* $g(x) \in C^{3k-1}[0,1]$, $g^{(3k)}(x) \in L_2(0,1)$ *и* $g(0) = g'(0) = \dots = g^{(k-2)}(0) = g^{(k-1)}(0) = 0$, $g^{(k)}(1) = g^{(k+1)}(1) = \dots = g^{(2k-1)}(1) = 0$, $g^{(2k)}(0) = g^{(2k+1)}(0) = \dots = g^{(3k-1)}(0) = 0$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^3 g_n^2 \leqslant \int_0^1 [g^{(3k)}(x)]^2 dx. \tag{22}$$

Доказательство. Функция $g^{(2k)}(x)$ удовлетворяет условиям леммы 2 и, как доказано выше, $(-1)^k \lambda_n g_n$ — ее коэффициенты Фурье. Тогда согласно (17) получаем справедливость неравенства (22). $\square$

4. Существование решения задачи 1. Сформулируем и докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ удовлетворяют условиям леммы 4, а функция $f(x,t)$ удовлетворяет этим условиям по аргументу x равномерно по t. Тогда функция*

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\Big\{a_n t^{1/2-\gamma}J_{1/2-\gamma}(\sqrt{\lambda_n}t)+b_n t^{1/2-\gamma}J_{\gamma-1/2}(\sqrt{\lambda_n}t)+$$
$$+\frac{\pi}{2\cos\gamma\pi}\Big[\int_0^t J_{1/2-\gamma}(\sqrt{\lambda_n}t)J_{\gamma-1/2}(\sqrt{\lambda_n}\tau)\Big(\frac{t}{\tau}\Big)^{1/2-\gamma}\tau f_n(\tau)\,d\tau-$$
$$-\int_0^t J_{\gamma-1/2}(\sqrt{\lambda_n}t)J_{1/2-\gamma}(\sqrt{\lambda_n}\tau)\Big(\frac{t}{\tau}\Big)^{1/2-\gamma}\tau f_n(\tau)\,d\tau\Big]\Big\}v_n(x) \quad (23)$$

определяет решение задачи 1, где λ_n и $v_n(x)$ — собственные значения и собственные функции задачи (9), (10);

$$a_n=\frac{1}{2}\Big(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2}\Big)^{\gamma-1/2}\Gamma(1/2-\gamma)\varphi_{2n},\quad b_n=\Big(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2}\Big)^{1/2-\gamma}\Gamma(1/2+\gamma)\varphi_{1n}; \quad (24)$$

$$\varphi_{1n}=\int_0^1\varphi_1(x)v_n(x)\,dx,\quad \varphi_{2n}=\int_0^1\varphi_2(x)v_n(x)\,dx;$$

$$f_n(t)=\int_0^1 f(x,t)v_n(x)\,dx,\quad n\in\mathbb{N};$$

$J_\nu(x)$ — функция Бесселя первого рода, $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера.

Доказательство. Решение задачи 1 ищем в виде

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(t)v_n(x), \quad (25)$$

где $u_n(t)$ — неизвестные функции, которые подлежат определению. Разложим функцию $f(x,t)$ в ряд по системе $\{v_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$:

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}f_n(t)v_n(x). \quad (26)$$

Подставив (25) и (26) в уравнение (6), а (25) — в условие (7), имеем

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\big[(-1)^k u_n(t)v_n^{(2k)}(x)+B_{\gamma-1/2}^t u_n(t)v_n(x)\big]=\sum_{n=1}^{+\infty}f_n(t)v_n(x),$$

$$\lim_{t\to+0}\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(t)v_n(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\varphi_{1n}v_n(x),$$

$$\lim_{t\to+0}t^{2\gamma}\sum_{n=1}^{+\infty}u_n'(t)v_n(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\varphi_{2n}v_n(x).$$

Из этих равенств, учитывая равенства $(-1)^k v_n^{(2k)}=\lambda_n v_n$ и ортонормированность системы функций $\{v_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$, относительно неизвестных функций $u_n(t)$, $n\in\mathbb{N}$, получим следующую задачу:

$$B_{\gamma-1/2}^t u_n(t)+\lambda_n u_n(t)=f_n(t),\quad t\in(0,T),\quad n\in\mathbb{N}; \quad (27)$$

$$u_n(0) = \varphi_{1n}, \quad \lim_{t\to+0} t^{2\gamma} u_n'(t) = \varphi_{2n}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{28}$$

Применяя метод Лагранжа, легко убедиться, что решение задачи (27), (28) существует, единственно и определяется равенством

$$\begin{aligned} u_n(t) = a_n t^{1/2-\gamma} J_{1/2-\gamma}(\sqrt{\lambda_n} t) + b_n t^{1/2-\gamma} J_{\gamma-1/2}(\sqrt{\lambda_n} t) + \\ + \frac{\pi}{2\cos\gamma\pi} \int_0^t J_{1/2-\gamma}(\sqrt{\lambda_n} t) J_{\gamma-1/2}(\sqrt{\lambda_n}\tau) \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/2-\gamma} \tau f_n(\tau)\, d\tau - \\ - \frac{\pi}{2\cos\gamma\pi} \int_0^t J_{\gamma-1/2}(\sqrt{\lambda_n} t) J_{1/2-\gamma}(\sqrt{\lambda_n}\tau) \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/2-\gamma} \tau f_n(\tau)\, d\tau, \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned} \tag{29}$$

где a_n и b_n — постоянные, определенные равенствами (24). Подставляя (29) в (25), получим формальное решение задачи 1 в виде (23).

Докажем, что ряд (23) и ряды $(\partial^{2k}/\partial x^{2k})u$, $t^{2\gamma}(\partial/\partial t)u$, $B^t_{\gamma-1/2}u$, полученные из (23) почленным дифференцированием, сходятся равномерно в $\bar{\Omega}$. При этом воспользуемся следующей леммой.

Лемма 5. *Для функций $u_n(t)$, определяемых равенствами (29), справедливы неравенства*

$$|u_n(t)| \leqslant |\varphi_{1n}| + \frac{T^{1-2\gamma}}{1-2\gamma}|\varphi_{2n}| + \frac{2T\sqrt{T}}{1-2\gamma}\|f_n(t)\|_{L_2(0,T)}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{30}$$

Доказательство. Функции (29) с помощью функции Бесселя—Клиффорда $\bar{J}_w(z) = \Gamma(w+1)(z/2)^{-w} J_w(z)$ перепишем в виде

$$\begin{aligned} u_n(t) = \frac{a_n t^{1-2\gamma} (\sqrt{\lambda_n}/2)^{1/2-\gamma}}{\Gamma(3/2-\gamma)} \bar{J}_{1/2-\gamma}(\sqrt{\lambda_n} t) + \frac{b_n (\sqrt{\lambda_n}/2)^{\gamma-1/2}}{\Gamma(\gamma+1/2)} \bar{J}_{\gamma-1/2}(\sqrt{\lambda_n} t) + \\ + \frac{1}{1-2\gamma} \int_0^t \bar{J}_{1/2-\gamma}(\sqrt{\lambda_n} t) \bar{J}_{\gamma-1/2}(\sqrt{\lambda_n}\tau) \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1-2\gamma} \tau f_n(\tau)\, d\tau - \\ - \frac{1}{1-2\gamma} \int_0^t \bar{J}_{\gamma-1/2}(\sqrt{\lambda_n} t) \bar{J}_{1/2-\gamma}(\sqrt{\lambda_n}\tau) \tau f_n(\tau)\, d\tau, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Отсюда, принимая во внимание $|\bar{J}_\nu(x)| \leqslant 1$ при $\nu > -1/2$, получим

$$\begin{aligned} |u_n(t)| \leqslant |a_n| \frac{t^{1-2\gamma} (\sqrt{\lambda_n}/2)^{1/2-\gamma}}{\Gamma(3/2-\gamma)} + |b_n| \frac{(\sqrt{\lambda_n}/2)^{\gamma-1/2}}{\Gamma(\gamma+1/2)} + \\ + \frac{t^{1-2\gamma}}{1-2\gamma} \int_0^t \tau^{2\gamma} |f_n(\tau)| d\tau + \frac{1}{1-2\gamma} \int_0^t \tau |f_n(\tau)| d\tau, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Теперь, учитывая $0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T$ и применяя неравенство Коши—Буняковского, имеем

$$|u_n(t)| \leqslant |a_n| \frac{(T^2\sqrt{\lambda_n}/2)^{1/2-\gamma}}{\Gamma(3/2-\gamma)} + |b_n| \frac{(\sqrt{\lambda_n}/2)^{\gamma-1/2}}{\Gamma(\gamma+1/2)} +$$

$$+\frac{2T}{1-2\gamma}\left(\int_0^T d\tau\cdot\int_0^T f_n^2(\tau)\,d\tau\right)^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant |a_n|\frac{(T^2\sqrt{\lambda_n}/2)^{1/2-\gamma}}{\Gamma(3/2-\gamma)}+|b_n|\frac{(\sqrt{\lambda_n}/2)^{\gamma-1/2}}{\Gamma(\gamma+1/2)}+\frac{2T\sqrt{T}}{1-2\gamma}\|f_n\|_{L_2(0,T)},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Отсюда, принимая во внимание (24), получим неравенства (30).

Лемма 5 доказана. □

Переходим к доказательству равномерной сходимости рядов (23) и

$$(\partial^j/\partial x^j)u(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(t)v_n^{(j)}(x),\quad j=\overline{1,2k-1},$$

$$(\partial^{2k}/\partial x^{2k})u(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(t)v_n^{(2k)}(x),\tag{31}$$

$$t^{2\gamma}u_t(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}t^{2\gamma}u_n'(t)v_n(x),\quad B^t_{\gamma-1/2}u(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}B^t_{\gamma-1/2}u_n(t)v_n(x).$$

Рассмотрим ряд (31). Согласно (30), из (31) следует, что для доказательства равномерной сходимости этого ряда достаточно доказать абсолютную и равномерную сходимость рядов

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\varphi_{1n}v_n^{(2k)}(x),\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\varphi_{2n}v_n^{(2k)}(x),\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_0^T f_n^2(\tau)\,d\tau\right)^{1/2}v_n^{(2k)}(x).$$

К каждому из этих рядов применяем неравенство Коши—Буняковского:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\varphi_{jn}v_n^{(2k)}(x)\leqslant\sum_{n=1}^{+\infty}|\varphi_{jn}v_n^{(2k)}(x)|\leqslant\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\sqrt{\lambda_n^3}\varphi_{jn}\frac{v_n^{(2k)}(x)}{\sqrt{\lambda_n^3}}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left[\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n^3\varphi_{jn}^2\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{[v_n^{(2k)}(x)]^2}{\lambda_n^3}\right]^{1/2},\quad j=\overline{1,2},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_0^T f_n^2(\tau)\,d\tau\right)^{1/2}v_n^{(2k)}(x)\leqslant\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\left(\int_0^T f_n^2(\tau)\,d\tau\right)^{1/2}v_n^{(2k)}(x)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\left(\lambda_n^3\int_0^T f_n^2(\tau)\,d\tau\right)^{1/2}\frac{v_n^{(2k)}(x)}{\sqrt{\lambda_n^3}}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left(\int_0^T\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n^3 f_n^2(\tau)d\tau\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{[v_n^{(2k)}(x)]^2}{\lambda_n^3}\right)^{1/2}.$$

Ряды, стоящие в правых частях этих неравенств, в силу условий теоремы 1 согласно леммам 1 и 4 равномерно сходятся. Следовательно, ряды, стоящие в левых частях, сходятся абсолютно и равномерно в $\bar{\Omega}$.

Аналогично доказывается абсолютная и равномерная сходимость в $\bar{\Omega}$ и остальных рядов.

Из доказанного выше следует, что все ряды, соответствующие каждым членам уравнения (6) и условиям (7), (8), сходятся абсолютно и равномерно в $\bar{\Omega}$. Тогда сумма этих рядов удовлетворяет уравнению (6) и условиям (7), (8). Следовательно, сумма ряда (23) является решением задачи 1. $\square$

5. Единственность решения задачи. Сформулируем и докажем следующие теоремы.

Теорема 2. *Задача (6)–(8) не может иметь более одного решения.*

Доказательство. Предположим, что задача (6)–(8) имеет два решения: $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$. Введем обозначение

$$u_1(x,t) - u_2(x,t) = u_0(x,t). \tag{32}$$

Тогда функция $u_0(x,t)$ является решением однородной задачи, соответствующей задаче 1.

Рассмотрим следующие функции:

$$w_n(t) = \int_0^1 u_0(x,t)v_n(x)\,dx, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{33}$$

где $v_n(x)$ — собственные функции задачи (9), (10).

Согласно (33) введем функции

$$w_{n,\varepsilon}(t) = \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u_0(x,t)v_n(x)\,dx, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{34}$$

где $(\varepsilon, 1-\varepsilon) \neq \emptyset$. Очевидно, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} w_{n,\varepsilon}(t) = w_n(t)$.

Вычислим первые и вторые производные функций (34):

$$w'_{n,\varepsilon}(t) = \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \frac{\partial}{\partial t}u_0(x,t)v_n(x)\,dx, \;\; w''_{n,\varepsilon}(t) = \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \frac{\partial^2}{\partial t^2}u_0(x,t)v_n(x)\,dx, \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Из этих равенств следует, что

$$B^t_{\gamma-1/2}w_{n,\varepsilon}(t) = \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} B^t_{\gamma-1/2}u_0(x,t)v_n(x)\,dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

В силу $B^t_{\gamma-1/2}u_0(x,t) = (-1)^{k+1}(\partial^{2k}/\partial x^{2k})u_0(x,t)$ последнее равенство переписывается в виде

$$B^t_{\gamma-1/2}w_{n,\varepsilon}(t) = (-1)^{k+1}\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}}u_0(x,t)v_n(x)\,dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Отсюда, применяя правило интегрирования по частям $2k$ раз, имеем

$$B^t_{\gamma-1/2}w_{n,\varepsilon}(t) = (-1)^{k+1}\Big[\frac{\partial^{2k-1}}{\partial x^{2k-1}}u_0(x,t)v_n(x) - \frac{\partial^{2k-2}}{\partial x^{2k-2}}u_0(x,t)v'_n(x) +$$

$$+\dots+(-1)^{k-1}\frac{\partial^k}{\partial x^k}u_0(x,t)v_n^{(k-1)}(x)+(-1)^k\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}u_0(x,t)v_n^{(k)}(x)+$$
$$+(-1)^{2k-1}u_0(x,t)v_n^{(2k-1)}(x)\Big]_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}+(-1)^{2k}(-1)^{k+1}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}u_0(x,t)v_n^{(2k)}(x)\,dx.$$

В этом равенстве перейдем к пределу при $\varepsilon\to0$. В результате, учитывая условия (8) и (10), а также уравнение (9) и обозначение (33), получим

$$B^t_{\gamma-1/2}w_n(t)+\lambda_nw_n(t)=0,\quad n\in\mathbb{N}. \tag{35}$$

Согласно однородным начальным условиям, соответствующим (7), из (33) находим

$$w_n(0)=0,\quad \lim_{t\to0}t^{2\gamma}w_n'(t)=0. \tag{36}$$

Общее решение уравнения (35) согласно формуле (29) имеет вид

$$w_n(t)=\alpha_{1n}t^{1/2-\gamma}J_{1/2-\gamma}(\sqrt{\lambda_n}t)+\alpha_{2n}t^{1/2-\gamma}J_{\gamma-1/2}(\sqrt{\lambda_n}t),\quad n\in\mathbb{N}, \tag{37}$$

где α_{jn} — произвольные постоянные, $j=\overline{1,2}$, $n\in\mathbb{N}$.

Подчиняя функции (37) условиям (36), находим $\alpha_{jn}=0$, $j=\overline{1,2}$, $n\in\mathbb{N}$. Следовательно, $w_n(t)\equiv0$, $n\in\mathbb{N}$. Тогда из (33) следует, что

$$\int_0^1u_0(x,t)v_n(x)\,dx=0,\quad n\in\mathbb{N}.$$

Так как система функций $\{v_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ полна в $L_2(0,1)$, из последнего равенства следует, что $u_0(x,t)\equiv0$, $(x,t)\in\bar\Omega$. Тогда на основании (32) $u_1(x,t)=$ $=u_2(x,t)$, $(x,t)\in\bar\Omega$. □

Теорема 3. *Пусть функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ удовлетворяют условиям леммы 4, а функция $f(x,t)$ удовлетворяет этим условиям по x равномерно по t. Тогда для решения задачи 1 справедлива оценка*

$$\|u(x,t)\|^2_{L_2(0,1)}\leqslant K_0\left[\|\varphi_1(x)\|^2_{L_2(0,1)}+\|\varphi_2(x)\|^2_{L_2(0,1)}+\|f(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)}\right], \tag{38}$$

где K_0 — некоторое действительное положительное число.

Доказательство. Так как $\{v_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ — ортонормированная система, из (23) согласно обозначениям (29) и оценкам (30) следует такое неравенство:

$$\|u(x,t)\|^2_{L_2(0,1)}=\int_0^1\left[\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(t)v_n(x)\right]^2dx=$$
$$=\int_0^1\left[\sum_{n=1}^{+\infty}u_n^2(t)v_n^2(x)+2\sum_{\substack{n,k=1\\n\neq k}}^{+\infty}u_k(t)u_k(t)v_n(x)v_k(x)\right]dx=$$
$$=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n^2(t)\leqslant\widetilde K\sum_{n=1}^{+\infty}\big[|\varphi_{1n}|+|\varphi_{2n}|+\|f_n(t)\|_{L_2(0,T)}\big]^2\leqslant$$

$$\leqslant \widetilde{K}\sum_{n=1}^{+\infty}\big[|\varphi_{1n}|^2+|\varphi_{2n}|^2+\|f_n\|^2_{L_2(0,T)}+$$
$$+2|\varphi_{1n}|\cdot|\varphi_{2n}|+2|\varphi_{1n}|\cdot\|f_n\|_{L_2(0,T)}+2|\varphi_{2n}|\cdot\|f_n\|_{L_2(0,T)}\big],$$

где $\widetilde{K}=\sup\{1,\ T^{1-2\gamma}/(1-2\gamma),\ 2T^{3/2}/(1-2\gamma)\}$. Заменяя последние три слагаемых по неравенству $a^2+b^2\geqslant 2ab$, а затем применяя неравенство Бесселя и обозначая $3\widetilde{K}$ через K_0, получим

$$\|u(x,t)\|^2_{L_2(0,1)}\leqslant K_0\left(\|\varphi_2(x)\|^2_{L_2(0,1)}+\|\varphi_1(x)\|^2_{L_2(0,1)}+\sum_{n=1}^{+\infty}\|f_n(t)\|^2_{L_2(0,T)}\right). \quad (39)$$

Оценим последнее слагаемое правой части (39).

Принимая во внимание первое из равенств (26) и ортонормированность системы $\{v_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$, находим

$$\|f(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)}=\big(f(x,t),f(x,t)\big)_{L_2(\Omega)}=$$
$$=\left(\sum_{n=1}^{+\infty}f_n(t)v_n(x),\sum_{n=1}^{+\infty}f_n(t)v_n(x)\right)_{L_2(\Omega)}=$$
$$=\int_0^T\int_0^1\sum_{n=1}^{+\infty}f_n(t)v_n(x)\sum_{m=1}^{+\infty}f_m(t)v_m(x)\,dxdt=$$
$$=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^T[f_n(t)]^2dt=\sum_{n=1}^{+\infty}\|f_n\|^2_{L_2(0,T)}.$$

Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\|f_n(t)\|^2_{L_2(0,T)}=\|f(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)}. \quad (40)$$

Подставляя (40) в (39), получим (38). □

Заключение. В данной работе в прямоугольной области рассмотрена начально-граничная задача для дифференциального уравнения в частных производных высокого четного порядка с оператором Бесселя. Методом разделения переменных найдено решение задачи в виде ряда, который сходится абсолютно и равномерно в замыкании области рассмотрения уравнения. Доказаны единственность решения задачи и непрерывная зависимость его от заданных функций.

Конкурирующие интересы. Мы не имеем конкурирующих интересов.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. *Уравнения математической физики.* М.: Наука, 1972. 736 с.
2. Нахушев А. М. *Уравнения математической биологии.* М.: Высш. шк., 1995. 301 с. EDN: PDBBNB.
3. Салахитдинов М. С., Аманов Д. Разрешимость и спектральные свойства самосопряженной задачи для уравнения четвертого порядка // *Узб. мат. ж.*, 2005. № 3. С. 72–77.
4. Аманов Д., Юлдашева А. В. Разрешимость и спектральные свойства самосопряженной задачи для уравнения четвертого порядка // *Узб. мат. ж.*, 2007. № 4. С. 3–8.
5. Аманов Д., Мурзамбетова М. Б. Краевые задачи для уравнения четвертого порядка со спектральным параметром // *Узб. мат. ж.*, 2012. № 3. С. 22–30.
6. Аманов Д., Мурзамбетова М. Б. Краевая задача для уравнения четвертого порядка с младшим членом // *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, 2013. № 1. С. 3–10. EDN: PXPCOF.
7. Отарова Ж. А. Разрешимость и спектральные свойства самосопряженных задач для уравнения четвертого порядка // *Узб. мат. ж.*, 2008. № 2. С. 74–80.
8. Отарова Ж. А. Разрешимость и спектральные свойства самосопряженной задачи для уравнения четвертого порядка // *Докл. АН РУз*, 2008. № 1. С. 10–14.
9. Отарова Ж. А. Вольтеррова краевая задача для уравнения четвертого порядка // *Докл. АН РУз.*, 2008. № 6. С. 18–22.
10. Сабитов К. Б. Начальная задача для уравнения колебаний балки // *Диффер. уравн.*, 2017. Т. 53, № 5. С. 665–671. EDN: YSXNEH. DOI: https://doi.org/10.1134/S0374064117050090.
11. Сабитов К. Б. Колебания балки с заделанными концами // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2015. Т. 19, № 2. С. 311–324. EDN: UGXNZR. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1406.
12. Сабитов К. Б. К теории начально-граничных задач для уравнения стержней и балок // *Диффер. уравн.*, 2017. Т. 53, № 1. С. 89–100. EDN: XRBXOV. DOI: https://doi.org/10.1134/S0374064117010083.
13. Сабитов К. Б., Фадеева О. В. Начально-граничная задача для уравнения вынужденных колебаний консольной балки // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 1. С. 51–66. EDN: SXRWIP. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1845.
14. Azizov M. S. A boundary problem for the fourth order equation with a singular coefficient in a rectangular region // *Lobachevskii J. Math.*, 2020. vol. 41, no. 6. pp. 1043–1050. EDN: HDCKMU. DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080220060050.
15. Азизов М. С. Смешанная задача для неоднородного уравнения четвертого порядка с сингулярным коэффициентом в прямоугольнике // *Бюл. инст. мат.*, 2020. № 4. С. 50–59.
16. Amanov D., Yuldasheva A. V. Solvability and spectral properties of boundary value problems for equations of even order // *Malays. J. Math. Sci.*, 2009. vol. 3, no. 2. pp. 227–248. https://mjms.upm.edu.my/lihatmakalah.php?kod=2009/July/3/2/227-248.
17. Amanov D. About correctness of boundary value problems for equation of even order // *Uzbek Math. J.*, 2011. no. 4. pp. 20–35.
18. Юлдашева А. В. Об одной задаче для уравнения высокого порядка // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2014. № 2(9). С. 17–22. EDN: TBECFX. DOI: https://doi.org/10.18454/2079-6641-2014-9-2-17-22.
19. Юлдашева А. В. Об одной задаче для квазилинейного уравнения четного порядка / *Дифференциальные уравнения. Математическая физика* / Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., Т. 140. М.: ВИНИТИ РАН, 2017. С. 43–49.
20. Amanov D., Ashyralyev A. Well-posedness of boundary value problems for partial differential equations of even order // *AIP Conference Proceedings*, 2012. vol. 1470, no. 1, 3. DOI: https://doi.org/10.1063/1.4747625.

21. Ашуров Р. Р., Мухиддинова А. Т. Начально-краевые задачи для гиперболических уравнений с эллиптическим оператором произвольного порядка // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 30, № 1. С. 8–19. EDN: UDRGAX. DOI: https://doi.org/10.26117/2079-6641-2020-30-1-8-19.
22. Ashurov R. R., Muhiddinova O. T. Initial-boundary value problem for a time-fractional subdiffusion equation with an arbitrary elliptic differential operator // *Lobachevskii J. Math.*, 2021. vol. 42, no. 2. pp. 517–525. EDN: WSMCML. DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080221030070.
23. Каримов Ш. Т. Об одном методе решения задачи Коши для одномерного поливолнового уравнения с сингулярным оператором Бесселя // *Изв. вузов. Матем.*, 2017. № 8. С. 27–41. EDN: YNLHGN.
24. Karimov Sh. T. On some generalizations of properties of the Lowndes operator and their applications to partial differential equations of high order // *Filomat*, 2018. vol. 32, no. 3. pp. 873–883. EDN: YBVBZJ. DOI: https://doi.org/10.2298/FIL1803873K.
25. Karimov Sh. T. The Cauchy problem for the degenerated partial differential equation of the high even order // *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2018. no. 15. pp. 853–862. EDN: VUTMHO. DOI: https://doi.org/10.17377/semi.2018.15.073.
26. Каримов Ш. Т., Уринов А. К. Решение задачи Коши для четырехмерного гиперболического уравнения с оператором Бесселя // *Владикавк. матем. журн.*, 2018. Т. 20, № 3. С. 57–68. EDN: VKJWUR. DOI: https://doi.org/10.23671/VNC.2018.3.17991.
27. Urinov A. K., Karimov Sh. T. On the Cauchy problem for the iterated generalized two-axially symmetric equation of hyperbolic type // *Lobachevskii J. Math.*, 2020. vol. 41, no. 1. pp. 102–110. EDN: FNVWZQ. DOI: https://doi.org/10.1134/S199508022001014X.
28. Михлин С. Г. *Лекции по линейным интегральным уравнениям.* М.: Физматлит, 1959. 234 с.
29. Наймарк М. А. *Линейные дифференциальные операторы.* М.: Физматлит, 1969. 528 с.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 2, pp. 273–292
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1893

MSC: 35G15

An initial boundary value problem for a partial differential equation of higher even order with a Bessel operator

A. K. Urinov[1,2], ***M. S. Azizov***[1]

[1] Fergana State University,
19, Murabbiylar st., Fergana, 150100, Uzbekistan.
[2] Institute of Mathematics named after V. I. Romanovsky
of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan,
46, Universitetskaya st., Tashkent, 100174, Uzbekistan.

Abstract

In present paper, an initial-boundary value problem is formulated in a rectangle for a higher even order partial differential equation with the Bessel operator. Applying the method of separation of variables to the considered problem a spectral problem is obtained for an ordinary differential equation of higher even order. The self-adjointness of the last problem is proved, which implies the existence of the system of its eigenfunctions, as well as the orthonormality and completeness of this system. The uniform convergence of some bilinear series and the order of the Fourier coefficients, depending on the found eigenfunctions, is investigated. The solution of the considered problem is found as the sum of the Fourier series with respect to the system of eigenfunctions of the spectral problem. The absolute and uniform convergence of this series, as well as the series obtained by its differentiating, have been proved. The uniqueness of the solution of the problem is proved by the method of spectral analysis. An estimate is obtained for the solution of the problem which implies the continuous dependence of the solution on the given functions.

Keywords: even order partial differential equation, Bessel operator, initial-boundary value problem, spectral method, Green's function, integral equation, existence, uniqueness and stability of the solution.

Received: 29th October, 2021 / Revised: 9th March, 2022 /
Accepted: 12th March, 2022 / First online: 23rd May, 2022

Differential Equations and Mathematical Physics
Research Article

Please cite this article in press as:
Urinov A. K., Azizov M. S. An initial boundary value problem for a partial differential equation of higher even order with a Bessel operator, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 2, pp. 273–292. EDN: LKMGUE. DOI: 10.14498/vsgtu1893 (In Russian).

Authors' Details:

Akhmadjon K. Urinov https://orcid.org/0000-0002-9586-1799
Dr. Phys. & Math. Sci.; Professor; Dept. of Mathematical Analysis and Differential Equations[1]; Leading Researcher[2]; e-mail: urinovak@mail.ru

Muzaffar S. Azizov https://orcid.org/0000-0002-2091-9300
Dept. of Mathematical Analysis and Differential Equations[1];
e-mail: muzaffar.azizov.1988@mail.ru

Competing interests. We have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely responsible for submit the final manuscript to print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. Not applicable.

References

1. Tikhonov A. N., Samarskiy A. A. *Uravneniia matematicheskoi fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1972, 736 pp. (In Russian)
2. Nakhushev A. M. *Uravneniia matematicheskoi biologii* [Equations of Mathematical Biology]. Moscow, Vyssh. shk., 1995, 301 pp. (In Russian). EDN: PDBBNB.
3. Salakhitdinov M. S., Amanov D. Solvability and spectral properties of a selfadjoint problem for a fourth-order equation, *Uzbek. Mat. Zh.*, 2005, no. 3, pp. 72–77 (In Russian).
4. Amanov D., Yuldasheva A. V. Solvability and spectral properties of a selfadjoint problem for a fourth-order equation, *Uzbek. Mat. Zh.*, 2007, no. 4, pp. 3–8 (In Russian).
5. Amanov D., Murzambetova M. B. Boundary value problems for a fourth order equation with a spectral parameter, *Uzbek. Mat. Zh.*, 2012, no. 3, pp. 22–30 (In Russian).
6. Amanov D., Murzambetova M. B. A boundary value problem for a fourth order partial differential equation with the lowest term, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2013, no. 1, pp. 3–10 (In Russian). EDN: PXPCOF.
7. Otarova Zh. A. The solvability and spectral properties of selfadjoint problems for a fourth-order equation, *Uzbek. Mat. Zh.*, 2008, no. 2, pp. 74–80 (In Russian).
8. Otarova Zh. A. Solvability and spectral properties of a selfadjoint problem for a fourth-order equation, *Dokl. AN RUz.*, 2008, no. 1, pp. 10–14 (In Russian).
9. Otarova Zh. A. Volterra boundary value problem for a fourth order equation, *Dokl. AN RUz.*, 2008, no. 6, pp. 18–22 (In Russian).
10. Sabitov K. B. Cauchy problem for the beam vibration equation, *Differ. Equ.*, 2017, vol. 53, no. 5, pp. 658–664. EDN: XNIRNN. DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266117050093.
11. Sabitov K. B. Fluctuations of a beam with clamped ends, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 2, pp. 311–324 (In Russian). EDN: UGXNZR. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1406.
12. Sabitov K. B. A remark on the theory of initial-boundary value problems for the equation of rods and beams, *Differ. Equ.*, 2017, vol. 53, no. 1, pp. 86–98. EDN: YVJCOJ. DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266117010086.
13. Sabitov K. B., Fadeeva O. V. Initial-boundary value problem for the equation of forced vibrations of a cantilever beam, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 1, pp. 51–66 (In Russian). EDN: SXRWIP. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1845.
14. Azizov M. S. A boundary problem for the fourth order equation with a singular coefficient in a rectangular region, *Lobachevskii J. Math.*, 2020, vol. 41, no. 6, pp. 1043–1050. EDN: HDCKMU. DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080220060050.
15. Azizov M. S. A mixed problem for a fourth-order nonhomogeneous equation with singular coefficients in a rectangular, *Bul. Inst. Math.*, 2020, no. 4, pp. 50–59 (In Russian).
16. Amanov D., Yuldasheva A. V. Solvability and spectral properties of boundary value problems for equations of even order, *Malays. J. Math. Sci.*, 2009, vol. 3, no. 2, pp. 227–248. https://mjms.upm.edu.my/lihatmakalah.php?kod=2009/July/3/2/227-248.
17. Amanov D. About correctness of boundary value problems for equation of even order, *Uzbek Math. J.*, 2011, no. 4, pp. 20–35.
18. Yuldasheva A. V. On one proble for higher-order equation, *Bulletin KRASEC. Phys. Math. Sci.*, 2014, vol. 9, no. 2, pp. 18–22. DOI: https://doi.org/10.18454/2313-0156-2014-9-2-18-22.

19. Yuldasheva A. V. On a problem for a quasi-linear equation of even order, *J. Math. Sci.*, 2019, vol. 241, no. 4, pp. 423–429. DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-019-04434-3.
20. Amanov D., Ashyralyev A. Well-posedness of boundary value problems for partial differential equations of even order, *AIP Conference Proceedings*, 2012, vol. 1470, no. 1, 3. DOI: https://doi.org/10.1063/1.4747625.
21. Ashurov R. R., Muhiddinova O. T. Initial-boundary value problem for hyperbolic equations with an arbitrary order elliptic operator, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki*, 2020, vol. 30, no. 1, pp. 8–19 (In Russian). EDN: UDRGAX. DOI: https://doi.org/10.26117/2079-6641-2020-30-1-8-19.
22. Ashurov R. R., Muhiddinova O. T. Initial-boundary value problem for a time-fractional subdiffusion equation with an arbitrary elliptic differential operator, *Lobachevskii J. Math.*, 2021, vol. 42, no. 2, pp. 517–525. EDN: WSMCML. DOI: https://doi.org/10.1134/S1995080221030070.
23. Karimov Sh. T. Method of solving the Cauchy problem for one-dimensional polywave equation with singular Bessel operator, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2017, vol. 61, no. 8, pp. 22–35. EDN: XNXGZY. DOI: https://doi.org/10.3103/S1066369X17080035.
24. Karimov Sh. T. On some generalizations of properties of the Lowndes operator and their applications to partial differential equations of high order, *Filomat*, 2018, vol. 32, no. 3, pp. 873–883. EDN: YBVBZJ. DOI: https://doi.org/10.2298/FIL1803873K.
25. Karimov Sh. T. The Cauchy problem for the degenerated partial differential equation of the high even order, *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2018, no. 15, pp. 853–862. EDN: VUTMHO. DOI: https://doi.org/10.17377/semi.2018.15.073.
26. Karimov Sh. T., Urinov A. K. Solution of the Cauchy problem for the four-dimensional hyperbolic equation with Bessel operator, *Vladikavkaz. Mat. Zh.*, 2018, vol. 20, no. 3, pp. 57–68 (In Russian). EDN: VKJWUR. DOI: https://doi.org/10.23671/VNC.2018.3.17991.
27. Urinov A. K., Karimov Sh. T. On the Cauchy problem for the iterated generalized two-axially symmetric equation of hyperbolic type, *Lobachevskii J. Math.*, 2020, vol. 41, no. 1, pp. 102–110. EDN: FNVWZQ. DOI: https://doi.org/10.1134/S199508022001014X.
28. Mikhlin S. G. *Linear Integral Equations*. Mineola, NY, Dover Publ., 2020, xv+223 pp.
29. Naimark M. A. *Lineinye differentsial’nye operatory* [Linear Differential Operators]. Moscow, Fizmatlit, 1969, 528 pp. (In Russian)