



УДК 521.182

## Сравнение элементов орбит больших планет, Луны и Солнца с использованием различных математических моделей на интервале времени с 1600 по 2200 гг.

А. Ф. Заусаев, М. А. Романюк

Самарский государственный технический университет,  
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.



### Аннотация

Проведен анализ точности элементов орбит, полученных по координатам и компонентам скоростей, найденных с помощью коэффициентов многочленов Чебышева планетного каталога DE405. Для исследования на интервале времени с 1600 по 2200 гг. проведено сопоставление элементов орбит, найденных с помощью каталога DE405, а также полученных на основании численного интегрирования уравнений движения, основанных на взаимодействии движущихся материальных тел с окружающим пространством. На примере численного интегрирования уравнений движения Луны показано преимущество использования уравнений движения, основанных на взаимодействии движущихся материальных тел с окружающим пространством по сравнению с релятивистскими уравнениями. На основании сравнения элементов орбит Меркурия, полученных путем решения уравнений, основанных на взаимодействии движущихся материальных тел с окружающим пространством и найденных с помощью использования каталога DE405, показано, что на исследуемом интервале времени элементы орбит практически совпадают. Максимальное расхождение в средней аномалии на конце интервала интегрирования составляет менее  $1''$  (секунды дуги). Определены невязки вековых смещений перигелиев для Меркурия, Венеры, Земли + Луны и Марса, значения которых для DE405 соответственно равны:  $43.08''$ ,  $8.4''$ ,  $3.83''$  и  $1.14''$ . Показано, что погрешности вековых смещений перигелиев планет Меркурия, Венеры, барицентра Земли + Луны и Марса, полученные

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ  
Научная статья

© Коллектив авторов, 2022

© СамГТУ, 2022 (составление, дизайн, макет)

  Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International \(https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru)

### Образец для цитирования

Заусаев А. Ф., Романюк М. А. Сравнение элементов орбит больших планет, Луны и Солнца с использованием различных математических моделей на интервале времени с 1600 по 2200 гг. // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 4. С. 738–763. EDN: DVJGRH. DOI: 10.14498/vsgtu1888.

### Сведения об авторах

Анатолий Федорович Заусаев  <https://orcid.org/0000-0002-5035-9615>

доктор физико-математических наук; профессор; каф. прикладной математики и информатики; e-mail: [zausaev\\_af@mail.ru](mailto:zausaev_af@mail.ru)

Мария Анатольевна Романюк  <https://orcid.org/0000-0003-1352-6725>

кандидат технических наук; доцент; каф. прикладной математики и информатики; e-mail: [zausmasha@mail.ru](mailto:zausmasha@mail.ru)

при использовании каталога DE405, принимают следующие значения:  $0''$ ,  $6.06''$ ,  $3.83''$  и  $1.08''$ . Для внешних планет: Юпитера, Сатурна, Урана, Нептуна и карликовой планеты Плутон на основании рассмотренных сравнений различных уравнений движения расхождений элементов орбит не обнаружено. На основании проведенных исследований показано, что использование гармонических координат в релятивистских уравнениях при создании каталога DE405 оправдано только для Меркурия и внешних планет: Юпитера, Сатурна, Урана, Нептуна и карликовой планеты Плутон.

**Ключевые слова:** элементы орбит, численное интегрирование, дифференциальные уравнения движения.

Получение: 19 октября 2021 г. / Исправление: 15 октября 2022 г. /

Принятие: 17 ноября 2022 г. / Публикация онлайн: 6 декабря 2022 г.

Исследование движения больших планет, Луны и Солнца сопряжено с большим объемом вычислений, точность которых зависит от выбора как математической модели движения, так и метода решения задачи. Математическая модель движения небесных тел, как правило, описывается системой дифференциальных уравнений второго порядка. В основе каждой математической модели лежат определенные физические предпосылки. Важную роль в механике играет понятие пространства.

Понятие об эфире исходит из глубокой древности. Две с половиной тысячи лет назад ученые древней Греции сформулировали и развили понятие об эфире. Эфирная концепция достигла своей кульминации в XIX веке, когда Максвелл, опираясь на созданную им модель эфира, получил фундаментальные уравнения электродинамики [1].

В теории тяготения Ньютона под пространством понимается плоское евклидово пространство. Механика Ньютона основана на законе всемирного тяготения и трех законах движения [2, 3].

В основе релятивистской механики лежат два основных принципа: принцип эквивалентности и принцип общековариантности [4, 5]. Принцип эквивалентности говорит о том, что все физические процессы протекают одинаково в инерциальной системе, находящейся в однородном поле тяготения и в неинерциальной равномерно ускоренной системе. Из принципа общековариантности следует, что уравнения должны иметь одну и ту же форму во всех без исключения системах отсчета. Опираясь на эти принципы, Эйнштейн пришел к выводу, что пространство событий общей теории относительности должно представлять собой псевдориманово четырехмерное пространство с метрикой [6]

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \quad (1)$$

Движение пробной частицы под действием тяготения — это свободное движение по инерции, происходящее по геодезическим линиям псевдориманова пространства, метрика которого формируется самими гравитационными массами.

С развитием квантовой теории появился термин — физический вакуум. Физический вакуум является особым видом материи, претендующим на первооснову мира. Физический вакуум стал предметом изучения физики бла-

годаря усилиям известных ученых: П. Дирака, Р. Фейнмана, Дж. Уилера, У. Лэмба, де Ситтера, Г. Казимира, Я. Б. Зельдовича [7–10]. Столь разнообразное представление от эфира до физического вакуума об окружающем нас пространстве говорит о сложности проблемы, стоящей перед наукой.

Следует отметить, что в настоящее время свойства окружающего нас пространства недостаточно изучены, поэтому при выводе дифференциальных уравнений движения материальных тел необходимо наделять его определенными динамическими свойствами.

Ранее нами получены дифференциальные уравнения движения небесных тел, основанные на взаимодействии материальных тел с окружающим пространством, которые имеют следующий вид [11–15]:

$$\begin{cases} \frac{d^2 X}{dt^2} = \sum_i \left( \frac{X_i - X}{\Delta_i} \right) \frac{3a_{0i} r_{0i}^2}{\Delta_i^2 + \Delta_i \sqrt{\Delta_i^3 - r_{0i}^3} + \sqrt{(\Delta_i^3 - r_{0i}^3)^2}}, \\ \frac{d^2 Y}{dt^2} = \sum_i \left( \frac{Y_i - Y}{\Delta_i} \right) \frac{3a_{0i} r_{0i}^2}{\Delta_i^2 + \Delta_i \sqrt{\Delta_i^3 - r_{0i}^3} + \sqrt{(\Delta_i^3 - r_{0i}^3)^2}}, \\ \frac{d^2 Z}{dt^2} = \sum_i \left( \frac{Z_i - Z}{\Delta_i} \right) \frac{3a_{0i} r_{0i}^2}{\Delta_i^2 + \Delta_i \sqrt{\Delta_i^3 - r_{0i}^3} + \sqrt{(\Delta_i^3 - r_{0i}^3)^2}}, \end{cases} \quad (2)$$

где  $r_{0i}$  — эффективный радиус  $i$ -того тела;  $a_{0i}$  — соответствующее ускорение для  $i$ -того тела на расстоянии  $r_{0i}$  от центра массы;  $X, Y, Z$  — барицентрические координаты возмущаемого тела;  $X_i, Y_i, Z_i$  — барицентрические координаты возмущающих тел;  $\Delta_i$  — взаимное расстояние между возмущаемым и возмущающим телом.

Дифференциальные уравнения движения в ньютоновой форме имеют следующий вид [1, 2]:

$$\begin{cases} \frac{d^2 X}{dt^2} = \sum_i k^2 m_i \left( \frac{X_i - X}{\Delta_i^3} \right), \\ \frac{d^2 Y}{dt^2} = \sum_i k^2 m_i \left( \frac{Y_i - Y}{\Delta_i^3} \right), \\ \frac{d^2 Z}{dt^2} = \sum_i k^2 m_i \left( \frac{Z_i - Z}{\Delta_i^3} \right), \end{cases} \quad (3)$$

где  $\Delta_i^2 = (X_i - X)^2 + (Y_i - Y)^2 + (Z_i - Z)^2$ ;  $X, Y, Z$  — барицентрические координаты возмущаемого тела;  $m_i, X_i, Y_i, Z_i$  — массы и барицентрические координаты возмущающих тел.

Целью данной работы является оценка точности координат планет, представленных в планетном каталоге DE405, поэтому следует привести математическую модель в форме дифференциальных уравнений, которую автор использовал при создании DE405.

Дифференциальные уравнения движения в барицентрической системе координат с учетом ньютоновых и шварцшильдовских членов и формулы (1) имеют следующий вид [16]:

$$\ddot{r}_i = \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j (r_j - r_i)}{r_{ij}^3} \left\{ 1 - \frac{2(\beta + \gamma)}{c^2} \sum_{k \neq i} \frac{\mu_k}{r_{ik}} - \frac{2\beta - 1}{c^2} \sum_{k \neq j} \frac{\mu_k}{r_{jk}} + \gamma \left( \frac{v_i}{c} \right)^2 + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + (1 + \gamma) \left( \frac{v_j}{c} \right)^2 - \frac{2(1 + \gamma)}{c^2} \dot{r}_i \dot{r}_j - \frac{3}{2c^2} \left[ \frac{(r_i - r_j) \dot{r}_i}{r_{ij}} \right]^2 + \frac{1}{2c^2} (r_j - r_i) \ddot{r}_j \Big\} + \\
 & + \frac{1}{c^2} \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j}{r_{ij}^3} (r_i - r_j) [(2 + 2\gamma) \dot{r}_i - (1 + 2\gamma) \dot{r}_j] (\dot{r}_i - \dot{r}_j) + \\
 & + \frac{3 + 4\gamma}{2c^2} \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j \ddot{r}_j}{r_{ij}} + \sum_{m=1}^n \frac{\mu_m (r_m - r_i)}{r_{im}^3}, \quad (4)
 \end{aligned}$$

где  $r_i, \dot{r}_i, \ddot{r}_i$  — координаты, скорости и ускорения в барицентрической системе координат  $i$ -того тела;  $\mu_j = k^2 m_j$ ;  $k^2$  — гравитационная постоянная;  $m_j$  — масса  $j$ -того тела;  $r_{ij} = |r_j - r_i|$ ;  $\beta$  и  $\gamma$  — релятивистские параметры,  $\beta = \gamma = 1$ ;  $v_i = |\dot{r}_i|$ ;  $c$  — скорость света.

При создании эфемерид Луны помимо гравитационных и релятивистских эффектов учитывалось влияние фигур Земли и Луны в математической модели. Ускорение Луны благодаря учету зональных и тессеральных гармоник в координатной системе  $\xi\eta\zeta$  имеет вид [16]

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \ddot{\xi} \\ \ddot{\eta} \\ \ddot{\zeta} \end{bmatrix} &= -\frac{\mu}{r^2} \left\{ \sum_{n=1}^{n_1} J_n \left( \frac{a}{r} \right)^n \begin{bmatrix} (n+1) P_n(\sin \varphi) \\ 0 \\ -\cos \theta P_n(\sin \varphi) \end{bmatrix} + \right. \\
 & \left. + \sum_{n=1}^{n_2} \left( \frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=1}^n \begin{bmatrix} -(n+1) P_n^m(\sin \varphi) [C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda] \\ m \sec \varphi P_n^m(\sin \varphi) [-C_{nm} \sin m\lambda + S_{nm} \cos m\lambda] \\ \cos \varphi P_n^m(\sin \varphi) [C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda] \end{bmatrix} \right\}, \quad (5)
 \end{aligned}$$

где  $\mu$  — гравитационная постоянная;  $r$  — расстояние между центрами масс двух тел;  $n_1$  и  $n_2$  — максимальные степени зональных и тессеральных гармоник несферичных тел соответственно;  $P_n(\sin \varphi)$  — полином Лежандра степени  $n$ ;  $P_n^m(\sin \varphi)$  — присоединенный полином Лежандра степени  $n$  и порядка  $m$ ;  $J_n$  — зональные гармоники от несферичности тела;  $C_{nm}, S_{nm}$  — коэффициенты тессеральных гармоник;  $\varphi$  — широта притягиваемого тела в фиксированной системе координат  $\xi\eta\zeta$ ;  $\lambda$  — восточная долгота притягиваемого тела. Вклад в инерциальное ускорение от несферичного тела возникает от взаимодействия ее собственной фигуры с внешней точечной массой, представленной в координатной системе  $\xi\eta\zeta$ . Ось  $\xi$  направлена вовне от несферичного тела к точечной массе. Ось  $\eta$  направлена на восток, лежит в селенографической плоскости  $XУ$ , перпендикулярна оси  $\xi$ . Ось  $\zeta$  направлена на север, образуя правую систему координат.

Кроме того, земные приливы оказывают на геоцентрическое ускорение Луны следующее воздействие [16]:

$$\ddot{r}_m = -\frac{3k_2 \mu_m}{r_{lm}^3} \left( 1 + \frac{\mu_m}{\mu_l} \right) \left( \frac{a_l}{r_{lm}} \right)^5 \begin{bmatrix} x + y\delta \\ y - x\delta \\ z \end{bmatrix}, \quad (6)$$

где  $k_2$  — число Лява;  $a_l$  — радиус Земли;  $r_{lm}$  — геоцентрическое расстояние Луны;  $x, y, z$ , — декартовы геоцентрические координаты Луны;  $\mu_m$  — гравитационная постоянная, умноженная на массу Луны;  $\mu_l$  — гравитационная постоянная, умноженная на массу Земли;  $\delta$  — фазовый угол.

В отличие от уравнений (4), дифференциальные уравнения (2) записаны в декартовой системе координат. В них отсутствуют понятия силы и массы, которые, по мнению Пуанкаре, не имеют точного определения [17].

Ранее проведенные исследования показали, что решение дифференциальных уравнений, основанных на взаимодействии движущихся материальных тел с окружающим пространством, обладает преимуществом по сравнению с решениями Ньтоновых и релятивистских уравнений [18]. Использование уравнений в форме Ньютона для численного интегрирования уравнений движения больших планет приводит к накоплению ошибок в координатах внутренних планет. При построении численной теории Луны автором DE405 наряду с уравнением (4) решаются уравнения (5) и (6), что значительно усложняет решение задачи [19].

В отличие от релятивистских уравнений (4), (5) и (6), нами получены координаты всех больших планет, Луны и Солнца на определенные моменты на интервале времени с помощью решения одной системы дифференциальных уравнений (2).

Координаты планет, Луны и Солнца хранятся в каталоге DE405 в форме коэффициентов полиномов Чебышева [20–22]. Для различных планет степени многочленов различны. Максимальная степень многочленов порядка тринадцать обеспечивает необходимую точность для нахождения координат внутренних планет и Луны. Коэффициенты полиномов Чебышева хранятся в каталоге DE405 с шагом тридцать два дня. Многочлены Чебышева обеспечивают гладкое приближение даже при использовании многочленов высоких порядков. Многочлен Чебышева порядка  $n$  (для  $|x| \leq 1$ ) определяется как [21]  $T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x)$ .

Из равенства  $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$  следует, что

$$\cos(n + 1)\varphi = 2 \cos n\varphi \cos \varphi - \cos(n - 1)\varphi. \quad (7)$$

Если  $\varphi = \arccos x$ , то после подстановки в (7) получим следующую рекуррентную формулу:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad \text{при } n \geq 1.$$

Многочлены Чебышева до 13-го порядка имеют следующий вид:

$$T_0(x) = 1;$$

$$T_1(x) = x;$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1;$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x;$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1;$$

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x;$$

$$T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1;$$

$$T_7(x) = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x;$$

$$T_8(x) = 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1;$$

$$T_9(x) = 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x;$$

$$T_{10}(x) = 512x^{10} - 1280x^8 + 1120x^6 - 400x^4 + 50x^2 - 1;$$

$$T_{11}(x) = 1024x^{11} - 2816x^9 + 2816x^7 - 1232x^5 + 220x^3 - 11x;$$

$$T_{12}(x) = 2048x^{12} - 6144x^{10} + 6912x^8 - 3584x^6 + 840x^4 - 72x^2 + 1;$$

$$T_{13}(x) = 4096x^{13} - 13352x^{11} + 16640x^9 - 9984x^7 + 2912x^5 - 364x^3 + 13x.$$

Рассмотрим особенности многочлена Чебышева на отрезке  $[-1, 1]$ . Внутри этого отрезка  $T_n(x)$  обращается в нуль в  $n$  точках:

$$T_n(x) = 0 \quad \text{при } x = \cos(\pi(k + 1/2)/n),$$

где  $k = 0, 1, \dots, n - 1$ .

При  $|x| \leq 1$  значение  $|T_n(x)|$  не может превышать 1.

Чтобы аппроксимировать произвольную функцию  $f(x)$  в интервале  $[a, b]$ , заменим независимую переменную  $x$  нормированной переменной  $\hat{x}$  в интервале  $[-1, 1]$  соотношением

$$\hat{x} = \frac{2x - (a + b)}{b - a} \quad \text{при } x \in [a, b] \rightarrow \hat{x} \in [-1, 1]$$

и

$$x = \hat{x} \cdot \frac{1}{2}(b - a) + \frac{1}{2}(a + b) \quad \text{при } \hat{x} \in [-1, 1] \rightarrow x \in [a, b].$$

Функция  $f(x)$  теперь может быть представлена многочленами Чебышева вплоть до  $n$ -го порядка в виде

$$f(x) = \sum_{j=0}^n c_j T_j(\hat{x}).$$

Коэффициенты  $c_j$  вычисляются следующим образом:

$$c_j = \frac{2}{n + 1} \sum_{k=0}^n f(x_k^{n+1}) T_j(\hat{x}_k^{n+1}),$$

где  $\hat{x}_k^{n+1}$  представляет  $k$ -тый корень  $T_{n+1}$ .

Коэффициенты многочленов Чебышева в каталоге DE405 для каждого 32-дневного интервала приведены на начало интервала, что соответствует значению  $\hat{x} = -1$  для интервала  $[-1, 1]$ . В точке  $\hat{x} = -1$  многочлены Чебышева примут следующие значения:  $1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{i+1}$ , где  $i = 0, 1, 2, 3, \dots$

Значения координат планет Луны и Солнца в точке  $\hat{x} = -1$  вычисляются с помощью следующего соотношения:

$$f(x) = \sum_{j=0}^n (-1)^j c_j.$$

Для нахождения скоростей планет Луны и Солнца в точке  $\hat{x} = -1$  берутся производные от многочленов Чебышева, затем вычисляются коэффициенты путем подстановки  $\hat{x} = -1$  в полученные многочлены. Сумма произведений полученных коэффициентов на производные от многочленов, умноженных для каждого объекта на постоянный множитель, определяет скорость исследуемых объектов. Постоянные коэффициенты в точке  $\hat{x} = -1$  имеют следующие значения:  $U_0 = 0, U_1 = 1, U_2 = -4, U_3 = 9, U_4 = -16, U_5 = 25, U_6 = -36, U_7 = 49, U_8 = -64, U_9 = 81, U_{10} = -100, U_{11} = 121, U_{12} = -144, U_{13} = 169$ .

Компоненты скоростей планет, Луны и Солнца находятся из соотношений

$$M(x) = G_i \sum_{j=0}^n c_j U_j(x),$$

где  $G_i$  для каждой планеты имеет постоянное значение. Для Меркурия, Венеры, барицентра Земли + Луны, Марса, Юпитера, Сатурна, Урана, Нептуна, Плутона значения  $G_i$  взяты из [23].

Для сравнения координат и элементов орбит планет, вычисленных путем решения уравнений (2) и с помощью каталога DE405, весь интервал с 9 декабря 1599 г. (JD 2305424.5) по 31 декабря 2199 г. (JD 2524592.5) был разбит на шесть подынтервалов с шагом приблизительно 100 лет, в начале каждого из которых производилось сравнение.

По начальным данным гелиоцентрических координат планет были вычислены элементы их орбит, которые представлены в табл. 1.

В табл. 2–5 представлены элементы орбит Меркурия, Венеры, Земли + Луны и Марса на различные моменты времени, полученные с использованием DE405, численного интегрирования дифференциальных уравнений (2) и путем решения уравнений движения в Ньютоновой форме (3). Элементы орбит в табл. 2–5 размещены в следующем порядке: в первых строках табл. 2–5 представлены элементы орбит Меркурия–Марса, найденные с помощью каталога DE405, во вторых строках — элементы орбит, полученные на основании решения уравнений (2), и в третьих строках — найденные с помощью решения уравнений в Ньютоновой форме (3).

В табл. 6–9 представлены разности элементов орбит Меркурия, Венеры, Земли + Луны и Марса, полученные с помощью решения уравнений (2), (3) и DE405.

Меркурий является ближайшей к Солнцу планетой. Солнце оказывает на его движение более существенное влияние по сравнению с другими большими планетами. В середине прошлого столетия французский математик и астроном Леверье доказал, что с помощью решения уравнений движения в Ньютоновой форме невозможно построить теорию движения Меркурия, согласованную с наблюдениями [24]. Создание общей теории относительности и разработанные на ее основе дифференциальные уравнения движения небесных тел позволили согласовать движение Меркурия с наблюдениями. Использование гармонической системы координат полностью обосновало невязки между наблюдениями и результатами Ньютоновой гравитационной теорией.

Как видно из табл. 6, сопоставление элементов орбит Меркурия на интервале времен с 1600 по 2200 гг., полученных с использованием решений уравнений (2) и DE405, указывает на практическое их совпадение. Максимальное расхождение имеет место в средней аномалии, что составляет  $-0.0002^\circ$  (градуса). Данное различие составляет  $0.72''$ , в то время как аргументы перигелиев различаются на  $0.36''$ . Учитывая, что данное расхождение в элементах орбит Меркурия произошло через 350 лет от начального момента интегрирования, полученные результаты можно считать вполне удовлетворительными. По данным табл. 2 найдено вековое смещение перигелия Меркурия, равное  $43.08''$ .

Орбита Венеры расположена дальше орбиты Меркурия, поэтому она подвержена значительно меньшему воздействию Солнца и является объектом

Таблица 1  
 Элементы орбит больших планет на дату 27 июня 1969 г. (юлианская дата 2440400.5)  
 [Orbital elements of the major planets as of June 27, 1969 (JD 2440400.5)]

Planets	$M$ (in deg.)	$a$ (in au)	$e$	$\omega$ (in deg.)	$\Omega$ (in deg.)	$i$ (in deg.)
Mercury	287.7773	0.387099	0.205617	29.0367	48.3688	7.0068
Venus	195.5860	0.723330	0.006813	54.6870	76.7621	3.3949
Earth + Moon	173.6153	1.000002	0.016713	107.0781	355.6508	0.0039
Mars	299.3763	1.523648	0.093379	107.0781	49.6476	1.852301
Jupiter	174.2869	5.207621	0.047265	273.7981	100.4002	1.3049
Saturn	302.9131	9.522000	0.054053	340.1900	113.7871	2.4866
Uranus	10.5307	19.280834	0.051387	97.9204	74.0516	0.7733
Neptune	185.6073	30.176592	0.004906	280.7089	131.7369	1.7702
Pluto	331.3768	39.774492	0.253318	112.9821	110.2863	17.1349



Таблица 2

Элементы орбит Меркурия [Elements of the orbits of the Mercury]

Current date	Data sources (calculated by)	$M$ (in deg.)	$a$ (in au)	$e$	$\omega$ (in deg.)	$\Omega$ (in deg.)	$i$ (in deg.)
1599 12 9 JD 2305424.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (3)	160.8368 160.8366 160.8507	0.387099 0.387099 0.387099	0.205541 0.205541 0.205541	27.9902 27.9903 28.0343	48.8311 48.8311 48.8312	7.0287 7.0287 7.0287
1699 12 28 JD 2341968.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (3)	311.1034 311.1033 311.1135	0.387898 0.387898 0.387098	0.205569 0.205569 0.205569	28.2774 28.2774 28.3096	48.7065 48.7065 48.7065	7.0228 7.0228 7.0228
1800 1 17 JD 2378512.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (3)	101.3785 101.3784 101.3849	0.387098 0.387098 0.387098	0.205596 0.205596 0.205596	28.5579 28.5580 28.5782	48.5815 48.5815 48.5815	7.0169 7.0169 7.0169
1899 12 4 JD 2414992.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (3)	349.7370 349.7370 349.7397	0.387098 0.387098 0.387098	0.205625 0.205625 0.205625	28.8405 28.8405 28.8488	48.4567 48.4567 48.4567	7.0110 7.0110 7.0110
1999 12 24 JD 2451536.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (3)	140.0110 140.0110 140.0098	0.387098 0.387098 0.387098	0.205630 0.205629 0.205629	29.1243 29.1243 29.1206	48.4305 48.4305 48.4305	7.0050 7.0050 7.0050
2099 12 11 JD 2488048.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (3)	159.3294 159.3294 159.3245	0.387097 0.387098 0.387098	0.205653 0.205653 0.205652	29.4069 29.4069 29.3913	48.2052 48.2052 48.2052	6.9991 6.9991 6.9991
2199 12 31 JD 2524592.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (3)	309.5923 309.5924 309.5836	0.387098 0.387098 0.387098	0.205667 0.205667 0.205667	29.6962 29.6961 29.6686	48.0794 48.0794 48.0794	6.9930 6.9930 6.9930

Таблица 3

## Элементы орбит Венеры [Elements of the orbits of the Venus]

Current date	Data sources (calculated by)	$M$ (in deg.)	$a$ (in au)	$e$	$\omega$ (in deg.)	$\Omega$ (in deg.)	$i$ (in deg.)
1599 12 9 JD 2305424.5	by the DE405	306.3409	0.723344	0.006972	53.7427	77.7910	3.3976
	by the Eqs. (2)	306.3347	0.723344	0.006972	53.7490	77.7910	3.3976
	by the Eqs. (3)	306.3354	0.723344	0.006972	53.7514	77.7910	3.3976
1699 12 28 JD 2341968.5	by the DE405	174.8557	0.723336	0.006927	53.7582	77.5144	3.3969
	by the Eqs. (2)	174.8510	0.723336	0.006927	53.7630	77.5145	3.3969
	by the Eqs. (3)	174.8516	0.723336	0.006927	53.7646	77.5145	3.3969
1800 1 17 JD 2378512.5	by the DE405	42.8101	0.723325	0.006833	54.3392	77.2331	3.3963
	by the Eqs. (2)	42.8069	0.723325	0.006833	54.3424	77.2331	3.3963
	by the Eqs. (3)	42.8073	0.723325	0.006833	54.3434	77.2331	3.3963
1899 12 4 JD 2414992.5	by the DE405	168.7702	0.723329	0.006802	54.3748	76.9589	3.3956
	by the Eqs. (2)	168.7689	0.723329	0.006802	54.3761	76.9589	3.3956
	by the Eqs. (3)	168.7691	0.723329	0.006802	54.3765	76.9589	3.3956
1999 12 24 JD 2451536.5	by the DE405	36.4937	0.723327	0.006756	55.1887	76.6784	3.3946
	by the Eqs. (2)	36.4941	0.723327	0.006756	55.1884	76.6784	3.3946
	by the Eqs. (3)	36.4941	0.723327	0.006756	55.1881	76.6784	3.3946
2099 12 11 JD 2488048.5	by the DE405	213.8268	0.723329	0.006693	55.1227	76.4005	3.3937
	by the Eqs. (2)	213.8293	0.723329	0.006693	55.1202	76.4005	3.3937
	by the Eqs. (3)	213.8290	0.723329	0.006693	55.1194	76.4005	3.3937
2199 12 31 JD 2524592.5	by the DE405	81.7762	0.723328	0.006703	55.7055	76.1244	3.3928
	by the Eqs. (2)	81.7799	0.723328	0.006703	55.7017	76.1244	3.3928
	by the Eqs. (3)	81.7795	0.723328	0.006703	55.7002	76.1244	3.3928

Таблица 4

Элементы орбит Земли + Луны [Elements of the orbits of the Earth & Moon]

Current date	Data sources (calculated by)	$M$ (in deg.)	$a$ (in au)	$e$	$\omega$ (in deg.)	$\Omega$ (in deg.)	$i$ (in deg.)
1599 12 9 JD 2305424.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (3)	341.0999 341.0969 341.0971	0.999994 0.999994 0.999994	0.016843 0.016843 0.016843	105.9312 105.9354 105.9360	355.7385 355.7376 355.7376	0.0524 0.0524 0.0524
1699 12 28 JD 2341968.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (3)	358.8414 358.8391 358.8393	1.000002 1.000002 1.000002	0.016853 0.016853 0.016853	106.4499 106.4533 106.4537	355.5786 355.5776 355.5777	0.0393 0.0393 0.0393
1800 1 17 JD 2378512.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (3)	16.6266 16.6225 16.6252	1.000021 1.000021 1.000021	0.016815 0.016815 0.016815	107.1480 107.1504 107.1507	355.1933 355.1924 355.1924	0.0260 0.0260 0.0260
1899 12 4 JD 2414992.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (3)	331.4083 331.4078 331.4078	1.000006 1.000006 1.000006	0.016773 0.016773 0.016773	107.7580 107.7595 107.7597	354.8222 354.8212 354.8212	0.0131 0.0131 0.0131
1999 12 24 JD 2451536.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (3)	349.1741 349.1744 349.1744	1.000004 1.000004 1.000004	0.016709 0.016709 0.016709	323.9007 323.8567 323.8561	139.0106 139.0542 139.0548	0.0001 0.0001 0.0001
2099 12 11 JD 2488048.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (3)	335.4455 335.4466 335.4465	1.000001 1.000001 1.000001	0.016665 0.016665 0.016665	288.7857 288.7852 288.7850	174.4148 174.4140 174.4141	0.0131 0.0131 0.0131
2199 12 31 JD 2524592.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (3)	353.1145 353.1164 353.1163	0.999996 0.999996 0.999996	0.016626 0.016626 0.016626	289.2209 289.2197 289.2194	174.4119 174.4109 174.4110	0.0260 0.0260 0.0260

Таблица 5

## Элементы орбит Марса [Elements of the orbits of the Mars]

Current date	Data sources (calculated by)	$M$ (in deg.)	$a$ (in au)	$e$	$\omega$ (in deg.)	$\Omega$ (in deg.)	$i$ (in deg.)
1599 12 9 JD 2305424.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (3)	129.2408 129.2394 129.2394	1.523749 1.523749 1.523749	0.093011 0.093011 0.093011	283.5284 283.5297 283.5298	50.7286 50.7286 50.7286	1.8819 1.8819 1.8819
1699 12 28 JD 2341968.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (3)	198.9886 198.9876 198.9876	1.523632 1.523632 1.523632	0.093113 0.093011 0.093113	284.3246 284.3255 284.3255	50.4397 50.4398 50.4398	1.8739 1.8739 1.8739
1800 1 17 JD 2378512.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (3)	268.8961 268.8955 268.8955	1.523698 1.523698 1.523698	0.093296 0.093296 0.093296	284.9704 284.9709 284.9710	50.1466 50.1466 50.1466	1.8658 1.8658 1.8658
1899 12 4 JD 2414992.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (3)	305.1031 305.1028 305.1028	1.523683 1.523683 1.523683	0.093215 0.093215 0.093215	285.7719 285.7721 285.7722	49.8552 49.8552 49.8552	1.8578 1.8578 1.8578
1999 12 24 JD 2451536.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (3)	14.9027 14.9029 14.9029	1.523666 1.523666 1.523666	0.093307 0.093307 0.093307	286.5371 286.5370 286.5370	49.5619 49.5619 49.5619	1.8499 1.8499 1.8499
2099 12 11 JD 2488048.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (3)	67.9179 67.9185 67.9184	1.523690 1.523690 1.523690	0.093613 0.093612 0.093612	287.2980 287.2975 287.2975	49.2578 49.2578 49.2578	1.8417 1.8417 1.8417
2199 12 31 JD 2524592.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (3)	137.8190 137.8199 137.8189	1.523711 1.523711 1.523711	0.093507 0.093507 0.093507	287.9596 287.9588 287.9587	48.9631 48.9631 48.9631	1.8333 1.8333 1.8333

более легким для исследования движения. Однако, как следует из сравнения элементов орбит, полученных путем численного интегрирования дифференциальных уравнений (2) и с использованием DE405, приведенных в табл. 7, расхождение средних аномалий и аргументов перигелиев значительные. Как известно, величина невязки векового смещения перигелия планеты определяется по разности долгот перигелиев, найденных с помощью решения уравнений движения двумя различными методами. В нашем случае сравниваются долготы перигелиев, найденные на основе решения Ньютоновых уравнений (3) и полученные с помощью каталога DE405. Долгота перигелия определяется как сумма значений аргумента перигелия и долготы восходящего узла. Как видно из табл. 7, смещение долготы перигелия Венеры зависит главным образом от скорости движения аргумента перигелия, поскольку долготы восходящих узлов, найденные вышеуказанными методами, совпадают на всем рассматриваемом интервале интегрирования. Наибольшие различия средних аномалий и аргументов перигелиев наблюдаются вблизи концов интервала интегрирования. Например, 9 декабря 1599 г. значение средней аномалии, найденной с помощью решения уравнений (2) и полученной с использованием DE405, отличается от средней аномалии на  $-0.0062^\circ$ , а аргументы перигелиев — на  $0.0063^\circ$ . На момент 31 декабря 2199 г. расхождение в средней аномалии составляет  $0.0037^\circ$ , в аргументе перигелия  $-0.0038^\circ$ . Как видно из табл. 7, величина расхождения средних аномалий, найденная двумя методами, находится в прямой зависимости от вековых скоростей движения аргументов перигелиев. По разностям аргументов перигелиев, полученных путем решения уравнений (2) и Ньютоновых уравнений (3), а также найденных с помощью каталога DE405, определена невязка векового смещения перигелия Венеры и ее погрешность для DE405. Величина невязки векового смещения для Венеры равна  $8.4''$  с погрешностью  $6.06''$ .

Как видно из табл. 4, барицентр Земли + Луны имеет малый угол наклона к эклиптике, поэтому изменения аргумента перигелия и долготы восходящего узла в процессе движения более значительны по сравнению с Венерой. В 1999 году наклонение орбиты барицентра Земли + Луны находилось вблизи нуля, принимая в некоторые моменты времени отрицательные значения. В этом случае нисходящий и восходящий узлы меняются местами, что наглядно представлено в табл. 4. Несмотря на значительные различия аргументов перигелиев и долгот восходящих узлов — на  $-0.0440^\circ$  и  $0.0436^\circ$  (см. табл. 4), средние аномалии отличаются незначительно: на  $-0.0003^\circ$ . На концах интервала интегрирования 9 декабря 1599 г. различие средних аномалий составляет  $-0.0030^\circ$ , а в аргументе перигелия и долготе восходящего узла  $0.0042^\circ$  и  $-0.0009^\circ$ . По данным табл. 8 найдена невязка векового смещения перигелия барицентра Земли + Луны и ее погрешность:  $4.32''$  — невязка,  $3.83''$  — погрешность.

Расхождение средних аномалий и аргументов перигелиев у Марса менее значительное по сравнению с Венерой и Землей (см. табл. 9). Максимальное различие средних аномалий и аргументов перигелиев, полученных путем решения уравнений (2) и с использованием DE405, имеет место 9 декабря 1599 г. и составляет  $-0.0014^\circ$  и  $0.0013^\circ$  соответственно. Решением Ньютоновых уравнений с использованием DE405 найдены вековое смещение перигелия Марса и его погрешность:  $1.14''$  — смещение,  $1.01''$  — погрешность.

Таблица 6  
Разности элементов орбит Меркурия, полученные с помощью DE405 и решения уравнений (2) и (3) [Differences in the elements of the orbits of the Mercury, obtained using the DE405 and solving the Eqs. (2) and the Eqs. (3)]

Current date	Differences (between the results obtained by)	$\Delta M$ (in deg.)	$\Delta a$ (in au)	$\Delta e$	$\Delta \omega$ (in deg.)	$\Delta \Omega$ (in deg.)	$\Delta i$ (in deg.)
1599 12 9 JD 2305424.5	by the Eqs. (2) and the DE405 by the Eqs. (3) and the DE405	-0.0002 0.0139	0 0	0 0	-0.0001 0.0441	0 0.0001	0 0
2199 12 31 JD 2524592.5	by the Eqs. (2) and the DE405 by the Eqs. (3) and the DE405	0.0001 -0.0087	0 0	0 0	0.0001 -0.0276	0 0	0 0

Таблица 7  
Разности элементов орбит Венеры, полученные с помощью DE405 и решения уравнений (2) и (3) [Differences in the elements of the orbits of the Venus, obtained using the DE405 and solving the Eqs. (2) and the Eqs. (3)]

Current date	Differences (between the results obtained by)	$\Delta M$ (in deg.)	$\Delta a$ (in au)	$\Delta e$	$\Delta \omega$ (in deg.)	$\Delta \Omega$ (in deg.)	$\Delta i$ (in deg.)
1599 12 9 JD 2305424.5	by the Eqs. (2) and the DE405 by the Eqs. (3) and the DE405	-0.0062 -0.0055	0 0	0 0	0.0063 0.0087	0 0	0 0
2199 12 31 JD 2524592.5	by the Eqs. (2) and the DE405 by the Eqs. (3) and the DE405	0.0037 0.0033	0 0	0 0	-0.0038 -0.0053	0 0	0 0

Таблица 8  
Разности элементов орбит Земли + Луны, полученные с помощью DE405 и решения уравнений (2) и (3) [Differences in the elements of the orbits of the Earth & Moon, obtained using the DE405 and solving the Eqs. (2) and the Eqs. (3)]

Current date	Differences (between the results obtained by)	$\Delta M$ (in deg.)	$\Delta a$ (in au)	$\Delta e$	$\Delta \omega$ (in deg.)	$\Delta \Omega$ (in deg.)	$\Delta i$ (in deg.)
1599 12 9 JD 2305424.5	by the Eqs. (2) and the DE405 by the Eqs. (3) and the DE405	-0.0030 -0.0028	0 0	0 0	0.0042 0.0048	-0.0009 -0.0009	0 0
2199 12 31 JD 2524592.5	by the Eqs. (2) and the DE405 by the Eqs. (3) and the DE405	0.0019 -0.0004	0 0	0 0	-0.0012 -0.0015	-0.0010 -0.0009	0 0

В табл. 10–14 приведены сравнения элементов орбит Юпитера, Сатурна, Урана, Нептуна и Плутона, полученные с использованием DE405 и численного интегрирования дифференциальных уравнений (2) и Ньютоновых уравнений движения (3).

На основании сопоставления элементов орбит можно заключить, что в пределах рассматриваемой точности различий в элементах орбит Юпитера, Сатурна, Урана, Нептуна и Плутона, полученных с использованием DE405 и численного интегрирования дифференциальных уравнений (2), не обнаружено. При сравнении элементов орбит полагалось следующее допущение: элементы орбит имеют одинаковую точность, если угловые элементы совпадают с точностью до секунды, а большие полуоси и эксцентриситеты — до шести значащих цифр.

В релятивистских уравнениях результаты вычислений существенным образом зависят от выбранной системы координат. Для уравнений (4) выбрана гармоническая система координат, которая оказалась наиболее подходящей для исследования движения Меркурия. Решение уравнений (4) позволило полностью согласовать величину векового движения перигелия Меркурия с наблюдениями.

Возникает вопрос: для всех ли больших планет при исследовании их движений использование гармонической системы координат является оправданным? Ответ на данный вопрос можно получить либо путем сравнения вычисленных положений планет с наблюдениями, либо путем сравнения координат планет, найденных с помощью решения более эффективным методом. В силу того, что величины вековых смещений перигелиев у Венеры, Земли и Марса малы, а их орбиты близки к круговым, решить данный вопрос путем сравнения с наблюдениями затруднительно. Кроме того, отсутствие на всем исследуемом интервале времени высокоточных наблюдений также препятствует решению данного вопроса.

Проверка эффективности применения уравнений (2) и (4) нами проводилась на примере исследования движения Луны с помощью решения этих уравнений. При исследовании движения Луны в DE405 наряду с решением уравнений (4) проводилось интегрирование уравнений (5) и (6). Полученные решения координат Луны согласованы как с оптическими, так и с радиолокационными наблюдениями.

В табл. 15 представлены геоцентрические координаты и компоненты скорости Луны, полученные с использованием DE405 и путем решения уравнений (2) и (4).

Как видно из табл. 15, максимальные расхождения координат, полученных путем решения уравнений (2) и (4), с данными, полученными с использованием DE405, достигаются на концах интервала интегрирования. При этом расхождения координат и компонент скоростей, найденные путем решения уравнений (2) и с использованием DE405, почти на порядок меньше по сравнению с расхождениями решений уравнений (4) и данными с использованием DE405.

При сравнении координат Луны, вычисленных с помощью решения уравнений (2) и (4), можно оценить лишь относительные погрешности решений. Сравнение геоцентрических расстояний Луны различными методами позволяет оценить абсолютные погрешности решений данными методами.

Таблица 9  
 Разности элементов орбит Марса, полученные с помощью DE405 и решения уравнений (2) и (3) [Differences in the elements of the orbits of the Mars, obtained using the DE405 and solving the Eqs. (2) and the Eqs. (3)]

Current date	Differences (between the results obtained by)	$\Delta M$ (in deg.)	$\Delta a$ (in au)	$\Delta e$	$\Delta \omega$ (in deg.)	$\Delta \Omega$ (in deg.)	$\Delta i$ (in deg.)
1599 12 9 JD 2305424.5	by the Eqs. (2) and the DE405 by the Eqs. (3) and the DE405	-0.0014 -0.0014	0 0	0 0	0.0013 0.0014	0 0	0 0
2199 12 31 JD 2524592.5	by the Eqs. (2) and the DE405 by the Eqs. (3) and the DE405	0.0009 0.0009	0 0	0 0	-0.0008 -0.0009	0 0	0 0

Таблица 10  
 Элементы орбит Юпитера [Elements of the orbits of the Jupiter]

Current date	Data sources (calculated by)	$M$ (in deg.)	$a$ (in au)	$e$	$\omega$ (in deg.)	$\Omega$ (in deg.)	$i$ (in deg.)
1599 12 9 JD 2305424.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (3)	119.7747 119.7746 119.7746	5.206547 5.206547 5.206547	0.047515 0.047515 0.047515	273.6536 273.6536 273.6536	99.7415 99.7415 99.7415	1.3112 1.3112 1.3112
2199 12 31 JD 2524592.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (3)	330.1812 330.1812 330.1812	5.208676 5.208676 5.208676	0.049767 0.049767 0.049767	272.6198 272.6198 272.6198	100.8539 100.8539 100.8539	1.2993 1.2993 1.2993



Таблица 11

Элементы орбит Сатурна [Elements of the orbits of the Saturn]

Current date	Data sources (calculated by)	$M$ (in deg.)	$a$ (in au)	$e$	$\omega$ (in deg.)	$\Omega$ (in deg.)	$i$ (in deg.)
1599 12 9 JD 2305424.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (3)	105.4116 105.4116 105.4116	9.574720 9.574720 9.574720	0.057706 0.057706 0.057706	340.3124 340.3124 340.3124	114.6839 114.6839 114.6839	2.4793 2.4793 2.4793
2199 12 31 JD 2524592.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (3)	245.9046 245.9046 245.9046	9.588370 9.588370 9.588370	0.053906 0.053906 0.053906	335.9770 335.9770 335.9770	113.1024 113.1024 113.1024	2.4927 2.4927 2.4927

Таблица 12

Элементы орбит Урана [Elements of the orbits of the Uranus]

Current date	Data sources (calculated by)	$M$ (in deg.)	$a$ (in au)	$e$	$\omega$ (in deg.)	$\Omega$ (in deg.)	$i$ (in deg.)
1599 12 9 JD 2305424.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (3)	230.5747 230.5747 230.5747	19.185204 19.185204 19.185204	0.047213 0.047213 0.047213	95.1233 95.1233 95.1233	73.6074 73.6074 73.6074	0.7814 0.7814 0.7814
2199 12 31 JD 2524592.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (3)	279.3215 279.3215 279.3215	19.183852 19.183851 19.183851	0.045924 0.045924 0.045924	96.7465 96.7465 96.7465	74.0277 74.0277 74.0277	0.7679 0.7679 0.7679

Таблица 13

## Элементы орбит Нептуна [Elements of the Neptune]

Current date	Data sources (calculated by)	$M$ (in deg.)	$a$ (in au)	$e$	$\omega$ (in deg.)	$\Omega$ (in deg.)	$i$ (in deg.)
1599 12 9 JD 2305424.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (3)	61.7486 61.7487 61.7487	30.270547 30.270547 30.270547	0.009574 0.009574 0.009574	317.2798 317.2798 317.2798	131.7883 131.7883 131.7883	1.7671 1.7671 1.7671
2199 12 31 JD 2524592.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (3)	353.1376 353.1376 353.1376	30.264791 30.264791 30.264791	0.014321 0.014321 0.014321	256.6947 256.6947 256.6947	131.7178 131.7178 131.7178	1.7702 1.7702 1.7702

Таблица 14

## Элементы орбит Плутона [Elements of the Pluto]

Current date	Data sources (calculated by)	$M$ (in deg.)	$a$ (in au)	$e$	$\omega$ (in deg.)	$\Omega$ (in deg.)	$i$ (in deg.)
1599 12 9 JD 2305424.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (3)	154.6398 154.6399 154.6399	39.397879 39.397879 39.397880	0.249562 0.249562 0.249562	113.0311 113.0311 113.0311	110.5004 110.5004 110.5004	17.1365 17.1365 17.1365
2199 12 31 JD 2524592.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (3)	304.1102 304.1102 304.1102	39.257516 39.257516 39.257516	0.247022 0.247022 0.247022	114.7477 114.7477 114.7477	110.3397 110.3397 110.3397	17.1680 17.1680 17.1680

Таблица 15

Геоцентрические координаты и компоненты скоростей Луны, полученные по DE405 и путем решения уравнений (2) и (4) [Geocentric coordinates and velocity components of the Moon calculated by the DE405, the Eqs. (2) and the Eqs. (4)]

Current date	Data sources (calculated by)	X (in au)	Y (in au)	Z (in au)	$V_x$ (in au/day)	$V_y$ (in au/day)	$V_z$ (in au/day)
1599 12 9 JD 2305424.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (4)	-0.002596600 -0.002596680 -0.002600840	0.000681096 0.000681446 0.000667855	0.000131635 0.000129649 0.000122528	-0.000155519 -0.000155389 -0.000152079	-0.000477071 -0.000477231 -0.000478121	-0.000251468 -0.000251209 -0.000251385
1699 12 28 JD 2341968.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (4)	0.002643269 0.002643220 0.002644275	-0.000298812 -0.000298181 -0.000287487	-0.000140145 -0.000141896 -0.000138329	0.0000430142 0.0000430006 0.0000405114	0.000536555 0.000536541 0.000536757	0.000178574 0.000178638 0.000178749
1800 1 17 JD 2378512.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (4)	-0.002440199 -0.00244029 -0.00243880	-0.000525672 -0.000524984 -0.000530840	-0.000134793 -0.000135636 -0.000138776	0.000142850 0.000142793 0.000144268	-0.000517844 -0.000517814 -0.000517424	-0.000278656 -0.000278747 -0.000278636
1899 12 4 JD 2414992.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (4)	-0.000198405 -0.000198560 -0.000195631	-0.002288453 -0.002288571 -0.002288897	-0.000976145 -0.000975855 -0.000975701	0.000607334 0.000607335 0.000607362	-0.000047648 -0.000047659 -0.000047016	-0.000040291 -0.000040248 -0.000040320
1999 12 24 JD 2451536.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (4)	-0.000808901 -0.000808941 -0.000807684	0.002094014 0.002093992 0.002094421	0.000849050 0.000848989 0.000849049	-0.000600679 -0.000600683 -0.000600792	-0.000198425 -0.000198425 -0.000198136	-0.000025796 -0.000025845 -0.000025728
2099 12 11 JD 2488048.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (4)	-0.001038446 -0.001037717 -0.001042765	-0.001965349 -0.001965712 -0.001963643	-0.001077336 -0.001077272 -0.001076232	0.000551769 0.000551867 0.000551261	-0.000245541 -0.000245301 -0.000246343	-0.000124050 -0.000124145 -0.000124718
2199 12 31 JD 2524592.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (4)	0.000388652 0.000386760 0.000396300	0.002506014 0.002505890 0.002504366	0.000898766 0.000899905 0.000899895	-0.000557717 -0.000557775 -0.000557422	0.000099983 0.000099700 0.000101601	0.000004597 0.000004257 0.000004940

Таблица 16  
 Геоцентрические расстояния Луны, полученные по DE405 и путем решения уравнений (2) и (4)  
 [Geocentric distance of the Moon calculated by the DE405 and by solving the Eqs. (2) and the Eqs. (4)]

Current date	Data sources (calculated by)	X (in au)	Y (in au)	Z (in au)	$\rho$ (in au)	$ \Delta\rho $ (in km)
1599 12 9 JD 2305424.5	by the DE405	-0.002596600	0.000681096	0.000131635	0.002687666	
	by the Eqs. (2)	-0.002596680	0.000681446	0.000129649	0.002687736	10.47
	by the Eqs. (4)	-0.002600840	0.000667855	0.000122528	0.002688013	51.91
1699 12 28 JD 2341968.5	by the DE405	0.002643269	-0.000298812	-0.000140145	0.002663794	
	by the Eqs. (2)	0.002643220	-0.000298181	-0.000141896	0.002663768	3.89
	by the Eqs. (4)	0.002644275	-0.000287487	-0.000138329	0.002663447	51.91
1800 1 17 JD 2378512.5	by the DE405	-0.002440199	-0.000525672	-0.000134793	0.002499815	
	by the Eqs. (2)	-0.00244029	-0.000524984	-0.000135636	0.002499804	1.64
	by the Eqs. (4)	-0.00243880	-0.000530840	-0.000138776	0.002499760	8.23
1899 12 4 JD 2414992.5	by the DE405	-0.000198405	-0.002288453	-0.000976145	0.002495845	
	by the Eqs. (2)	-0.000198560	-0.002288571	-0.000975855	0.002495852	1.04
	by the Eqs. (4)	-0.000195631	-0.002288897	-0.000975701	0.002495886	6.13
1999 12 24 JD 2451536.5	by the DE405	-0.000808901	0.002094014	0.000849050	0.002400021	
	by the Eqs. (2)	-0.000808941	0.002093992	0.000848989	0.002399999	3.29
	by the Eqs. (4)	-0.000807684	0.002094421	0.000849049	0.002399965	8.38
2099 12 11 JD 2488048.5	by the DE405	-0.001038446	-0.001965349	-0.001077336	0.002470146	
	by the Eqs. (2)	-0.001037717	-0.001965712	-0.001077272	0.002470100	6.88
	by the Eqs. (4)	-0.001042765	-0.001963643	-0.001076232	0.002470125	3.77
2199 12 31 JD 2524592.5	by the DE405	0.000388652	0.002506014	0.000898766	0.002690527	
	by the Eqs. (2)	0.000386760	0.002505890	0.000899905	0.002690519	1.20
	by the Eqs. (4)	0.000396300	0.002504366	0.000899895	0.002690486	6.13

В табл. 16 представлены разности геоцентрических расстояний Луны в километрах, полученные с помощью решений уравнений (2), (4) и DE405.

В первой строке табл. 16 представлены координаты и геоцентрическое расстояние Луны, найденное с помощью DE405, во второй и третьей строках — полученные с помощью решения уравнений (2) и (4). В последней колонке табл. 16 дается разность между геоцентрическими расстояниями Луны, найденными путем решения уравнений (2) и (4) и определенными с помощью планетного каталога DE405. Полагая, что координаты Луны, найденные с помощью DE405, более точные по сравнению с координатами, полученными с помощью решения уравнений (2) и (4), оценим разности геоцентрических расстояний между точным и приближенным решением. Тот метод, у которого данная разность меньше, будем считать более точным. Данное условие является необходимым, но не достаточным для оценки точности метода. Из сопоставления разностей геоцентрических расстояний Луны, найденных различными методами, следует, что максимальные расхождения разностей, полученных с помощью решения уравнений (2) и DE405, изменяются в пределах от 1.20 до 10.47 км, в то время как разности, найденные с помощью решения уравнений (4), изменяются в пределах от 3.77 до 51.91 км.

Как видно из табл. 16, решения, полученные с помощью уравнений (2), являются более точными в шести случаях из семи по сравнению с решениями уравнений (4). Следовательно, элементы орбит планет, найденные по координатам и скоростям, полученным путем решения уравнений (2), более точные по сравнению с элементами орбит, полученных на основании решения уравнений (4). Поскольку при создании DE405 движение больших планет рассчитывалось с помощью решения уравнений (4), путем сравнения элементов орбит планет, найденных с использованием решений уравнений (2) и (4), можно оценить точность полученных решений, представленных в каталоге DE405 в форме коэффициентов многочленов Чебышева.

На основании сравнения элементов орбит Венеры, барицентра Земли + Луны и Марса, полученных с помощью решения уравнений (2) и (4), найденные избыточные смещения вековых долгот перигелиев с использованием каталога DE405 составляют:  $6.06''$ ,  $3.83''$  и  $1.01''$ .

В заключение отметим основные результаты проведенных исследований:

- 1) использование гармонической системы координат в релятивистских уравнениях движения оправдано для Меркурия и для внешних планет: Юпитера, Сатурна, Урана, Нептуна и карликовой планеты Плутон;
- 2) показано, что использование релятивистских уравнений при создании DE405 для исследования движения планет Венеры, барицентра Земли + Луны и Марса, приводит к избыточному вековому смещению долгот перигелиев этих планет;
- 3) величины погрешностей координат и компонент скоростей Венеры, барицентра Земли + Луны и Марса, найденных с использованием DE405, находятся в прямой зависимости от погрешностей величин вековых смещений долгот перигелиев этих планет;
- 4) решение, полученное с помощью Ньютоновых уравнений для планет Венеры, барицентра Земли + Луны и Марса, не уступает по точности решению, найденному путем решения уравнений (4).

**Конкурирующие интересы.** Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

**Авторский вклад и ответственность.** Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

**Финансирование.** Исследование выполнялось без финансирования.

### Библиографический список

1. Максвелл Дж. К. *Избранные сочинения по теории электромагнитного поля* / Классики естествознания. Т. 104. М.: Гостехиздат, 1952. 687 с.
2. Чеботарев Г. А. *Аналитические и численные методы небесной механики*. М., Л.: Наука, 1965. 368 с.; Chebotarev G. A. *Analytical and Numerical Methods of Celestial Mechanics* / Modern Analytic and Computational Methods in Science and Mathematics. vol. 9. New York: American Elsevier Publishing Co., Inc., 1967. xviii+331 pp.
3. Субботин М. Ф. *Введение в теоретическую астрономию*. М.: Наука, 1968. 800 с.
4. Богородский А. Ф. *Всемирное тяготение*. Киев: Наук. думка, 1971. 352 с.
5. Брумберг В. А. *Релятивистская небесная механика*. М.: Наука, 1972. 384 с.
6. Визгин В. П. Об открытии уравнений гравитационного поля Эйнштейном и Гильбертом (новые материалы) // *УФН*, 2001. Т. 171, № 12. С. 1347–1363. EDN: MPJJEZ. DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.0171.200112d.1347>.
7. Дирак П. *Принципы квантовой механики*. М.: Наука, 1979. 440 с.
8. Фейнман Р. Развитие пространственно-временной трактовки квантовой электродинамики // *УФН*, 1967. Т. 91, № 1. С. 29–48. DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.0091.196701c.0029>.
9. Casimir H. B. G., Polder D. The influence of retardation on the London-van der Waals forces // *Phys. Rev.*, 1948. vol. 73, no. 4. pp. 360–372. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.73.360>.
10. Зельдович Я. Б. Теория вакуума, быть может, решает загадку космологии // *УФН*, 1981. Т. 133, № 3. С. 479–503. DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.0133.198103c.0479>.
11. Заусаев А. Ф. Теория движения  $n$  материальных тел, основанная на новом принципе взаимодействия // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2006. № 43. С. 132–139. EDN: HUYDOB. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu463>. [Zausaev A. F. Theory of motion of  $n$  material bodies, based on a new interaction principle / Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2006. pp. 132–139].
12. Заусаев А. Ф., Заусаев А. А. *Математическое моделирование орбитальной эволюции малых тел Солнечной системы*. М.: Машиностроение-1, 2008. 250 с. EDN: QJUWVV.
13. Заусаев А. Ф. Исследование движения планет, Луны и Солнца, основанное на новом принципе взаимодействия // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2014. № 3(36). С. 118–131. EDN: TLEURX. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1304>.
14. Заусаев А. Ф. Сопоставление координат больших планет, Луны и Солнца, полученных на основе нового принципа взаимодействия и банка данных DE405 // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2016. Т. 20, № 1. С. 121–148. EDN: WQPYBB. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1458>.
15. Заусаев А. Ф., Романюк М. А. *Численные методы в задачах математического моделирования движения небесных тел в Солнечной системе*. Самара: СамГТУ, 2017. 265 с.
16. Newhall X. X., Standish E. M., Williams J. G. DE 102: A numerically integrated ephemeris of the Moon and planets spanning forty-four centuries // *Astron. Astrophys.*, 1983. vol. 125, no. 1. pp. 150–167.

17. Пуанкаре А. *О науке*. М.: Наука, 1983. 560 с.
18. Заусаев А. Ф., Романюк М. А. Сравнение различных математических моделей на примере решения уравнений движения больших планет и Луны // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2019. Т. 23, № 1. С. 152–185. EDN: BGRYUJ. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1663>.
19. Standish E. M. *JPL Planetary and Lunar Ephemerides*: DE405/LE405. Interoffice memorandum: JPL IOM 312. F-98-048, 1998, August 26. 18 pp. <ftp://ssd.jpl.nasa.gov/pub/eph/planets/ioms/de405.iom.pdf>.
20. Грибкова В. П. *Эффективные методы равномерных приближений, основанные на полиномах Чебышева*. М.: Спутник, 2017. 194 с.
21. Montenbruck O., Pfleger T. *Astronomy on the Personal Computer*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2000. xv+300 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-03436-7>.
22. Хемминг Р. В. *Численные методы для научных работников и инженеров*. М.: Наука, 1972. 400 с.
23. Park R. S. *JPL Planetary and Lunar Ephemerides*, 2020. [https://ssd.jpl.nasa.gov/planets/eph\\_export.html](https://ssd.jpl.nasa.gov/planets/eph_export.html).
24. Le Verrier U. J. *Theorie du mouvement de Mercure* / *Annales de l'Observatoire imperial de Paris*. vol. 5: *Annales de l'Observatoire de Paris. Memoires*. Paris: Mallet-Bachelier, 1859. 195 pp.

MSC: 70F15, 70M20, 65L05

## Comparison of the orbital elements of major planets, the Moon and the Sun using various mathematical models on the time interval with 1600 to 2200

*A. F. Zausaev, M. A. Romanyuk*

Samara State Technical University,

244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.


### Abstract

An analysis of the accuracy of the orbital elements obtained according to the coordinates and components of the velocities, found using the coefficients of the Chebyshev polynomials of the DE405 planetary catalog, is carried out. We compared the elements of orbital elements in the time interval from 1600 to 2200 years found using the DE405 catalog and obtained by numerical integration of the equations of motion based on the interaction of moving material bodies with the surrounding space. On the example of the numerical integration of the Moon motion equations, the advantage of using the equations of motion based on the interaction of moving material bodies with the surrounding space is shown in comparison with relativistic equations. Based on a comparison of the elements of Mercury's orbits, found by coordinates obtained by solving equations based on the interaction of moving material bodies with the surrounding space, and obtained using the DE405 catalog, it is shown that the orbital elements practically coincide on a given interval time. The maximum discrepancy in the mean anomaly at the end of the integration interval is less than  $1''$  (second). The discrepancies of the secular displacements of perihelions for Mercury, Venus, Earth + Moon and Mars were determined, the values of which for DE405 are respectively:  $43.08''$ ,  $8.4''$ ,  $3.83''$  and  $1.14''$ . It is shown that the errors of the secular displacements of the perihelions of the planets Mercury, Venus, the barycenter of the Earth + Moon and Mars obtained using the DE405 catalog take the following values:  $0''$ ,  $6.06''$ ,  $3.83''$  and  $1.08''$ . For the outer

### Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes Research Article

© Authors, 2022

© Samara State Technical University, 2022 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

#### Please cite this article in press as:

Zausaev A. F., Romanyuk M. A. Comparison of the orbital elements of major planets, the Moon and the Sun using various mathematical models on the time interval with 1600 to 2200, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 4, pp. 738–763. EDN: DVJGRH. DOI: [10.14498/vsgtu1888](https://doi.org/10.14498/vsgtu1888) (In Russian).

#### Authors' Details:

*Anatoliy F. Zausaev*  <https://orcid.org/0000-0002-5035-9615>Dr. Phys. & Math. Sci.; Professor; Dept. of Applied Mathematics & Computer Science;  
e-mail: [zausaev\\_af@mail.ru](mailto:zausaev_af@mail.ru)*Mariya A. Romanyuk*  <https://orcid.org/0000-0003-1352-6725>Cand. Tech. Sci.; Associate Professor; Dept. of Applied Mathematics & Computer Science;  
e-mail: [zausmasha@mail.ru](mailto:zausmasha@mail.ru)



planets: Jupiter, Saturn, Uranus, Neptune and the dwarf planet Pluto, on the basis of the considered comparisons of various equations of motion, no discrepancies in the orbital elements were found. Based on the studies carried out, it is shown that the use of harmonic coordinates in relativistic equations when creating the DE405 catalog is justified only for Mercury and the outer planets: Jupiter, Saturn, Uranus, Neptune and the dwarf planet Pluto.

**Keywords:** orbital elements, numerical integration, differential equation of motion.

Received: 19<sup>th</sup> October, 2021 / Revised: 15<sup>th</sup> October, 2022 /

Accepted: 17<sup>th</sup> November, 2022 / First online: 6<sup>th</sup> December, 2022

**Competing interests.** We declare that we have no conflicts of interest with respect to the authorship and publication of this article.

**Authors' contributions and responsibilities.** Each author has participated in the development of the concept of the article and in the writing of the manuscript. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of the manuscript.

**Funding.** The research has not received funding.

## References

1. Maxwell J. C. *Izbrannye sochineniia po teorii elektromagnitnogo polia* [Selected Papers on Electromagnetic Field Theory]. Moscow, Gostekhizdat, 1952, 687 pp. (In Russian)
2. Chebotarev G. A. *Analytical and Numerical Methods of Celestial Mechanics*, Modern Analytic and Computational Methods in Science and Mathematics, vol. 9. New York, American Elsevier Publishing Co., Inc., 1967, xviii+331 pp.
3. Subbotin M. F. *Vvedenie v teoreticheskuiu astronomiiu* [Introduction to Theoretical Astronomy]. Moscow, Nauka, 1968, 800 pp. (In Russian)
4. Bogorodsky A. F. *Vsemirnoe tiagotenie* [Universal Gravitation]. Kiev, Nauk. Dumka, 1971, 352 pp. (In Russian)
5. Brumberg V. A. *Relativistskaia nebesnaia mekhanika* [Relativistic Celestial Mechanics]. Moscow, Nauka, 1972, 384 pp. (In Russian)
6. Vizgin V. P. On the discovery of the gravitational field equations by Einstein and Hilbert: new materials, *Phys. Usp.*, 2001, vol. 44, no. 12, pp. 1283–1298. EDN: LGQDQR. DOI: <https://doi.org/10.1070/PU2001v044n12ABEH001014>.
7. Dirak P. *Printsipy kvantovoi mekhaniki* [The Principles of Quantum Mechanics]. Moscow, Nauka, 1979, 440 pp. (In Russian)
8. Feynman R. P. *The Development of the Space-Time View of Quantum Electrodynamics*, Nobel Lecture, December 11, 1965. Preprint les Prix Nobel en 1965. Stockholm, The Nobel Foundation, 1966.
9. Casimir H. B. G., Polder D. The influence of retardation on the London-van der Waals forces, *Phys. Rev.*, 1948, vol. 73, no. 4, pp. 360–372. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.73.360>.
10. Zel'dovich Ya. B. Vacuum theory: a possible solution to the singularity problem of cosmology, *Sov. Phys. Usp.*, 1981, vol. 24, no. 3, pp. 216–230. DOI: <https://doi.org/10.1070/PU1981v024n03ABEH004772>.
11. Zausaev A. F. Theory of motion of  $n$  material bodies, based on a new interaction principle, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2006, no. 43, pp. 132–139. EDN: HUYDOB. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu463>.

12. Zausaev A. F., Zausaev A. A. *Matematicheskoe modelirovanie orbital'noi evoliutsii malyykh tel Solnechnoi sistemy* [Mathematical Modelling of Orbital Evolution of Small Bodies of the Solar System]. Moscow, Mashinostroenie-1, 2008, 250 pp. (In Russian). EDN: QJUWVV.
13. Zausaev A. F. The investigation of the motion of planets, the Moon, and the Sun based on a new principle of interaction, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2014, no. 3(36), pp. 118–131 (In Russian). EDN: TLEURX. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1304>.
14. Zausaev A. F. Comparison of the coordinates of the major planets, Moon, and Sun obtained based on a new principle of interaction and of the data bank DE405, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2016, vol. 20, no. 1, pp. 121–148. EDN: WQPYBB. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1458>.
15. Zausaev A. F., Romanyuk M. A. *Chislennyye metody v zadachakh matematicheskogo modelirovaniia dvizheniia nebesnykh tel v Solnechnoi sisteme* [Numerical Methods in the Problems of Mathematical Modeling of the Motion of Celestial Bodies in the Solar System]. Samara, Samara State Technical Univ., 2017, 265 pp. (In Russian)
16. Newhall X. X., Standish E. M., Williams J. G. DE 102: A numerically integrated ephemeris of the Moon and planets spanning forty-four centuries, *Astron. Astrophys.*, 1983, vol. 125, no. 1, pp. 150–167.
17. Poincaré J. H. *O nauke* [About Science]. Moscow, Nauka, 1983, 560 pp. (In Russian)
18. Zausaev A. F., Romanyuk M. A. Comparison of various mathematical models on the example of solving the equations of the movement of large planets and the Moon, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 1, pp. 152–185. EDN: BGRYUJ. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1663>.
19. Standish E. M. *JPL Planetary and Lunar Ephemerides*, DE405/LE405. Interoffice memorandum: JPL IOM 312. F-98-048, 1998, August 26, 18 pp. <ftp://ssd.jpl.nasa.gov/pub/eph/planets/ioms/de405.iom.pdf>.
20. Gribkova V. P. *Effektivnyye metody ravnomernykh priblizhenii, osnovannyye na polinomakh Chebysheva* [Efficient Methods of Uniform Approximations Based on Chebyshev Polynomials]. Moscow, Sputnik, 2017, 194 pp. (In Russian)
21. Montenbruck O., Pfleger T. *Astronomy on the Personal Computer*. Berlin, Heidelberg, Springer, 2000, xv+300 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-03436-7>.
22. Khemming R. V. *Chislennyye metody dlia nauchnykh rabotnikov i inzhenerov* [Numerical Methods for Scientists and Engineers]. Moscow, Nauka, 1972, 400 pp. (In Russian)
23. Park R. S. *JPL Planetary and Lunar Ephemerides*, 2020. [https://ssd.jpl.nasa.gov/planets/eph\\_export.html](https://ssd.jpl.nasa.gov/planets/eph_export.html).
24. Le Verrier U. J. *Theorie du mouvement de Mercure*, Annales de l'Observatoire imperial de Paris, vol. 5, Annales de l'Observatoire de Paris. Memoires. Paris, Mallet-Bachelier, 1859, 195 pp.