Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2022. Т. 26, № 2. С. 1–x
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1904
EDN: AAAAAAA

УДК 517.95

Задача с нелокальными условиями для одномерного параболического уравнения

***А. Б. Бейлин*[1], *А. В. Богатов*[2], *Л. С. Пулькина*[2]**

[1] Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

[2] Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева,
Россия, 443086, Самара, Московское ш., 34.

Аннотация

Рассмотрена нелокальная задача с интегральными условиями для параболического уравнения. Доказана ее однозначная разрешимость в пространстве Соболева. Доказательство единственности решения и его существования базируется на выведенных в работе априорных оценках. Отмечена связь заданных нелокальных условий с условиями В. А. Стеклова и интегральными условиями I рода, что дало основание интерпретировать рассматриваемую задачу как задачу с возмущенными нелокальными условиями В. А. Стеклова. Обращено внимание на классы задач, в том числе обратных, для изучения которых полученные в статье результаты могут оказаться полезными.

Ключевые слова: параболическое уравнение, краевая задача, нелокальные условия, обобщенное решение, пространства Соболева.

Получение: 24 января 2022 г. / Исправление: 2 марта 2022 г. /
Принятие: 23 мая 2022 г. / Публикация онлайн: 26 мая 2022 г.

Краткое сообщение

Образец для цитирования
Бейлин А. Б., Богатов А. В, Пулькина Л. С. Задача с нелокальными условиями для одномерного параболического уравнения // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 2. С. 1–x. EDN: AAAAAAA. DOI: 10.14498/vsgtu1904.

Сведения об авторах

Александр Борисович Бейлин https://orcid.org/0000-0002-4042-2860
кандидат технических наук, доцент; доцент каф. технологии машиностроения, станков и инструментов; e-mail: abeilin@mail.ru

Андрей Владимирович Богатов https://orcid.org/0000-0001-5797-1930
аспирант; каф. дифференциальных уравнений и теории управления;
e-mail: andrebogato@mail.ru

Людмила Степановна Пулькина https://orcid.org/0000-0001-7947-6121
доктор физико-математических наук, профессор; профессор каф. дифференциальных уравнений и теории управления; e-mail: louise@samdiff.ru

Задачи с нелокальными условиями для уравнений с частными производными продолжают привлекать внимание исследователей. Интерес к этому классу задач подкреплен необходимостью построения математических моделей, отвечающих потребностям современного естествознания [1]. В статье [2], положившей начало систематическим исследованиям нелокальных задач с интегральными условиями, рассматривалось одномерное уравнение теплопроводности. Вскоре после выхода этой статьи, а также [3], появился ряд работ, в которых в том или ином качестве присутствуют нелокальные интегральные условия: либо вместо граничных [4–9], либо в качестве условий переопределения в обратных задачах [10–13]. Однако задолго до появления всех этих работ была опубликована статья В. А. Стеклова [14], в которой обосновано появление нелокальных граничных условий при исследовании задачи об охлаждении стержня:

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad u(x,0) = \varphi(x),$$

$$a_{i1}u_x(0,t) + a_{i2}u_x(l,t) + b_{i1}u(0,t) + b_{i2}u(l,t) = g_i(t), \quad i = 1,2. \qquad (S)$$

Через много лет после выхода этой статьи, на волне возникшего интереса к нелокальным задачам, обнаружена связь между условиями (S) и интегральными условиями по пространственным переменным [4, 15, 16]. Оказалось, что условия вида

$$\int_0^l K_i(x)u(x,t)dx = E_i(t)$$

при выполнении условий согласования с начальными данными эквивалентны нелокальным условиям В. А. Стеклова (S), возмущенным интегральными слагаемыми [10].

В предлагаемой статье изучается задача с возмущенными условиями (S) в случае $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$. Задачи с нелокальными условиями, в том числе интегральными, продолжают привлекать внимание исследователей. Особо отметим работы [17–20].

В области $Q = (0,l) \times (0,T)$ рассмотрим следующую задачу: *найти решение уравнения*

$$\mathcal{M}u \equiv u_t - (au_x)_x + cu = f(x,t), \qquad (1)$$

удовлетворяющее начальному условию $u(x,0) = \varphi(x)$ *и нелокальным условиям*

$$\begin{aligned} a(0,t)u_x(0,t) + \alpha_1(t)u(0,t) + \beta_1(t)u(l,t) + \int_0^l H_1(x,t)u(x,t)dx = g_1(t),\\ a(l,t)u_x(l,t) + \alpha_2(t)u(0,t) + \beta_2(t)u(l,t) + \int_0^l H_2(x,t)u(x,t)dx = g_2(t). \end{aligned} \qquad (2)$$

Коэффициенты уравнения (1) суть функции переменных x, t, $a(x,t) > 0$ всюду в $\bar{Q}$.

Условия вида (2) возникают при изучении процессов распространения тепла и массопереноса в среде с меняющимися свойствами, например, происходящими между твердым телом и жидкостью. В этом случае следует считать тепловой поток пропорциональным разности температур на границах сред, а коэффициенты α_i, β_i представляют собой коэффициенты пропорциональности [12, 14]. Заметим, что к условиям (2) можно прийти формальным путем, а именно, если даны интегральные условия

$$\int_0^l K_i(x)u(x,t)dx = E_i(t), \quad i = 1,2,$$

которые представляют собой заданную тепловую энергию, то, интегрируя равенство (1), умноженное предварительно на $K_i(x)$, получим условия вида (2) [15]. Мы приведем подробности этой процедуры ниже. Заметим также, что мы рассматриваем в качестве коэффициентов как уравнения (1), так и условий (2), функции соответствующих переменных.

Прежде всего введем понятие решения поставленной задачи. Обозначим

$$W_2^{1,0}(Q) = \{u : u \in L_2(Q), u_x \in L_2(Q)\},$$

$$\hat{W}_2^1(Q) = \{v : v \in W_2^1(Q), v(x,T) = 0\},$$

где $W_2^1(Q)$ — пространство Соболева. Следуя известной процедуре [22], выведем из равенства

$$\int_0^T\int_0^l v\mathcal{M}u\,dxdt = \int_0^T\int_0^l fv\,dxdt,$$

интегрируя по частям, равенство

$$\int_0^T\int_0^l(-uv_t + au_xv_x + cuv)dxdt - \int_0^l \varphi(x)v(x,0)dx -$$
$$- \int_0^T v(0,t)[\alpha_1(t)u(0,t) + \beta_1(t)u(l,t) + \int_0^l H_1(x,t)u(x,t)dx]dt +$$
$$+ \int_0^T v(l,t)[\alpha_2(t)u(0,t) + \beta_2(t)u(l,t) + \int_0^l H_2(x,t)u(x,t)dx]dt$$
$$= \int_0^T\int_0^l f(x,t)v(x,t)dxdt - \int_0^T v(0,t)g_1(t)dt + \int_0^T v(l,t)g_2(t)dt. \quad (3)$$

Определение. Обобщенным решением задачи (1), (2), будем называть функцию $u(x,t)$, принадлежащую $W_2^{1,0}(Q)$ удовлетворяющую интегральному тождеству (3) при всех $v \in \hat{W}_2^1(Q)$.

Теорема. *Пусть выполняются следующие условия*:
a) $a,\ a_t,\ c \in C(\bar{Q}),\ f \in L_2(Q),\ \alpha,\ \beta \in C^1([0,T]),\ H_i \in C(\bar{Q}),\ \varphi \in C([0,l])$;
b) $\alpha_2 + \beta_1 = 0$;
c) $\alpha_1(t)\xi^2 - 2\alpha_2(t)\xi\eta - \beta_2(t)\eta^2 \leqslant 0,\ t \in [0,T]$.
Тогда существует единственное обобщенное решение задачи (1), (2).

Доказательство. Единственность решения докажем, как обычно, от противного. Предположим, что существует два различных решения задачи $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$. Тогда их разность, $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$, удовлетворяет соответствующей однородной задаче, т.е. в силу определения — тождеству

$$\int_0^T\int_0^l (-uv_t + au_xv_x + cuv)dxdt -$$
$$- \int_0^T v(0,t)\Big[\alpha_1(t)u(0,t) + \beta_1(t)u(l,t) + \int_0^l H_1(x,t)u(x,t)dx\Big]dt +$$
$$+ \int_0^T v(l,t)\Big[\alpha_2(t)u(0,t) + \beta_2(t)u(l,t) + \int_0^l H_2(x,t)u(x,t)dx\Big]dt = 0. \quad (4)$$

Положим в (4)

$$v(x,t) = \begin{cases} \int_t^\tau u(x,\eta)d\eta, & 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ 0, & \tau \leqslant t \leqslant T. \end{cases}$$

После интегрирования по частям и элементарных преобразований получим

$$\int_0^\tau\int_0^l u^2dxdt + \frac{1}{2}\int_0^l a(x,0)v_x^2(x,0)dx = \int_0^\tau\int_0^l cvv_t\,dxdt - \frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^l a_tv_x^2\,dxdt +$$
$$+ \frac{1}{2}\int_0^\tau \alpha_1'(t)v^2(0,t)dt - \frac{1}{2}\int_0^\tau \beta_2'(t)v^2(l,t)dt - \int_0^\tau \alpha_2'(t)v(0,t)v(l,t)dt -$$
$$- \int_0^\tau \big(\alpha_2(t) + \beta_1(t)\big)v(0,t)v_t(l,t)dt + \frac{1}{2}\alpha_1(0)v^2(0,0) -$$
$$- \alpha_2(0)v(0,0)v(l,0) - \frac{1}{2}\beta_2(0)v^2(l,0) -$$
$$- \int_0^\tau v(0,t)\int_0^l H_1(x,t)v_t(x,t)dxdt + \int_0^\tau v(l,t)\int_0^l H_2(x,t)v_t(x,t)dxdt. \quad (5)$$

Условия теоремы обеспечивают существование положительных чисел a_0, c_0, $\bar\alpha$, h_i таких, что

$$a(x,t) \geqslant a_0, \quad |c(x,t)| \leqslant c_0, \quad |\alpha_1', \alpha_2', \beta_2'| \leqslant \bar\alpha, \quad \max_{[0,T]}\int_0^l H_i^2dx \leqslant h_i.$$

Обозначим $h = \max_i\{h_i\}$. Тогда из (5), применяя неравенства Коши, Коши—Буняковского и Коши с эпсилон, а также учитывая условия b) и c) теоремы, получим

$$\int_0^\tau\int_0^l u^2dxdt + \frac{1}{2}\int_0^l a_0v_x^2(x,0)dx \leqslant \varepsilon\int_0^\tau\int_0^l v_t^2dxdt + c(\varepsilon)\int_0^\tau\int_0^l v^2dxdt +$$
$$+ \frac{a_1}{2}\int_0^\tau\int_0^l v_x^2dxdt + \bar\alpha\int_0^\tau v^2(0,t)dt + \bar\alpha\int_0^\tau v^2(l,t)dt +$$

$$+ c(\varepsilon)\int_0^\tau \big[v^2(0,t)+v^2(l,t)\big]dt + h\varepsilon\int_0^\tau\int_0^l v_t^2 dxdt.$$

Выберем ε так, чтобы $\nu = a_0-(1+h)\varepsilon > 0$, например, $\varepsilon = a_0/2(1+h)$. Тогда, перенеся интеграл от $v_t(x,t) = u(x,t)$ в силу выбора $v(x,t)$, в левую часть неравенства, получим

$$\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^l u^2dxdt + \frac{a_0}{2}\int_0^l v_x^2(x,0)dx \leqslant c(\varepsilon)\int_0^\tau\int_0^l v^2dxdt + \frac{a_1}{2}\int_0^\tau\int_0^l v_x^2dxdt +$$
$$+\bar\alpha\int_0^\tau v^2(0,t)dt + \bar\alpha\int_0^\tau v^2(l,t)dt + c(\varepsilon)\int_0^\tau\big[v^2(0,t)+v^2(l,t)\big]dt.$$

Продолжим оценку правой части неравенства. Прежде всего заметим, что из представления функции $v(x,t)$ следует, что для $t<\tau$

$$v^2(x,t) \leqslant \tau\int_0^\tau u^2(x,\eta)d\eta,$$

поэтому

$$\int_0^\tau\int_0^l v^2dxdt \leqslant \tau^2\int_0^\tau\int_0^l u^2dxdt. \tag{6}$$

Для оценки интегралов, содержащих следы функции $v(x,t)$ на боковых границах, применим неравенства [15]

$$v^2(z_i,t) \leqslant 2l\int_0^l v_x^2(x,t)dx + \frac{2}{l}\int_0^l v^2(x,t)dx, \quad z_1=0, \quad z_2=l.$$

Получим, обозначив $C_1 = c(\varepsilon)+\bar\alpha$,

$$C_1\int_0^\tau\big[v^2(0,t)+v^2(l,t)\big]dt \leqslant 4C_1l\int_0^\tau\int_0^l v_x^2(x,t)dxdt + \frac{4C_1}{l}\int_0^\tau\int_0^l v^2(x,t)dxdt.$$

В результате приходим к неравенству

$$\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^l u^2dxdt + \frac{a_0}{2}\int_0^l v_x^2(x,0)dx \leqslant C_2\int_0^\tau\int_0^l v^2dxdt + C_3\int_0^\tau\int_0^l v_x^2dxdt,$$

где мы обозначили $C_2 = c(\varepsilon)+4C_1/l$, $C_3 = 4C_1l + a_1/2$. Теперь воспользуемся неравенством (6). Это приводит нас к неравенству

$$\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^l u^2dxdt + \frac{a_0}{2}\int_0^l v_x^2(x,0)dx \leqslant C_2\tau^2\int_0^\tau\int_0^l u^2dxdt + C_3\int_0^\tau\int_0^l v_x^2dxdt.$$

Пользуясь произволом, выберем τ так, чтобы $\mu = 1/2 - C_2\tau^2 > 0$. Пусть $\tau \leqslant 1/(2\sqrt{C_2})$. Тогда для всех $\tau\in[0,1/(2\sqrt{C_2})]$

$$\mu\int_0^\tau\int_0^l u^2dxdt + \frac{a_0}{2}\int_0^l v_x^2(x,0)dx \leqslant C_3\int_0^\tau\int_0^l v_x^2(x,t)dxdt. \tag{7}$$

Из (7), в частности,

$$\frac{a_0}{2}\int_0^l v_x^2(x,0)dx \leqslant C_3\int_0^\tau\int_0^l v_x^2(x,t)dxdt. \tag{8}$$

Введем функцию $w(x,t) = \displaystyle\int_0^t u(x,\eta)d\eta$. Так как интеграл в правой части этой формулы можно представить как сумму

$$\int_0^t u(x,\eta)d\eta = \int_0^\tau u_x d\eta + \int_\tau^t u_x d\eta,$$

легко увидеть, что $v_x(x,t) = w(x,t) - w(x,\tau)$, $v_x(x,0) = w(x,\tau)$. Тогда

$$\int_0^\tau\int_0^l v_x^2(x,t)dxdt = \int_0^\tau\int_0^l (w(x,t) - w(x,\tau))^2 \leqslant$$
$$\leqslant 2\int_0^\tau\int_0^l w^2(x,t)dxdt + 2\int_0^\tau\int_0^l w^2(x,\tau)dxdt.$$

Заметив, что подынтегральная функция второго слагаемого правой части последнего соотношения не зависит от переменной интегрирования, получим

$$\int_0^\tau\int_0^l w^2(x,\tau)dxdt = \tau\int_0^l w^2(x,\tau)dx.$$

С учетом проведенных рассуждений из (8) следует

$$\int_0^l w^2(x,\tau)dx \leqslant \frac{4C_3}{a_0}\int_0^\tau\int_0^l w^2dxdt + \frac{4C_3}{a_0}\tau\int_0^l w^2(x,\tau)dx.$$

Выберем τ так, чтобы $\nu = a_0 - 4C_3\tau > 0$, например, $\tau \leqslant a_0/(8C_3)$, и перенесем последний интеграл правой части последнего неравенства в левую его часть. Тогда

$$\nu\int_0^l w^2(x,\tau)dx \leqslant \frac{4C_3}{a_0}\int_0^\tau\int_0^l w^2dxdt.$$

К этому неравенству можно применить лемму Гронуолла, но прежде, чем это сделать, вспомним, что мы уже выбирали τ. Поэтому теперь будем рассматривать те значения τ, которые удовлетворяют как $\tau \leqslant a_0/(8C_3)$, так и $\tau \leqslant 1/(2\sqrt{C_2})$. Обозначим $b_1 = \min\{1/(2\sqrt{C_2}),\ a_0/(8C_3)\}$. Тогда для всех $\tau \in [0,b_1]$

$$\int_0^l w^2(x,\tau)dx \leqslant 0$$

и, стало быть, $w(x,t) = 0$ для всех t из $[0,b_1]$. А это значит, что $v_x(x,0) = 0$. Возвращаясь к (7), получим

$$\int_0^\tau\int_0^l u^2dxdt \leqslant 0,$$

откуда $u(x,t)=0$ для всех $t\in[0,b_1]$, т.е. в $Q_{b_1}=(0,l)\times(0,b_1)$. Повторяя рассуждения и оценки для $(0,l)\times(b_1,2b_1)$ и продолжая этот процесс, через конечное число шагов убедимся в том, что $u(x,t)=0$ во всем цилиндре Q, а это означает, что существует не более одного обобщенного решения задачи (1), (2).

Существование решения. Пусть $\{w_k(x)\}$ — фундаментальная система в $W_2^1(0,l)$. Будем искать приближенные решения задачи (1), (2) в виде $u^m(x,t)=\sum\limits_{k=1}^{m}c_{km}(t)w_k(x)$ из соотношений

$$\begin{aligned}\int_0^l\big(u_t^m w_i+au_x^m w_i'+cu^m w_i\big)dx-&\\ -w_i(0)\Big[\alpha_1u^m(0,t)+\beta_1u^m(l,t)+\int_0^l H_1u^m dx\Big]&+\\ +w_i(l)\Big[\alpha_2u^m(0,t)+\beta_2u^m(l,t)+\int_0^l H_2u^m dx\Big]&=\\ =\int_0^l fw_i dx-w_i(0)g_1(t)+w_i(l)g_2(t).&\end{aligned}\tag{9}$$

Нетрудно видеть, что соотношения (9) есть не что иное, как система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $c_{km}(t)$. Запишем ее в виде

$$\sum_{k=1}^{m}A_{ki}c_{km}'(t)+\sum_{k=1}^{m}B_{ki}c_{km}(t)=f_i(t),\tag{10}$$

где обозначено

$$A_{ki}=\int_0^l w_kw_idx,$$

$$\begin{aligned}B_{ki}=\int_0^l(aw_k'w_i'+cw_kw_i)dx-&\\ -w_i(0)\Big[\alpha_1w_k(0)+\beta_1w_k(l)+\int_0^l H_1w_kdx\Big]&+\\ +w_i(l)\Big[\alpha_2w_k(0)+\beta_2w_k(l)+\int_0^l H_2w_kdx\Big]&,\end{aligned}$$

$$f_i(t)=\int_0^l f(x,t)w_i(x)dx-w_i(0)g_1(t)+w_i(l)g_2(t).$$

Добавив равенства $c_{km}(0)=(\varphi,w_k)$, получим задачу Коши для системы (10). Так как функции $w_k(x)$ линейно независимы, матрица коэффициентов при $c_{km}'(t)$ — матрица Грамма и, стало быть, ее определитель отличен от нуля, и система (10) может быть записана в нормальной форме. Коэффициенты при $c_{km}(t)$ ограничены, а свободные члены суммируемы на $(0,T)$, что гарантировано условиями теоремы. Поэтому задача Коши для системы (10) однозначно разрешима и определяет абсолютно непрерывные на $[0,T]$ функции $c_{km}(t)$. Это означает, что последовательность приближенных решений $u^m(x,t)$ построена.

Перейдем к выводу оценок. Для этого умножим каждое из соотношений (9) на $c_{jm}(t)$, просуммируем полученные равенства по j от 1 до m, а затем проинтегрируем по t от 0 до $\tau \leqslant T$:

$$\int_0^\tau\int_0^l \big[u_t^m u^m + a(u_x^m)^2 + c(u^m)^2\big]dxdt - \int_0^\tau u^m(0,t)\big[\alpha_1 u^m(0,t) + \beta_1 u^m(l,t)\big]dt -$$
$$- \int_0^\tau u^m(0,t)\int_0^l H_1(x,t)u^m(x,t)dxdt + \int_0^\tau u^m(l,t)\big[\alpha_2 u^m(0,t) + \beta_2 u^m(l,t)\big]dt +$$
$$+ \int_0^\tau u^m(l,t)\int_0^l H_2(x,t)u^m(x,t)dxdt + \int_0^\tau (\beta 2 - \alpha_1)u^m(0,t)u^m(l,t)dt =$$
$$= \int_0^\tau\int_0^l f u^m dxdt - \int_0^\tau u^m(0,t)g_1(t)dt + \int_0^\tau u^m(l,t)g_2(t)dt.$$

Проинтегрировав по частям первое слагаемое этого равенства, сделав элементарные преобразования, учтя при этом условие $\alpha_2 + \beta_1 = 0$, получим

$$\frac{1}{2}\int_0^l (u^m(x,\tau))^2dx + \int_0^\tau\int_0^l a(u_x^m)^2dxdt =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^l (u^m(x,0))^2dx - \int_0^\tau\int_0^l c(u^m)^2dxdt +$$
$$+ \int_0^\tau \alpha_1(u^m(0,t))^2 - \int_0^\tau \beta_2(u^m(l,t))^2dt - 2\int_0^\tau \alpha_2 u^m(0,t)u^m(l,t)dt -$$
$$- \int_0^\tau u^m(0,t)\int_0^l H_1(x,t)u^m(x,t)dxdt +$$
$$+ \int_0^\tau u^m(l,t)\int_0^l H_2(x,t)u^m(x,t)dxdt +$$
$$+ \int_0^\tau\int_0^l f u^m dxdt - \int_0^\tau u^m(0,t)g_1(t)dt + \int_0^\tau u^m(l,t)g_2(t)dt. \quad (11)$$

Из равенства (11) с учетом условия c) теоремы вытекает неравенство

$$\frac{1}{2}\int_0^l (u^m(x,\tau))^2dx + \int_0^\tau\int_0^l a_0(u_x^m)^2dxdt \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\int_0^l (u^m(x,0))^2dx + \int_0^\tau\int_0^l |c|(u^m)^2dxdt +$$
$$+ \left|\int_0^\tau u^m(0,t)\int_0^l H_1(x,t)u^m(x,t)dxdt\right| +$$
$$+ \left|\int_0^\tau u^m(l,t)\int_0^l H_2(x,t)u^m(x,t)dxdt\right| +$$

$$+\left|\int_0^\tau\int_0^l f u^m dxdt\right| + \left|\int_0^\tau u^m(0,t)g_1(t)dt\right| + \left|\int_0^\tau u^m(l,t)g_2(t)dt\right|. \quad (12)$$

Оценим правую часть (12) с помощью неравенств Коши и Коши—Буняковского:

$$\left|\int_0^\tau u^m(0,t)\int_0^l H_1(x,t)u^m(x,t)dxdt\right| \leqslant \frac{1}{2}\int_0^\tau (u^m(0,t))^2dt + \frac{h_1}{2}\int_0^\tau\int_0^l (u^m(x,t))^2;$$

$$\left|\int_0^\tau u^m(l,t)\int_0^l H_2(x,t)u^m(x,t)dxdt\right| \leqslant \frac{1}{2}\int_0^\tau (u^m(l,t))^2dt + \frac{h_2}{2}\int_0^\tau\int_0^l (u^m(x,t))^2;$$

$$\left|\int_0^\tau\int_0^l f u^m dxdt\right| \leqslant \frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^l f^2(x,t)dxdt;$$

$$\left|\int_0^\tau u^m(0,t)g_1(t)dt\right| \leqslant \frac{1}{2}\int_0^\tau (u^m(0,t))^2dt + \frac{1}{2}\int_0^\tau g_1^2(t)dt;$$

$$\left|\int_0^\tau u^m(l,t)g_2(t)dt\right| \leqslant \frac{1}{2}\int_0^\tau (u^m(l,t))^2dt + \frac{1}{2}\int_0^\tau g_2^2(t)dt.$$

Следуя [22, с. 77], нетрудно получить неравенства

$$(u^m(0,t))^2 \leqslant \varepsilon\int_0^l (u_x^m(x,t))^2dx + \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon l}\int_0^l (u^m(x,t))^2dx;$$

$$(u^m(l,t))^2 \leqslant \varepsilon\int_0^l (u_x^m(x,t))^2dx + \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon l}\int_0^l (u^m(x,t))^2dx.$$

Тогда, продолжив оценку, получим

$$\int_0^\tau \left[(u^m(0,t))^2 + (u^m(l,t))^2\right]dt \leqslant$$
$$\leqslant 2\varepsilon\int_0^\tau\int_0^l (u_x^m(x,t))^2dxdt + 2\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon l}\int_0^\tau\int_0^l (u^m(x,t))^2dxdt.$$

Выберем ε так, чтобы $a_0 - 2\varepsilon > 0$. Пусть $\varepsilon = a_0/4$. Тогда неравенство (12) принимает вид

$$\frac{1}{2}\int_0^l (u^m(x,\tau))^2dx + \frac{a_0}{2}\int_0^\tau\int_0^l (u_x^m)^2dxdt \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\int_0^l (u^m(x,0))^2dx + C_4\int_0^\tau\int_0^l (u^m)^2dxdt +$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^l f^2(x,t)dxdt + \frac{1}{2}\int_0^\tau \left[g_1^2(t) + g_2^2(t)\right]dt, \quad (13)$$

где

$$C_4 = c_0 + 2\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon l} + \frac{1}{2}.$$

Из (13), в частности,

$$\int_0^l (u^m(x,\tau))^2 dx \leqslant \int_0^l (u^m(x,0))^2 dx + 2C_4 \int_0^\tau\int_0^l (u^m(x,t))^2 dxdt + \\ + \int_0^\tau\int_0^l f^2(x,t)dxdt + \int_0^\tau \big[g_1^2(t) + g_2^2(t)\big]dt,$$

откуда в силу неравенства Гронуолла в дифференциальной форме [21, с. 536]

$$\int_0^\tau\int_0^l (u^m(x,t))^2 dxdt \leqslant e^{2C_4\tau} \int_0^\tau \Big[\int_0^l (u^m(x,0))^2 dx + \\ + \int_0^{\tau'}\int_0^l f^2(x,t)dxdt + \int_0^{\tau'} \big[g_1^2(t) + g_2^2(t)\big]dt\Big] d\tau'.$$

Учитывая,что

$$f \in L_2(Q)), \quad g_i \in L_2(0,T), \quad \int_0^l (u^m(x,0))^2 dx \leqslant \|\varphi\|^2_{L_2(0,l)},$$

справедливо неравенство

$$\int_0^\tau \Big[\int_0^l (u^m(x,0))^2 dx + \int_0^{\tau'}\int_0^l f^2(x,t)dxdt + \int_0^{\tau'} \big[g_1^2(t) + g_2^2(t)\big]dt\Big] d\tau' \leqslant N(\tau),$$

а функция $N(\tau)$ ограничена, что обеспечено условиями теоремы. Таким образом, мы получили следующую оценку:

$$\|u^m\|^2_{L_2(Q_\tau)} \leqslant C(\tau)N(\tau), \tag{14}$$

справедливую для всех $\tau \in [0,T]$, причем правая часть (14) не зависит от m. Возвращаясь к неравенству (13), получим оценку второго слагаемого в его левой части:

$$\frac{a_0}{2}\int_0^\tau\int_0^l (u_x^m)^2 dxdt \leqslant C_4 C(\tau)N(\tau) + \frac{1}{2}C(\tau)N'(\tau).$$

Отсюда

$$\|u_x^m\|^2_{L_2(Q_\tau)} \leqslant P(\tau), \tag{15}$$

где функция $P(\tau)$ в силу условий теоремы ограничена. Так как (14) и (15) выполняются для всех $\tau \in [0,T]$, для $u^m(x,t)$ имеем оценку

$$\|u^m\|_{W_2^{1,0}(Q)} \leqslant R \tag{16}$$

с постоянной R, не зависящей от m.

Благодаря (16) из последовательности $\{u^m\}$ можно выделить подпоследовательность, за которой сохраним прежнее обозначение во избежание громоздкости, слабо сходящуюся вместе с производными u_x^m к некоторому элементу $u \in W_2^{1,0}(Q_T)$. Покажем, что этот элемент является искомым решением задачи (1), (2). Для этого умножим (9) на произвольную абсолютно непрерывную функцию $d_i(t)$ такую, что $d'(t) \in L_2(0,T)$ и $d_i(T) = 0$. Полученные равенства сложим по всем i от 1 до m, а затем проинтегрируем по t от 0 до T. После интегрирования по частям в первом слагаемом приходим к тождеству

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_0^l (-u^m\eta_t + au_x^m\eta_x + cu^m\eta)dxdt - \int_0^l u^m(x,0)\eta(x,0)dx - \\ - \int_0^T \eta(0,t)\left[\alpha_1(t)u^m(0,t) + \beta_1(t)u^m(l,t) + \int_0^l H_1(x,t)u^m(x,t)dx\right]dt + \\ + \int_0^T \eta(l,t)\left[\alpha_2(t)u^m(0,t) + \beta_2(t)u^m(l,t) + \int_0^l H_2(x,t)u^m(x,t)dx\right]dt = \\ = \int_0^T\int_0^l f(x,t)\eta(x,t)dxdt - \int_0^T \eta(0,t)g_1(t)dt + \int_0^T \eta(l,t)g_2(t)dt,\end{aligned} \quad (17)$$

которое очень похоже на тождество (3), но пока можно утверждать его выполнимость для функций $\eta(x,t) = \sum\limits_{i=1}^{m} d_i(t)w_i(x)$, а не для любых $v \in \hat{W}_2^1(Q_T)$. Обозначим через Θ_m — множество функций $\eta(x,t)$ с указанными свойствами. Как показано в [22, с. 169], совокупность $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \Theta_j$ плотна в $\hat{W}_2^1(Q_T)$, поэтому, перейдя к пределу в (17) при $m \to \infty$ и фиксированной $\eta(x,t)$, можем утверждать, что полученное при этом тождество

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_0^l (-u\eta_t + au_x\eta_x + cu\eta)dxdt - \int_0^l \varphi(x)\eta(x,0)dx - \\ - \int_0^T \eta(0,t)\left[\alpha_1(t)u(0,t) + \beta_1(t)u(l,t) + \int_0^l H_1(x,t)u(x,t)dx\right]dt + \\ + \int_0^T \eta(l,t)\left[\alpha_2(t)u(0,t) + \beta_2(t)u(l,t) + \int_0^l H_2(x,t)u(x,t)dx\right]dt = \\ = \int_0^T\int_0^l f(x,t)\eta(x,t)dxdt - \int_0^T \eta(0,t)g_1(t)dt + \int_0^T \eta(l,t)g_2(t)dt\end{aligned}$$

выполняется для любой $v \in \hat{W}_2^1(Q_T)$. А это и означает, что функция $u(x,t) = \lim\limits_{m\to\infty} u^m(x,t)$ есть искомое решение задачи (1), (2).

Теорема полностью доказана. □

Замечания и дополнения. В качестве дополнения приведем некоторые вычисления, иллюстрирующие сделанное во введении замечание о связи условий (2), интегральных условий первого рода и условий Стеклова. Действительно, пусть заданы условия первого рода

$$\int_0^l K_i(x)u(x,t)dx = 0, \quad i = 1, 2.$$

Проинтегрировав умноженное на $K_i(x)$ уравнение (1), получим

$$-K_i(l)a(l,t)u_x(l,t) + K_i(0)a(0,t)u_x(0,t) + K_i'(l)a(l,t)u(l,t) - K_i'(0)a(0,t)u(0,t) +$$

$$+\int_0^l \left[c(x,t)K_i(x) - (K_i'(x)a(x,t))_x\right]u(x,t)dx = \int_0^l K_i(x)f(x,t)dx, \quad i = 1,2.$$

Если в уравнении (1) $c = 0$, $a = \text{const}$, а именно такое уравнение рассмотрено в [14], и, кроме того, $K_i''(x) = 0$, то интегралы в этих соотношениях обращаются в нуль и мы приходим к условиям Стеклова.

Считая выполненным естественное условие $\Delta = K_1(0)K_2(l) - K_1(l)K_2(0) \neq 0$, получим соотношения (2), где

$$\alpha_1(t) = \frac{K_1'(0)K_2(l) - K_2'(0)K_1(l)}{\Delta}, \quad \alpha_2(t) = \frac{[K_2'(0)K_1(0) - K_1'(0)K_2(0)]a(0,t)}{a(l,t)\Delta};$$

$$\beta_1(t) = \frac{(K_1'(0)K_2(0) - K_2'(0)K_1(0))a(l,t)}{a(0,t)\Delta}, \quad \beta_2(t) = \frac{(K_1'(l)K_2(0) - K_2'(l)K_1(0))}{\Delta};$$

$$H_1(x,t) = \frac{[cK_1 - (K_1'a)_x]K_2(l) - [cK_2 - (K_2'a)_x]K_1(l)}{a(l,t)\Delta},$$

$$H_2(x,t) = \frac{[cK_1 - (K_1'a)_x]K_2(0) - [cK_2 - (K_2'a)_x]K_1(0)}{a(0,t)\Delta}.$$

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Благодарности. Авторы благодарят анонимных рецензентов за их комментарии, которые помогли улучшить эту статью, а также редакционную коллегию журнала за четкую координацию.

Библиографический список

1. Bažant, Zdeněk P., Jirásek M. Nonlocal integral formulation of plasticity and damage: Survey of progress // *J. Eng. Mech.*, 2002. vol. 128, no. 11. pp. 1119–1149. DOI: https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2002)128:11(1119).
2. Cannon J. R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy // *Quart. Appl. Math.*, 1963. vol. 21, no. 2. pp. 155–160. DOI: https://doi.org/10.1090/qam/160437.
3. Камынин Л. И. Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими граничными условиями // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1964. Т. 4, № 6. С. 1006–1024.
4. Ионкин Н. И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // *Диффер. уравн.*, 1977. Т. 13, № 2. С. 294–304.
5. Картынник А. В. Трехточечная смешанная задача с интегральным условием по пространственной переменной для параболических уравнений второго порядка // *Диффер. уравн.*, 1990. Т. 26, № 9. С. 1568–1575.
6. Bouziani A. On the solvability of parabolic and hyperbolic problems with a boundary integral condition // *Int. J. Math. Math. Sci.*, 2002. vol. 31, no. 4. pp. 201–213. DOI: https://doi.org/10.1155/S0161171202005860.
7. Керефов А. А., Шхануков–Лафишев М. Х., Кулиев Р. С. Краевые задачи для нагруженного уравнения теплопроводности с нелокальными условиями типа Стеклова / *Неклассические уравнения математической физики*. Новосибирск: ИМ СО РАН, 2005. С. 152–159.

8. Кожанов А. И. Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнений теплопроводности и Аллера // *Диффер. уравн.*, 2004. Т. 40, № 6. С. 763–774.
9. Иванчов Н. И. Краевые задачи для параболического уравнения с интегральными условиями // *Диффер. уравн.*, 2004. Т. 40, № 4. С. 547–564.
10. Оразов И., Садыбеков М. А. Об одной нелокальной задаче определения температуры и плотности источников тепла // *Изв. вузов. Матем.*, 2012. № 2. С. 70–75. EDN: OJXYSV.
11. Cannon J. R., van der Hoek J. The classical solution of the one-dimensional two-phase Stefan problem with energy specification // *Ann. Mat. Pura Appl., IV. Ser.*, 1982. vol. 130, no. 1. pp. 385–398. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01761503.
12. Cannon J. R., Lin Y. Determination of a parameter $p(t)$ in some quasi-linear parabolic differential equations // *Inverse Problems*, 1988. vol. 4, no. 1. pp. 35–45. DOI: https://doi.org/10.1088/0266-5611/4/1/006.
13. Камынин В. Л. Обратная задача определения младшего коэффициента в параболическом уравнении при условии интегрального наблюдения // *Матем. заметки*, 2013. Т. 94, № 2. С. 207–217. DOI: https://doi.org/RLRMZR DOI: https://doi.org/10.4213/mzm9370.
14. Стеклов В. А. Задача об охлаждении неоднородного твердого тела // *Сообщ. Харьков. мат. о-ва. Сер. 2*, 1896. Т. 5, № 3–4. С. 136–181.
15. Пулькина Л. С. Краевые задачи для гиперболического уравнения с нелокальными условиями I и II рода // *Изв. вузов. Матем.*, 2012. № 4. С. 74–83. EDN: OOUKMT.
16. Pulkina L. S. Nonlocal problems for hyperbolic equation from the view point of strongly regular boundary conditions // *Electron. J. Differ. Equ.*, 2020. vol. 2020, no. 28. pp. 1–20. https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2020/28/abstr.html.
17. Кожанов А. И., Дюжева А. В. Нелокальные задачи с интегральным смещением для параболических уравнений высокого порядка // *Изв. Иркутск. гос. унив. Сер. Математика*, 2021. Т. 36. С. 14–28. EDN: YGBIKR. DOI: https://doi.org/10.26516/1997-7670.2021.36.14.
18. Данилюк И. М., Данилюк А. О. Задача Неймана с интегро-дифференциальным оператором в краевом условии // *Матем. заметки*, 2016. Т. 100, № 5. С. 701–709. EDN: XAMYJB. DOI: https://doi.org/10.4213/mzm11013.
19. Кожанов А. И. О разрешимости некоторых нелокальных и связанных с ними обратных задач для параболических уравнений // *Мат. заметки ЯГУ*, 2011. Т. 18, № 2. С. 64–78. EDN: PMEXNH.
20. Кожанов А. И., Дюжева А. В. Вторая начально-краевая задача с интегральным смещением для гиперболических и параболических уравнений второго порядка // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 3. С. 423–434. EDN: ZAKEGT. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1859.
21. Эванс Л. К. *Уравнения с частными производными.* Новосибирск: Тамара Рожковская, 2003. 560 с.
22. Ладыженская О. А. *Краевые задачи математической физики.* М.: Наука, 1973. 407 с.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 2, pp. 1–x
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1904

MSC: 35L20, 35B45, 35D30

A problem with nonlocal conditions for a one-dimensional parabolic equation

***A. B. Beylin*[1], *A. V. Bogatov*[2], *L. S. Pulkina*[3]**

[1] Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.
[2] Samara National Research University,
34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Abstract

In this paper, we consider a problem with nonlocal conditions for parabolic equation and show that there exists a unique weak solution in Sobolev space. The main tool to prove the existence of a unique weak solution to the problem is a priori estimates derived by authors. We also note a connection between Steklov nonlocal conditions and first kind integral conditions. This connection enables interpret the problem under consideration as a problem with perturbed Steklov nonlocal conditions. Obtained results may be useful for certain class of problems including inverse problems.

Keywords: parabolic equation, boundary-value problem, nonlocal conditions, weak solution, Sobolev spaces.

Received: 24th January, 2022 / Revised: 2nd March, 2022 /
Accepted: 23rd May, 2022 / First online: 26th May, 2022

Competing interests. We have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely

Short Communication

Please cite this article in press as:
Beylin A. B., Bogatov A. V., Pulkina L. S. A problem with nonlocal conditions for a one-dimensional parabolic equation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 2, pp. 1–x. EDN: AAAAAAA. DOI: 10.14498/vsgtu1904 (In Russian).

Authors' Details:

Alexander B. Beylin https://orcid.org/0000-0002-4042-2860
Cand. of Techn. Sci., Associate Professor; Dept. Mechanical Engineering, Machine Tools and Tools; e-mail: abeilin@mail.ru

Andrey V. Bogatov https://orcid.org/0000-0001-5797-1930
Postgraguate Student; Dept. of Differential Equations and Control Theory;
e-mail: andrebogato@mail.ru

Ludmila S. Pulkina https://orcid.org/0000-0001-7947-6121
Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Dept. of Differential Equations and Control Theory;
e-mail: louise@samdiff.ru

responsible for submit the final manuscript to print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. Not applicable.

Acknowledgements. The authors thank the anonymous reviewers for their comments that improve this article, and the editorial board of the journal for managing this submission.

References

1. Bažant, Zdeněk P., Jirásek M. Nonlocal integral formulation of plasticity and damage: Survey of progress, *J. Eng. Mech.*, 2002, vol. 128, no. 11, pp. 1119–1149. DOI: https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2002)128:11(1119).
2. Cannon J. R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy, *Quart. Appl. Math.*, 1963, vol. 21, no. 2, pp. 155–160. DOI: https://doi.org/10.1090/qam/160437.
3. Kamynin L. I. On certain boundary problem of heat conduction with nonclassical boundary conditions, *Comput. Math. Math. Phys.*, 1964, vol. 4, no. 6, pp. 33–59. EDN: XNNPFM. DOI: https://doi.org/10.1016/0041-5553(64)90080-1.
4. Ionkin N. I. The solution of a certain boundary value problem of the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition, *Differ. Uravn.*, 1977, vol. 13, no. 2, pp. 294–304 (In Russian).
5. Kartynnik A. V. A three-point mixed problem with an integral condition with respect to the space variable for second-order parabolic equations, *Differ. Equ.*, 1990, vol. 26, no. 9, pp. 1160–1166.
6. Bouziani A. On the solvability of parabolic and hyperbolic problems with a boundary integral condition, *Int. J. Math. Math. Sci.*, 2002, vol. 31, no. 4, pp. 201–213. DOI: https://doi.org/10.1155/S0161171202005860.
7. Kerefov A. A., Shkhanukov–Lafishev M. Kh., Kuliev R. S. Boundary-value problems for a loaded heat equation with nonlocal Steklov-type conditions, In: *Neklassicheskie uravneniia matematicheskoi fiziki* [Nonclassical Equations of Mathematical Physics]. Novosibirsk, Inst. Math. SB RAS, 2005, pp. 152–159 (In Russian).
8. Kozhanov A. I. On a nonlocal boundary value problem with variable coefficients for the heat equation and the Aller equation, *Differ. Equ.*, 2004, vol. 40, no. 6, pp. 815–826. EDN: PJGDYR. DOI: https://doi.org/10.1023/B:DIEQ.0000046860.84156.f0.
9. Ivanchov N. I. Boundary value problems for a parabolic equation with integral conditions, *Differ. Equ.*, 2004, vol. 40, no. 4, pp. 591–609. EDN: XLSRJL. DOI: https://doi.org/10.1023/B:DIEQ.0000035796.56467.44.
10. Orazov I., Sadybekov M. A. One nonlocal problem of determination of the temperature and density of heat sources, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2012, vol. 56, no. 2, pp. 60–64. EDN: XMXTBB. DOI: https://doi.org/10.3103/S1066369X12020089.
11. Cannon J. R., van der Hoek J. The classical solution of the one-dimensional two-phase Stefan problem with energy specification, *Ann. Mat. Pura Appl., IV. Ser.*, 1982, vol. 130, no. 1, pp. 385–398. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01761503.
12. Cannon J. R., Lin Y. Determination of a parameter $p(t)$ in some quasi-linear parabolic differential equations, *Inverse Problems*, 1988, vol. 4, no. 1, pp. 35–45. DOI: https://doi.org/10.1088/0266-5611/4/1/006.
13. Kamynin V. L. The inverse problem of determining the lower-order coefficient in parabolic equations with integral observation, *Math. Notes*, 2013, vol. 94, no. 2, pp. 205–213. EDN: RFQRGX. DOI: https://doi.org/10.1134/S0001434613070201.
14. Steklov V. A. The problem of cooling of inhomogeneous solid, *Commun. Kharkov Math. Soc.*, 1896, vol. 5, no. 3–4, pp. 136–181 (In Russian).
15. Pul'kina L. S. Boundary-value problems for a hyperbolic equation with nonlocal conditions of the I and II kind, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2012, vol. 56, no. 4, pp. 62–69. EDN: PDSZMV DOI: https://doi.org/10.3103/S1066369X12040081.

16. Pulkina L. S. Nonlocal problems for hyperbolic equation from the view point of strongly regular boundary conditions, *Electron. J. Differ. Equ.*, 2020, vol. 2020, no. 28, pp. 1–20. https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2020/28/abstr.html.
17. Kozhanov A. I., Dyuzheva A. V. Non-local problems with integral displacement for high-order parabolic equations, *Bulletin of Irkutsk State University, Ser. Mathematics*, 2021, vol. 36, pp. 14–28 (In Russian). DOI: https://doi.org/10.26516/1997-7670.2021.36.14.
18. Danyliuk I. M., Danyliuk A. O. Neumann problem with the integro-differential operator in the boundary condition, *Math. Notes*, 2016, vol. 100, no. 5, pp. 687–694. EDN: XNSUDH. DOI: https://doi.org/10.1134/S0001434616110055.
19. Kozhanov A. I. On the solvability of some nonlocal and associated with them inverse problems for parabolic equations, *Math. Notes of Yakutsk State Univ.*, 2011, vol. 18, no. 2, pp. 64–78 (In Russian).
20. Kozhanov A. I., Dyuzheva A. V. The second initial-boundary value problem with integral displacement for second-order hyperbolic and parabolic equations, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 3, pp. 423–434 (In Russian). DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1859.
21. Evans L. C. *Uravneniia s chastnymi proizvodnymi* [Partial Differential Equations]. Novosibirsk, Tamara Rozhkovskaya, 2003, 560 pp. (In Russian)
22. Ladyzhenskaya O. A. *Kraevye zadachi matematicheskoi fiziki* [Boundary Problems of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1973, 407 pp. (In Russian)