Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2022. Т. 26, № 2. С. 259–272
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1892
EDN: LJNJZP

УДК 517.956.6

Аналог задачи Дезина для уравнения параболо-гиперболического типа с условиями периодичности

Р. А. Киржинов

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
Россия, 360000, Нальчик, ул. Шортанова, 89 а.

Аннотация

В прямоугольной области рассматривается неоднородное уравнение смешанного параболо-гиперболического типа второго порядка. Для данного уравнения исследуется аналог задачи А. А. Дезина, который заключается в отыскании решения уравнения, удовлетворяющего внутреннекраевому условию, связывающему значение искомой функции на линии изменения типа уравнения со значением нормальной производной на границе в области гиперболичности, и неоднородным нелокальным краевым условиям периодичности. Приводится подстановка, позволяющая свести задачу к эквивалентной и, не теряя общности, ограничиться исследованием задачи с однородными условиями для неоднородного уравнения. Доказаны теоремы единственности и существования решения задачи, решение выписано в явном виде.

Решение поставленной задачи ищется в виде суммы ряда Фурье по ортонормированной системе собственных функций соответствующей одномерной спектральной задачи. Установлен критерий единственности решения задачи. Для случая, когда нарушен критерий единственности, приведен пример нетривиального решения однородной задачи и получено необходимое и достаточное условие существования решения неоднородной задачи.

При обосновании существования решения возникает проблема малых знаменателей в сумме ряда относительно соотношения сторон прямоугольника в гиперболической части области. Получена оценка отделенности знаменателя от нуля при некоторых условиях относительно параметров задачи, которая при определенных условиях на заданные функции позволяет доказать абсолютную и равномерную сходимость как формально построенного решения, так и соответствующих производных, входящих в уравнение.

Дифференциальные уравнения и математическая физика
Научная статья

Образец для цитирования
Киржинов Р. А. Аналог задачи Дезина для уравнения параболо-гиперболического типа с условиями периодичности // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 2. С. 259–272. EDN: LJNJZP. DOI: 10.14498/vsgtu1892.

Сведения об авторе
Ромазан Анатольевич Киржинов https://orcid.org/0000-0001-6645-7175
магистр; стажер–исследователь; отд. уравнений смешанного типа;
e-mail: kirzhinov.r@mail.ru

Ключевые слова: аналог задачи Дезина, уравнение параболо-гиперболического типа, нелокальные краевые условия.

Получение: 29 октября 2021 г. / Исправление: 7 декабря 2021 г. / Принятие: 24 января 2022 г. / Публикация онлайн: 13 мая 2022 г.

Введение. В 1963 г. А. А. Дезин в работе [1] рассмотрел вопрос о разрешимых расширениях для дифференциальных операторов смешанного типа и тогда же для уравнения с оператором Лаврентьева—Бицадзе в прямоугольной области сформулировал задачу с условием 2π-периодичности и нелокальным условием, связывающим значение искомой функции внутри области со значением ее производной на границе.

В [2, с. 18] приводится формулировка нелокальных краевых условий по терминологии Дезина. В работе [3] в специальной прямоугольной области для уравнения Лаврентьева—Бицадзе доказаны принцип экстремума, теоремы единственности и существования решения задачи Дезина.

В работах [4–7] для различных уравнений смешанного эллиптико-гиперболического типа в прямоугольной области изучены задачи с условием периодичности по переменной x и нелокальным условием Дезина. Установлены критерии единственности, решения задач построены в виде суммы ортогонального ряда по собственным функциям соответствующих одномерных спектральных задач. Исследована проблема малых знаменателей, возникающая при обосновании сходимости рядов, установлена оценка отделенности от нуля малых знаменателей с соответствующей асимптотикой.

Для уравнения параболо-гиперболического типа в [8, с. 174] доказана однозначная разрешимость аналога задачи Дезина в специальной прямоугольной области, исследован вопрос о спектре однородной задачи.

В данной работе исследуется аналог задачи Дезина в прямоугольной области $\{(x, y)\colon 0 < x < r,\ -\alpha < y < \beta\}$ для неоднородного уравнения смешанного параболо-гиперболического типа второго порядка с неоднородными нелокальными краевыми условиями, где r, α, β — вещественные положительные числа. Установлен критерий единственности решения исследуемой задачи. Решение построено в виде суммы ряда по ортонормированной системе собственных функций соответствующей одномерной спектральной задачи. При обосновании сходимости ряда возникает проблема малых знаменателей для отношения сторон α/r прямоугольника в части области, где рассматривается гиперболическое уравнение. При некоторых условиях относительно заданных функций и чисел λ, α, r показано, что сумма построенного ряда является решением задачи в искомом классе.

1. Постановка задачи. Пусть $\Omega = \{(x, y)\colon 0 < x < r,\ -\alpha < y < \beta\}$ — область евклидовой плоскости точек (x, y); $\Omega^+ = \Omega \cap \{(x, y)\colon y > 0\}$; $\Omega^- = \Omega \cap \{(x, y)\colon y < 0\}$; r, α, β — вещественные положительные числа. Обозначим через $C_x^k(\Omega)$ пространство функций $f(x, y)$ таких, что $\frac{\partial^k}{\partial x^k} f(x, y) \in C(\Omega)$.

В области Ω рассмотрим уравнение

$$L\,u = f, \tag{1}$$

где

$$L\,u = \begin{cases} u_{xx} - u_y, & y > 0, \\ u_{xx} - u_{yy}, & y < 0; \end{cases} \qquad f = \begin{cases} f^+(x,y), & y > 0, \\ f^-(x,y), & y < 0; \end{cases}$$

$u = u(x,y)$ — неизвестная функция, $f = f(x,y)$ — заданная функция.

Исследуется следующая

Задача 1. *Найти решение $u(x,y)$ уравнения (1) из класса*

$$C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2_x(\Omega) \cap C^2_y(\Omega^-),$$

удовлетворяющее условиям

$$u(0,y) - u(r,y) = \varphi(y), \quad u_x(0,y) - u_x(r,y) = \psi(y), \quad -\alpha \leqslant y \leqslant \beta, \tag{2}$$

$$u_y(x,-\alpha) = \lambda u(x,0), \quad 0 \leqslant x \leqslant r, \tag{3}$$

где $\lambda = const$, $\varphi(y)$, $\psi(y)$ — заданные достаточно гладкие функции, удовлетворяющие следующим условиям: $\varphi'(-\alpha) = \lambda\varphi(0)$, $\psi'(-\alpha) = \lambda\psi(0)$.

С помощью подстановки

$$v(x,y) = u(x,y) + w(x,y),$$

где

$$w(x,y) = \frac{x}{r}\Big(\varphi(y) + \frac{x-r}{2}\psi(y)\Big),$$

задачу 1 можно привести к эквивалентной задаче относительно новой функции $v(x,y)$ с однородными условиями вместо (2), при этом уравнение (1) примет вид $\widetilde{f}(x,y) = L\,v(x,y)$, где $\widetilde{f}(x,y) = f(x,y) - L\,w(x,y)$. Поэтому, не нарушая общности, дальнейшие рассуждения будем проводить при $\varphi(y) \equiv \equiv \psi(y) \equiv 0$.

2. Единственность решения. Пусть существует решение $u(x,y)$ задачи 1. По аналогии с работой [9] рассмотрим функции

$$u_k(y) = \frac{1}{\sqrt{r}} \int_0^r u(x,y) e^{i\mu_k x} dx, \tag{4}$$

где $\mu_k = 2\pi k/r$, $k \in \mathbb{Z}$.

На основании (4) введем функции

$$u_{k,\varepsilon}(y) = \frac{1}{\sqrt{r}} \int_\varepsilon^{r-\varepsilon} u(x,y) e^{i\mu_k x} dx, \tag{5}$$

где ε — достаточно малое положительное вещественное число.

Дифференцируя (5) по переменной y, с учетом уравнения (1) при $y > 0$ получим

$$u'_{k,\varepsilon}(y) + f^+_k(y) = \frac{1}{\sqrt{r}} \int_\varepsilon^{r-\varepsilon} \big\{u_y(x,y) + f^+(x,y)\big\} e^{i\mu_k x} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{r}} \int_{\varepsilon}^{r-\varepsilon} u_{xx}(x,y) e^{i\mu_k x} dx. \quad (6)$$

Дифференцируя (5) дважды по переменной y, с учетом уравнения (1) при $y<0$ получим

$$u''_{k,\varepsilon}(y) + f_k^-(y) = \frac{1}{\sqrt{r}} \int_{\varepsilon}^{r-\varepsilon} \big\{u_{yy}(x,y) + f^-(x,y)\big\} e^{i\mu_k x} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{r}} \int_{\varepsilon}^{r-\varepsilon} u_{xx}(x,y) e^{i\mu_k x} dx. \quad (7)$$

В равенствах (6), (7), интегрируя два раза по частям интегралы, содержащие $u_{xx}(x,y)$, и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, с учетом граничных условий (2) получим

$$\begin{cases} u'_k(y) + \mu_k^2 u_k(y) + f_k^+(y) = 0, & y>0, \\ u''_k(y) + \mu_k^2 u_k(y) + f_k^-(y) = 0, & y<0, \end{cases} \quad (8)$$

где

$$f_k^+(y) = \frac{1}{\sqrt{r}} \int_0^r f^+(x,y) e^{i\mu_k x} dx, \quad (9)$$

$$f_k^-(y) = \frac{1}{\sqrt{r}} \int_0^r f^-(x,y) e^{i\mu_k x} dx. \quad (10)$$

Общие решения дифференциальных уравнений (8) выписываются в следующем виде:

$$u_k(y) = \begin{cases} c_k\, e^{-\mu_k^2 y} - \displaystyle\int_0^y f_k^+(\eta)\, e^{-\mu_k^2(y-\eta)}\, d\eta, & y>0, \\ a_k \cos \mu_k y + b_k \sin \mu_k y - \displaystyle\int_y^0 f_k^-(\eta) \frac{\sin \mu_k(\eta - y)}{\mu_k}\, d\eta, & y<0, \end{cases} \quad (11)$$

где a_k, b_k, c_k — произвольные постоянные.

С учетом того, что $u(x,y) \in C^1(\overline{\Omega})$, (4) и полноты системы функций

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{r}} e^{i\mu_k x} \right\}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (12)$$

в пространстве $L_2[0,r]$ имеем

$$u_k(0+0) = u_k(0-0), \quad u'_k(0+0) = u'_k(0-0). \quad (13)$$

Удовлетворяя (11) условиям (13), находим

$$b_k = -\mu_k a_k - f_k^+(0) \frac{1}{\mu_k}, \quad c_0 = a_0, \quad c_k = a_k, \qquad k \neq 0.$$

Тогда функции (11) примут вид

$$u_k(y) = \begin{cases} a_k e^{-\mu_k^2 y} - \displaystyle\int_0^y f_k^+(\eta) e^{-\mu_k^2 (y-\eta)} d\eta, & y > 0, \\ a_k(\cos\mu_k y - \mu_k \sin\mu_k y) - \\ \qquad - f_k^+(0)\dfrac{\sin\mu_k y}{\mu_k} - \displaystyle\int_y^0 f_k^-(\eta)\dfrac{\sin\mu_k(\eta - y)}{\mu_k} d\eta, & y < 0. \end{cases} \tag{14}$$

Дифференцируя равенства (4) по переменной y, с учетом нелокального условия (3) получаем

$$u_k'(-\alpha) = \frac{1}{\sqrt{r}} \int_0^r u_y(x, -\alpha) e^{i\mu_k x} dx = \frac{1}{\sqrt{r}} \int_0^r \lambda u(x, 0) e^{i\mu_k x} dx = \lambda u_k(0).$$

Пусть

$$\delta_k(\alpha, \lambda) = \mu_k^2 \cos\mu_k \alpha - \mu_k \sin\mu_k \alpha + \lambda \neq 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \tag{15}$$

тогда находим

$$a_k = -f_k^+(0)\frac{\cos\mu_k\alpha}{\delta_k(\alpha,\lambda)} + \int_{-\alpha}^0 f_k^-(\eta)\frac{\cos\mu_k(\eta+\alpha)}{\delta_k(\alpha,\lambda)}\, d\eta. \tag{16}$$

Выясним, при каких α, λ, r и k выражение $\delta_k(\alpha,\lambda) = 0$. Представим $\delta_k(\alpha,\lambda)$ в следующем виде:

$$\delta_k(\alpha,\lambda) = \sqrt{\mu_k^4 + \mu_k^2}\,\sin(\gamma_k - \mu_k\alpha) + \lambda, \tag{17}$$

где

$$\gamma_k = \arcsin\frac{1}{\sqrt{1 + 1/\mu_k^2}} = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{1+\mu_k^2}} \to \frac{\pi}{2} \quad \text{при} \quad k \to +\infty.$$

Из представления (17) видно, что $\delta_k(\alpha,\lambda) = 0$ только в том случае, когда

$$\frac{|\lambda|}{\sqrt{\mu_k^4+\mu_k^2}} \leqslant 1, \quad k \in \mathbb{Z},$$

и

$$\alpha = \frac{1}{\mu_k}\Big[(-1)^n \arcsin\frac{\lambda}{\sqrt{\mu_k^4+\mu_k^2}} + \pi n + \gamma_k\Big], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Пусть при некоторых значениях α, λ и $k = p \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ нарушено условие (15), тогда a_p может принимать любое значение и однородная задача, соответствующая задаче 1 при $f \equiv 0$, имеет нетривиальное решение вида

$$u_p(x,y) = \begin{cases} a_p e^{i\mu_p x} e^{-\mu_p^2 y}, & 0 \leqslant y \leqslant \beta, \\ a_p e^{i\mu_p x}(\cos\mu_p y - \mu_p \sin\mu_p y), & -\alpha \leqslant y \leqslant 0, \end{cases}$$

причем неоднородная задача 1 будет иметь решение только в том случае, когда для f выполнено условие

$$f_p^+(0)\cos\mu_p\alpha = \int_{-\alpha}^{0} f_p^-(\eta)\cos\mu_p(\eta+\alpha)\,d\eta. \tag{18}$$

Из (14) и (16) видно, что если $f^+(x,y)\equiv 0$, $f^-(x,y)\equiv 0$, то из (4) имеем

$$u_k(y) = \frac{1}{\sqrt{r}}\int_0^r u(x,y)e^{i\mu_k x}dx = 0 \quad \forall k\in\mathbb{Z}.$$

Отсюда в силу полноты системы функций (12) в пространстве $L_2[0,r]$ и непрерывности $u(x,y)$ в $\overline{\Omega}$ следует, что $u(x,y)\equiv 0$ в $\overline{\Omega}$.

Таким образом, справедлива

Теорема 1. *Если существует решение $u(x,y)$ задачи 1, то оно однозначно определяется только тогда, когда выполнено условие* (15).

3. Существование решения. Решение задачи 1 при выполнении условий (15) будем искать формально в виде суммы ряда

$$u(x,y) = \frac{1}{\sqrt{r}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_k(y)e^{-i\mu_k x}, \tag{19}$$

где коэффициенты $u_k(y)$ определяются формулами (14), (16).

Поскольку $\delta_k(\alpha,\lambda)$ входит в знаменатель ряда (19), для обоснования существования решения задачи 1 необходимо показать, что существуют числа α, λ и r такие, что выражение $\delta_k(\alpha,\lambda)$ отделено от нуля с соответствующей асимптотикой.

Оценим выражение

$$\delta_k(\alpha,\lambda) = \mu_k^2\cos\mu_k\alpha - \mu_k\sin\mu_k\alpha + \lambda, \quad \mu_k = \frac{2\pi k}{r}, \quad k\in\mathbb{N}, \tag{20}$$

и выясним, существуют ли α, λ, r и постоянная C_0 такие, что при всех $k\in\mathbb{N}$ справедлива оценка

$$\inf_k|\delta_k(\alpha,\lambda)| \geqslant \frac{\mu_k^2}{C_0} > 0. \tag{21}$$

Лемма 1. *Если $2\alpha/r = \widetilde{\alpha}\in\mathbb{N}$ и $|\lambda| < (2\pi/r)^2$, то существует положительная $\widetilde{C}_1$, зависящая от λ и r, такая, что при всех $k\in\mathbb{N}$ справедлива оценка*

$$|\delta_k(\alpha,\,\lambda)| \geqslant \mu_k^2\,\widetilde{C}_1 > 0.$$

Доказательство. Пусть $2\alpha/r = \widetilde{\alpha}\in\mathbb{N}$. Тогда (20) примет вид

$$\delta_k(\alpha,\,\lambda) = \mu_k^2\,(-1)^{k\,\widetilde{\alpha}} + \lambda.$$

Если $|\lambda| < (2\pi/r)^2$, то из последнего заключаем

$$|\delta_k(\alpha,\lambda)| = |\mu_k^2(-1)^{k\widetilde{\alpha}} + \lambda| \geqslant \mu_k^2\Big|1 - \frac{|\lambda|}{\mu_k^2}\Big| \geqslant \mu_k^2\widetilde{C}_1,$$

где

$$\widetilde{C}_1 = 1 - \frac{|\lambda|}{(2\pi/r)^2} > 0.$$

Лемма 1 доказана. □

Лемма 2. *Пусть* $2\alpha/r = \widetilde{\alpha} = p/q \in \mathbb{Q}$, $p, q \in \mathbb{N}$, НОД$(p,q) = 1$, q — *нечетное число*, $|\lambda| \leqslant \lambda_0 = 2(\sqrt{2-q^{-2}}-1)$, $r \leqslant r_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{2}\sqrt{q^2-1}}$. *Тогда существует положительная* $\widetilde{C}_2$, *зависящая от* λ, r, *такая, что при всех* $k \in \mathbb{N}$ *справедлива оценка*

$$|\delta_k(\alpha,\lambda)| > \mu_k^2\widetilde{C}_2 > 0.$$

Доказательство. Пусть $2\alpha/r = \widetilde{\alpha} = p/q \in \mathbb{Q}$, $p, q \in \mathbb{N}$, НОД$(p,q) = 1$, q — нечетное число. Разделим kp на q с остатком:

$$kp = sq + t, \quad s, t \in \mathbb{N}\cup\{0\}, \quad 0 \leqslant t < q.$$

Тогда из (17) получим

$$|\delta_k(\alpha,\lambda)| = \Big|\sqrt{\mu_k^4+\mu_k^2}(-1)^s\sin\Big(\gamma_k - \frac{\pi t}{q}\Big) + \lambda\Big|.$$

Если $t = 0$, то этот случай сводится к уже рассмотренному выше случаю $2\alpha/r = \widetilde{\alpha} \in \mathbb{N}$.

Пусть $t > 0$, $r \leqslant r_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{2}\sqrt{q^2-1}}$, $|\lambda| \leqslant \lambda_0 = 2(\sqrt{2-q^{-2}}-1)$. Тогда

$$|\sin(\gamma_k - \mu_k\alpha)| = \Big|\sin\Big(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{1+\mu_k^2}} - \frac{\pi t}{q}\Big)\Big| \geqslant$$
$$\geqslant \Big|\sin\Big(\frac{\pi}{2q} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{1+\mu_k^2}}\Big)\Big| \geqslant \frac{2}{\pi}\Big|\frac{\pi}{2q} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{1+\mu_k^2}}\Big| \geqslant$$
$$\geqslant \Big|\frac{1}{q} - \frac{1}{\sqrt{1+\mu_k^2}}\Big| > \frac{1}{q}\Big(1 - \frac{1}{\sqrt{2-q^{-2}}}\Big) > \frac{1}{4q}.$$

При этом

$$|\delta_k(\alpha,\lambda)| > \mu_k^2\sqrt{1+\mu_k^{-2}}\,\frac{1}{4q} - |\lambda| = \mu_k^2\sqrt{1+\mu_k^{-2}}\Big[\frac{1}{4q} - \frac{|\lambda|}{|\mu_k|\sqrt{1+\mu_k^2}}\Big] \geqslant$$
$$\geqslant \mu_k^2\Big[\frac{1}{4q} - \frac{|\lambda|}{\mu_1\sqrt{1+\mu_1^2}}\Big] \geqslant \mu_k^2\Big[\frac{1}{4q} - \frac{2(\sqrt{2-q^{-2}}-1)}{\sqrt{2}\sqrt{q^2-1}q\sqrt{2-q^{-2}}}\Big] > \mu_k^2\widetilde{C}_2 > 0,$$

где $\widetilde{C}_2 = 1/(8q) > 0$. Лемма 2 доказана. □

Лемма 3. *Пусть $2\alpha/r = \widetilde{\alpha}$ является иррациональным числом. Тогда существуют положительные постоянные λ_0, r_0 и $\widetilde{C}_3$, для которых при всех $|\lambda| < \lambda_0$ и $r < r_0$, и $k \in \mathbb{N}$ справедлива оценка*

$$|\delta_k(\alpha,\, \lambda)| > \mu_k^2\, \widetilde{C}_3 > 0.$$

Доказательство. Пусть $2\alpha/r = \widetilde{\alpha}$ является иррациональным числом. В силу известных неравенств

$$|x| \leqslant |\arcsin x| \leqslant \frac{\pi}{2}|x|, \quad |x| \leqslant 1,$$

справедлива оценка

$$0 < \frac{1}{\sqrt{1+\mu_k^2}} \leqslant \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+\mu_k^2}} \leqslant \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\mu_k^2}}. \tag{22}$$

Для всякого $k \in \mathbb{N}$ можно подобрать $n \in \mathbb{Z}$ такое, что имеет место неравенство [10, с. 37]

$$|k\widetilde{\alpha} - n| < \frac{1}{\sqrt{5}k}.$$

Пусть $n \in \mathbb{Z}$ такое, что выполнено последнее неравенство или равносильное ему

$$\pi|k\widetilde{\alpha} - n| < \frac{\pi}{\sqrt{5}k}. \tag{23}$$

Из (22) и (23) имеем

$$\left|\arcsin \frac{1}{\sqrt{1+\mu_k^2}} + \pi(k\widetilde{\alpha} - n)\right| \leqslant \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+\mu_k^2}} + \pi k\left|\widetilde{\alpha} - \frac{n}{k}\right| <$$
$$< \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\mu_k^2}} + \frac{\pi}{\sqrt{5}k} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\mu_k^2}} + \frac{2}{\sqrt{5}k}\right) \leqslant \frac{\pi}{2}$$

при условии

$$r \leqslant r_0 = \frac{\pi}{2}\sqrt{5\sqrt{5} - 11} \leqslant \pi k\sqrt{\frac{2k^2 - 4\sqrt{5}k + 4}{\sqrt{5}k - 1}}.$$

С учетом этого и того, что $1 - \frac{2}{\pi}|x| \leqslant \cos x$ при $|x| \leqslant \frac{\pi}{2}$, имеем

$$\left|\sin(\gamma_k - \mu_k\alpha)\right| = \left|\cos\left[\arcsin \frac{1}{\sqrt{1+\mu_k^2}} + \pi(k\widetilde{\alpha} - n)\right]\right| > \cos\frac{\pi}{2}r_0 \geqslant 1 - r_0.$$

Возвращаясь к $\delta_k(\alpha,\lambda)$, из (17) при $r < r_0$, $|\lambda| < \lambda_0$ имеем

$$
\begin{aligned}
|\delta_k(\alpha,\lambda)| \geqslant \sqrt{\mu_k^4+\mu_k^2}(1-r_0)-|\lambda| \geqslant \\
\geqslant \sqrt{\mu_k^4+\mu_k^2}\left(1-r_0-\frac{|\lambda|}{\sqrt{(2\pi/r)^4+(2\pi/r)^2}}\right) = \\
= \sqrt{\mu_k^4+\mu_k^2}(1-r_0)\left(1-\frac{|\lambda|}{\lambda_0}\right) > \mu_k^2\widetilde{C}_3 > 0,
\end{aligned}
$$

где $\widetilde{C}_3=(1-r_0)(1-|\lambda|/\lambda_0)$, $\lambda_0=(1-r_0)\sqrt{(2\pi/r)^4+(2\pi/r)^2}$.

Лемма 3 доказана. □

Теперь при определенных условиях на функцию $f(x,y)$ покажем, что функция $u(x,y)$, представимая в виде (19), где $u_k(y)$ определяются формулами (14) и (16), является решением задачи 1.

Формально из (19) почленным дифференцированием составим ряды:

$$
u_{xx}(x,y)=\frac{1}{\sqrt{r}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\mu_k^2u_k(y)e^{-i\mu_kx},\quad (x,y)\in\Omega, \tag{24}
$$

$$
u_y(x,y)=\frac{1}{\sqrt{r}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}u_k'(y)e^{-i\mu_kx},\quad (x,y)\in\Omega^+, \tag{25}
$$

$$
u_{yy}(x,y)=\frac{1}{\sqrt{r}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}u_k''(y)e^{-i\mu_kx},\quad (x,y)\in\Omega^-. \tag{26}
$$

Из (14) и соответствующих производных при $k=0$ имеем

$$
\begin{gathered}
|u_0(y)| \leqslant \frac{1}{|\lambda|}|f_0^+(0)|+\frac{\alpha}{|\lambda|}\|f_0^-\|_C^- + \begin{cases}\beta\|f_0^+\|_C^+, & y\geqslant 0,\\ \dfrac{\alpha^2}{2}\|f_0^-\|_C^-, & y\leqslant 0,\end{cases}\\
|u_0'(y)| \leqslant |f_0^+(y)| \leqslant \|f_0^+\|_C^+,\quad y>0,\\
|u_0''(y)| \leqslant |f_0^-(y)| \leqslant \|f_0^-\|_C^-,\quad y<0,
\end{gathered}
$$

где

$$
\|f_0^+\|_C^+ = \max_{0\leqslant y\leqslant\beta}|f_0^+(y)|,\quad \|f_0^-\|_C^- = \max_{-\alpha\leqslant y\leqslant 0}|f_0^-(y)|.
$$

Теперь, для доказательства сходимости (19) и соответствующих производных (24), (25), (26), достаточно доказать сходимость сумм при $k\neq 0$.

Далее нам понадобится

Лемма 4. *Если*

$$
\begin{gathered}
f^-(x,y)\in C_{x,y}^{1,0}(\overline{\Omega}^-),\quad f^+(x,y)\in C_{x,y}^{1,0}(\overline{\Omega}^+),\\
f^+(x,0)\in C^2[0,r],\quad f_x^+(0,0)=f_x^+(r,0),\\
f^-(0,y)=f^-(r,y),\quad -\alpha\leqslant y\leqslant 0,\\
f^+(0,y)=f^+(r,y),\quad 0\leqslant y\leqslant \beta,
\end{gathered}
$$

то для коэффициентов $f_k^-(y)$ ряда Фурье (10) функции $f^-(x,y)$ и коэффициентов $f_k^+(y)$ ряда Фурье (9) функции $f^+(x,y)$ при всех $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ справедливы оценки

$$|f_k^-(y)| \leqslant \frac{C_1}{\mu_k^2}, \qquad -\alpha \leqslant y \leqslant 0, \tag{27}$$

$$|f_k^+(0)| \leqslant \frac{C_1}{|\mu_k|^3}, \quad |f_k^+(y)| \leqslant \frac{C_1}{\mu_k^2}, \qquad 0 < y \leqslant \beta, \tag{28}$$

где C_1 — некоторая положительная постоянная.

Справедливость леммы 4 следует из теории рядов Фурье (см., напр., [11, гл. 11, § 4, п. 2]).

Лемма 5. *Пусть имеют место оценки (21), (27), (28). Тогда при всех $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ справедливы оценки*

$$|u_k(y)| \leqslant \frac{C_2}{\mu_k^4}, \quad -\alpha \leqslant y \leqslant \beta,$$

$$|u_k'(y)| \leqslant \frac{C_2}{\mu_k^2}, \quad 0 < y < \beta,$$

$$|u_k''(y)| \leqslant \frac{C_2}{\mu_k^2}, \quad -\alpha < y < 0,$$

где C_2 — некоторая положительная постоянная.

Доказательство. С учетом (21) и второй теоремы о среднем значении [12] имеют место следующие оценки:

$$|e^{-\mu_k^2 y}| \leqslant 1, \quad \left|\int_0^y f_k^+(\eta) e^{-\mu_k^2(y-\eta)} d\eta\right| \leqslant \frac{1}{\mu_k^2} S(f_k^+), \quad y > 0,$$

$$\left|f_k^+(0)\frac{\cos\mu_k\alpha}{\delta_k(\alpha,\lambda)}\right| \leqslant \frac{C_0}{\mu_k^2}|f_k^+(0)|, \quad \left|\int_{-\alpha}^0 f_k^-(\eta)\frac{\cos\mu_k(\eta+\alpha)}{\delta_k(\alpha,\lambda)} d\eta\right| \leqslant \frac{2C_0}{|\mu_k|^3} S(f_k^-),$$

$$\left|\cos\mu_k y - \mu_k \sin\mu_k y\right| \leqslant 1 + |\mu_k|, \quad y < 0,$$

$$\left|f_k^+(0)\frac{\sin\mu_k y}{\mu_k}\right| \leqslant \frac{1}{|\mu_k|}|f_k^+(0)|, \quad y < 0,$$

$$\left|\int_y^0 f_k^-(\eta)\frac{\sin\mu_k(\eta - y)}{\mu_k} d\eta\right| \leqslant \frac{2}{\mu_k^2} S(f_k^-), \quad y < 0,$$

где

$$S(f_k^+) = \sum_{i=1}^m \big(|f_k^+(y_{i-1})| + |f_k^+(y_i)|\big), \quad S(f_k^-) = \sum_{i=1}^n \big(|f_k^-(y_{i-1})| + |f_k^-(y_i)|\big),$$

y_i разбивают область определения соответствующей функции на (наименьшее) конечное число частей, в каждой из которых данная функция монотонна.

Из оценок выше, а также (14), (16) находим:

$$|u_k(y)| \leqslant \begin{cases} \dfrac{C_0}{\mu_k^2}|f_k^+(0)| + \dfrac{2C_0}{|\mu_k|^3}S(f_k^-) + \dfrac{1}{\mu_k^2}S(f_k^+), & y \geqslant 0, \\ \Big(\dfrac{2\pi + r}{2\pi}C_0 + 1\Big)\Big(\dfrac{1}{|\mu_k|}|f_k^+(0)| + \dfrac{2}{\mu_k^2}S(f_k^-)\Big), & y \leqslant 0, \end{cases} \tag{29}$$

$$|u_k'(y)| \leqslant C_0|f_k^+(0)| + \frac{2C_0}{|\mu_k|}S(f_k^-) + S(f_k^+) + |f_k^+(y)|, \quad y > 0, \tag{30}$$

$$|u_k''(y)| \leqslant \Big(\frac{2\pi + r}{2\pi}C_0 + 1\Big)\big(|\mu_k|\,|f_k^+(0)| + 2S(f_k^-)\big) + |f_k^-(y)|, \quad y < 0. \tag{31}$$

Если положить

$$C_2 = C_1\Big(1 + \max\Big\{(4n+1)C_0 + 2m,\ \Big(\frac{2\pi + r}{2\pi}C_0 + 1\Big)(4n+1)\Big\}\Big),$$

то из (29), (30), (31) с учетом (27), (28) следует справедливость леммы 5. □

Из оценок леммы 5 по признаку Вейерштрасса следует абсолютная и равномерная сходимость рядов (24), (25), (26) и, значит, можно непосредственно показать, что (19) является решением $u(x, y)$ задачи 1.

Таким образом доказана

Теорема 2. *Пусть выполнены условия одной из лемм 1–3 и $f(x, y)$ удовлетворяет условиям леммы 4. Тогда существует единственное решение задачи 1, причем решение $u(x, y)$ полностью определяется равенством (19) с учетом (9), (10), (14), (16). Если при каких-то значениях α, λ и $k = p \in \mathbb{Z}$ нарушено условие (15), то задача 1 разрешима тогда и только тогда, когда выполнено условие (18).*

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Дезин А. А. Простейшие разрешимые расширения для ультрагиперболического и псевдопараболического операторов // *Докл. АН СССР*, 1963. Т. 148, № 5. С. 1013–1016.
2. Нахушев А. М. *Задачи со смещением для уравнений в частных производных*. М.: Наука, 2006. 287 с. EDN: PDBUIH.
3. Нахушева З. А. Об одной нелокальной задаче А. А. Дезина для уравнения Лаврентьева—Бицадзе // *Диффер. уравн.*, 2009. Т. 45, № 8. С. 1199–1203. EDN: KUEVVX.
4. Сабитов К. Б. Задача Дезина для уравнения смешанного типа со степенным вырождением // *Диффер. уравн.*, 2019. Т. 55, № 10. С. 1426–1431. EDN: HCBKMU. DOI: https://doi.org/10.1134/S0374064119100133.
5. Сабитов К Б., Новикова В. А. Нелокальная задача А. А. Дезина для уравнения Лаврентьева—Бицадзе // *Изв. вузов. Матем.*, 2016. № 6. С. 61–72. EDN: VPQASJ.
6. Сабитов К. Б., Гущина В. А. Задача А. А. Дезина для неоднородного уравнения Лаврентьева—Бицадзе // *Изв. вузов. Матем.*, 2017. № 3. С. 37–50. EDN: XEDKCH.

7. Гущина В. А. Нелокальная задача А. А. Дезина для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2016. Т. 20, № 1. С. 22–32. EDN: WQPWFT. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1470.
8. Нахушева З. А. *Нелокальные краевые задачи для основных и смешанного типов дифференциальных уравнений.* Нальчик: КБНЦ РАН, 2012. 196 с. EDN: PFJSRF.
9. Сабитов К. Б. Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области // *Докл. РАН*, 2007. Т. 413, № 1. С. 23–26. EDN: IAALPP.
10. Чандрасекхаран К. *Введение в аналитическую теорию чисел.* М.: Мир, 1974. 188 с.
11. Будак Б. М., Фомин С. В. *Кратные интегралы и ряды.* М.: Наука, 1967. 608 с.
12. Фихтенгольц Г. М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления.* Т. 2. М.: Физматлит, 2003. 864 с. EDN: QJMDGD.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 2, pp. 259–272
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1892

MSC: 35M10

Dezin problem analog for a parabolic-hyperbolic type equation with periodicity condition

R. A. Kirzhinov

Institute of Applied Mathematics and Automation
of Kabardin-Balkar Scientific Centre of RAS,
89 a, Shortanova st., Nal'chik, 360000, Russian Federation.

Abstract

In this paper we consider an inhomogeneous second-order parabolic-hyperbolic mixed type equation, represented as one-dimensional heat equation in the parabolic part and the one-dimensional wave equation in the hyperbolic part. For the equation, an analog of the Dezin problem is investigated, which means to find a solution to the equation that satisfies inner-boundary condition, relating the value of the desired function on the equation type change line to the value of the normal derivative on the hyperbolicity region boundary, and inhomogeneous periodicity nonlocal boundary conditions. A substitution is given that allows us to reduce the problem to an equivalent one and, without losing generality, restrict ourselves to investigate the problem with homogeneous conditions for an inhomogeneous equation.

The solution is constructed as the Fourier series on the orthonormal system of eigenfunctions of the corresponding one-dimensional spectral problem. A criterion for the solution uniqueness to the problem is established.

In case when the uniqueness criterion is violated, an example of a nontrivial solution to a homogeneous problem is given, and a necessary and sufficient condition for the existence of a solution to an inhomogeneous problem is obtained.

In justifying the solution existence, the problem of small denominators in the sum of the series with respect to the ratio of the rectangle sides in the hyperbolic part of the domain. An estimate of the denominator separation from zero under certain conditions with respect to the problem parameters is obtained. This estimate allows us to substantiate the uniform convergence of the series and their derivatives up to the second-order inclusive under certain conditions for given functions.

Differential Equations and Mathematical Physics
Research Article

Please cite this article in press as:
Kirzhinov R. A. Dezin problem analog for a parabolic-hyperbolic type equation with periodicity condition, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 2, pp. 259–272. EDN: LJNJZP. DOI: 10.14498/vsgtu1892 (In Russian).

Author's Details:
Romazan A. Kirzhinov https://orcid.org/0000-0001-6645-7175
M.Sc.; Trainee Researcher; Dept. of Mixed-Type Equatios; e-mail: kirzhinov.r@mail.ru

Keywords: Dezin problem analog, parabolic-hyperbolic type equation, nonlocal boundary conditions.

Received: 29th October, 2021 / Revised: 7th December, 2021 / Accepted: 24th January, 2022 / First online: 13th May, 2022

Competing interests. I have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. I take full responsibility for submit the final manuscript to print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. Not applicable.

References

1. Dezin A. A. The simplest solvable extensions of ultrahyperbolic and pseudoparabolic operators, *Sov. Math., Dokl.*, 1963, vol. 4, pp. 208–211.
2. Nakhushev A. M. *Zadachi so smeshcheniem dlia uravnenii v chastnykh proizvodnykh* [Problems with Shifts for Partial Differential Equations]. Moscow, Nauka, 2006, 287 pp. (in Russian)
3. Nakhusheva Z. A. On a nonlocal problem of A. A. Dezin for the Lavrent'ev–Bitsadze equation, *Differ. Equat.*, 2009, vol. 45, no. 8, pp. 1223–1228. EDN: MWSRUF. DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266109080151.
4. Sabitov K. B. Dezin problem for an equation of the mixed type with a power-law degeneracy, *Differ. Equat.*, 2019, vol. 55, no. 10, pp. 1384–1389. EDN: BCTAQW. DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266119100136.
5. Sabitov K. B., Novikova V. A. Nonlocal Dezin's problem for Lavrent'ev–Bitsadze equation, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2016, vol. 60, no. 6, pp. 52–62. EDN: WTXQCH. DOI: https://doi.org/10.3103/S1066369X16060074.
6. Sabitov K. B., Gushchina V. A. Dezin's problem for inhomogeneous Lavrent'ev–Bitsadze equation, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2017, vol. 61, no. 3, pp. 31–43. EDN: YVEDKR. DOI: https://doi.org/10.3103/S1066369X17030045.
7. Gushchina V. A. The nonlocal A. A. Desin's problem for an equation of mixed elliptic-hyperbolic type, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2016, vol. 20, no. 1, pp. 22–32 (In Russian). DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1470.
8. Nakhusheva Z. A. *Nelokal'nye kraevye zadachi dlia osnovnykh i smeshannogo tipov differentsial'nykh uravnenii* [Nonlocal Boundary-Value Problems for Basic and Mixed Types of Differential Equations]. Nalchik, KBNTs RAN, 2012, 196 pp. (in Russian)
9. Sabitov K. B. Dirichlet problem for mixed-type equations in a rectangular domain, *Dokl. Math.*, 2007, vol. 75, no. 1, pp. 193–196. EDN: LKMREP. DOI: https://doi.org/10.1134/S1064562407020056.
10. Chandrasekharan K. *Introduction to Analytic Number Theory*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 148. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1968, viii+144 pp. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-46124-8.
11. Budak B. M., Fomin S. V. *Multiple integrals, field theory and series. An advanced course in higher mathematics.* Moscow, Mir Publ., 1973, 640 pp.
12. Fichtenholz G. M. *Differential- und Integralrechnung. II* [Differential and integral calculus. II], Hochschulbücher für Mathematik [University Books for Mathematics], vol. 62. Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1986, 836 pp. (In German)