Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2015. Т. 19, № 1. С. 19–43
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1383

УДК 517.956.223

О ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ*

А. К. Гущин

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН,
Россия, 119991, Москва, ул. Губкина, 8.

Светлой памяти
Валентина Петровича Михайлова
посвящается

Аннотация

Хорошо известно, что естественно возникающее из вариационных принципов и удобное в применении понятие обобщённого решения из соболевского пространства W_2^1 задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка не является в буквальном смысле обобщением понятия классического решения: не любая непрерывная на границе области функция является следом функции из W_2^1. Обобщение обоих этих понятий было предложено в 1976 году Валентином Петровичем Михайловым, памяти которого посвящена настоящая работа. В определении Михайлова граничное значение решения берется из L_2; естественно обобщается это понятие и на случай граничной функции из L_p, $p > 1$. Впоследствии автором настоящей работы было доказано, что при выполнении не слишком обременительных условий такие решения обладают свойством $(n-1)$-мерной непрерывности. Это свойство аналогично классическому определению равномерной непрерывности, но вместо значения функции в точке следует рассматривать её следы на мерах из специального класса, немного более узкого, чем класс мер Карлесона. След функции на мере является элементом пространства L_p по этой мере. $(n-1)$-мерная непрерывность означает, что следы на мерах близки, если близки эти меры. Определение близости мер учитывает близость (в специальном смысле) их носителей, а расстояние между следами (они элементы различных пространств) вводится с помощью погружения в пространство функций удвоенного числа переменных. Свойство $(n-1)$-мерной непрерывности позволило дать другое, по форме весьма близкое к классическому определение решения — $(n-1)$-мерно непрерывное решение. Как и понятия классического и обобщённого решений оно не требует условий гладкости границы рассматриваемой области. В отличие от случаев классического и обобщённого решений задача Дирихле в постановке

Образец для цитирования
Гущин А. К. О задаче Дирихле для эллиптического уравнения // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2015. Т. 19, № 1. С. 19–43. doi: 10.14498/vsgtu1383.

Сведения об авторе
Анатолий Константинович Гущин (д.ф.-м.н., проф.; akg@mi.ras.ru), ведущий научный сотрудник, отдел математической физики.

*Настоящая статья представляет собой расширенный вариант доклада [1], сделанного автором на Четвёртой международной конференции «Математическая физика и её приложения» (Россия, Самара, 25 августа – 1 сентября 2014).

Михайлова и тем более с $(n-1)$-мерно непрерывным решением исследована недостаточно полно. Прежде всего это относится к условиям на правую часть уравнения, при которых задача Дирихле разрешима. В работе приведён ряд новых результатов в этом направлении. Кроме того, обсуждаются условия на коэффициенты уравнения, границу ограниченной области, в которой рассматривается задача, и заданные граничные значения решений. При этом результаты о разрешимости и о граничном поведении решений сравниваются с аналогичными теоремами, относящимися к случаю классического и обобщённого решений, обсуждаются некоторые возникающие при таком сравнении нерешённые задачи.

Ключевые слова: эллиптическое уравнение, задача Дирихле, функциональное пространство.

doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1383

7 июля 2014 года ушел из жизни известный математик, мой учитель и друг, Валентин Петрович Михайлов. Его памяти посвящается эта работа. Математические интересы Валентина Петровича были весьма разнообразны. Его идеи являются основополагающими во многих областях теории дифференциальных уравнений в частных производных. Содержание статьи относится к одной из таких областей, в которой результаты Михайлова явились источником нового направления, интенсивно развивающегося и в настоящее время. Последние, в том числе и новые результаты в этом направлении являются основным содержанием настоящей работы.

Хорошо известно, что естественно возникающее из вариационных принципов и удобное в применении понятие обобщённого решения из соболевского пространства W_2^1 задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка не является в буквальном смысле обобщением понятия классического решения: не любая непрерывная на границе области функция является следом функции из W_2^1. Обобщение обоих этих понятий было предложено в 1976 году Валентином Петровичем Михайловым, см. [2]; он назвал его решением из $W^1_{2,\mathrm{loc}}$. В определении В. П. Михайлова граничное значение решения берется из L_2; естественно обобщается это понятие и на случай граничной функции из L_p, $p>1$. Впоследствии автором настоящей работы было доказано, см. [3], что при выполнении не слишком обременительных условий решения из $W^1_{2,\mathrm{loc}}$ обладают свойством $(n-1)$-мерной непрерывности. Это свойство очень похоже на классическое определение равномерной непрерывности, но вместо значения функции в точке следует рассматривать её следы на носителях мер (далее будем говорить «на мерах») из специального класса (немного более узкого, чем класс мер Карлесона; по поводу мер Карлесона см. [4–8]). След функции на мере является элементом пространства L_p по этой мере. $(n-1)$-мерная непрерывность предполагает, что следы на мерах (из взятого класса) близки, если близки эти меры. Определение близости мер учитывает близость (в специальном смысле) их носителей, а расстояние между следами (они элементы различных пространств) вводится с помощью погружения в пространство функций удвоенного числа переменных; строгое определение этих понятий будет приведено далее. Свойство $(n-1)$-мерной непрерывности позволило дать другое, немного более узкое, но весьма близкое к классическому определение решения. Такое решение называется $(n-1)$-мерно непрерывным решением, или решением из пространства $C_{n-1}(\bar{Q})$.

В отличие от случаев классического и обобщенного решений задача Дирихле с решением из $W^1_{2,\mathrm{loc}}$, и тем более из $C_{n-1}(\bar{Q})$, исследована недостаточно полно. Прежде всего это относится к условиям на правую часть уравнения, при которых задача Дирихле разрешима. В работе приведён ряд новых результатов в этом направлении. Обсуждаются условия на коэффициенты уравнения, границу ограниченной области, в которой рассматривается задача, и граничное значение решения. При этом результаты о разрешимости и о граничном поведении решений сравниваются с аналогичными теоремами, относящимися к случаю классического и обобщенного решений. Будут обсуждаться некоторые возникающие при таком сравнении нерешенные задачи.

1. Классическое решение. Прежде всего, напомним хорошо известные свойства классического решения, его определение и обсудим условия на коэффициенты уравнения и его правую часть, границу области и граничное значение, при которых такое решение существует. Начнем обсуждение с простейшего случая — случая уравнения Пуассона. Пусть D — ограниченная область n-мерного пространства $\mathbb{R}_n$, а ∂D — её граница. В этой области рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона

$$\triangle u(x) = -f(x), \quad x \in D, \tag{1}$$

$$u(x) = u_0(x), \quad x \in \partial D. \tag{2}$$

Определение 1. Определённая в замыкании $\bar{D}$ области D функция u называется *классическим решением задачи Дирихле* (1), (2), если

– функция u непрерывна в D вместе со своими производными до второго порядка включительно ($u \in C^2(D)$) и для всех точек x этой области значение $\triangle u(x)$ оператора Лапласа от u в x совпадает со значением $f(x)$ в этой точке правой части уравнения f;
– функция u непрерывна в замыкании $\bar{D}$ области D ($u \in C(\bar{D})$) и для каждой точки границы ∂D значение в ней функции u равно значению в этой точке заданной функции u_0.

Поскольку единственность решения немедленно следует из вытекающего из теоремы о среднем принципа максимума, предметом обсуждения будет вопрос о существовании решения. Отметим, что необходимыми условиями разрешимости задачи являются, очевидно, требования непрерывности u_0 на ∂D и f в D.

Остановимся сначала на случае однородного уравнения. Задача Дирихле для уравнения Лапласа была впервые сформулирована К. Гауссом в 1828 году. Первые исследования в направлении разрешимости этой задачи принадлежат П. Дирихле, который, по словам Б. Римана, на своих лекциях (до 1957 года) доказывал теорему существования решения (принцип Дирихле). Задача сводилась к отысканию функции, на которой интеграл Дирихле

$$\int_D |\nabla v(x)|^2 dx$$

достигает наименьшего значения. Эта глубокая идея получила широкое развитие в теории краевых задач для уравнений с частными производными. Но считать приведенное им рассуждение доказательством существования решения мешает отсутствие четкого описания множества, на котором ищется минимум этого функционала, и обоснования его достижимости.

Впервые решение обсуждаемой проблемы было получено в 1870 г. К. Нейманом (мы говорим сейчас о случае трех независимых переменных, $n = 3$; при произвольном n ситуация совершенно аналогична). С помощью представления решений потенциалами К. Нейман доказал существование решений задачи Дирихле и «основной задачи гидродинамики», которую сейчас принято называть задачей Неймана. При этом было получено аналитическое выражение решений этих задач в виде сумм функциональных рядов. Однако метод Неймана (метод последовательных приближений) давал требуемый результат только в случае выпуклых областей (с дважды гладкой границей) и использовал в то время недоказанное и в общем случае неверное утверждение о существовании и совпадении предельных значений изнутри и извне производных по нормали потенциала двойного слоя. Достаточное для справедливости этого утверждения условие было установлено А. М. Ляпуновым только в 1898 году в работе [9] (им же были аккуратно доказаны другие необходимые для применения использованного метода свойства потенциалов простого и двойного слоев). Использование этого результата Ляпунова в доказательстве Неймана привело бы к весьма жестким ограничениям на граничную функцию; не гарантирует выполнение этого свойства даже её непрерывная дифференцируемость.

Первая попытка распространить метод Неймана на случай невыпуклых областей была предпринята в 1896 году А. Пуанкаре [10]. Доказательство Пуанкаре использовало предложенный им ранее (H. Poincaré, *American Journal*, XII, (1889)) специальный метод, названный им "méthode du balayage", и основывалось на допущении, что потенциал двойного слоя имеет правильные нормальные производные на ∂D. Как уже отмечалось выше, это свойство в то время не было доказано и без весьма жестких ограничений на рассматриваемые граничные функции неверно. Кроме того, доказательство Пуанкаре опиралось на утверждение (теорема Пуанкаре), в обосновании которого имелся пробел. В 1899 году А. Корн [11] ликвидировал его в случае звездной области D. В том же году В. А. Стеклов в работе [12], см. также [13], обосновывает справедливость теорем о разрешимости для областей, для которых справедливо обсуждаемое утверждение (теорема Пуанкаре). А в 1901 году С. Заремба [14] доказал справедливость аналогичного теореме Пуанкаре (но более слабого) утверждения для любой области, граница которой является поверхностью Ляпунова. Впоследствии В. А. Стеклов дал независимое доказательство теоремы о существовании решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в области с ляпуновской границей и получил теорему Пуанкаре как следствие теоремы о разрешимости, подробнее по этому поводу см. [15]. При этом от граничной функции u_0 требовалась только непрерывность. Таким образом, необходимое для существования решения условие $u_0 \in C(\partial D)$ является и достаточным.

Не столь изящной является теорема о разрешимости для неоднородного уравнения. Несложно убедиться, что необходимое условие непрерывности правой части не является достаточным. Достаточное для существования решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона условие было установлено в 1882 году О. Гёльдером в его диссертации "Beiträge zur Potentialtheorie" [16]. Им было введено условие на гладкость функции (сейчас оно называется условием Гёльдера и широко используется в различных областях математики) и было доказано, что если правая часть f удовлетворяет этому условию

($f \in C^\alpha(D)$ с некоторым положительным показателем α) и ограничена в D, то объёмный потенциал с плотностью f является решением в области D уравнения Пуассона (1). Условие на f близко к точному. Условие Гёльдера можно ослабить, заменив условием Дини, см., например, монографию [17]. Но отказаться от него, как отмечалось выше, нельзя. Кроме того, имеются аргументы (о них мы поговорим позже), которые делают условие Гёльдера более предпочтительным.

Итак, условия на граничную функцию в теореме Стеклова о разрешимости задачи Дирихле неулучшаемы, условия не правую часть близки к точным. Естественно возникает вопрос об условиях на гладкость границы. Как показал в 1907 году А. Лебег, см. [18], не в любой области существует классическое решение. Насколько можно ослабить условие ляпуновской границы, при котором В. А. Стекловым была доказана теорема о разрешимости? Некоторое ослабление возможно, см., например, [19], но, как легко видеть, существенного ослабления этого условия при использовании потенциалов добиться нельзя. Для дальнейшего продвижения в этом направлении необходимы другие методы и идеи. Окончательный ответ на обсуждаемый вопрос дается в терминах решения Перрона и регулярности граничной точки. Предложенный в 1923 году в работе О. Перрона [20] метод построения решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа отделяет задачу существования решения от изучения его граничного поведения. Он элементарен и опирается только на принцип максимума и доказанную еще Г. Шварцем разрешимость задачи Дирихле в шаре. Идея метода принадлежит А. Пуанкаре (см. отмечавшуюся выше его работу 1889 года); И. Г. Петровский называл его методом Пуанкаре—Перрона, см. [21].

Пусть D — произвольная ограниченная область, а u_0 — заданная на её границе ∂D непрерывная функция. Напомним определение субгармонической функции. Непрерывная в D функция v называется *субгармонической в* D, если для любого шара B, $\bar{B} \subset D$, и любого решения u задачи Дирихле в B с $u(x) \geqslant v(x)$ на ∂B справедливо неравенство $u(x) \geqslant v(x)$ во всем шаре B. Функция, значение которой в каждой точке $\bar{D}$ равны точной верхней грани значений в этой точке непрерывных в замыкании области D субгармонических функций v, удовлетворяющих на границе неравенству $v(x) \leqslant u_0(x)$, называется *решением Перрона*. Доказывается, см., например, [21], что оно является гармонической в D функцией. Кроме того, если решение (классическое) задачи Дирихле существует, то оно, как легко видеть, будет решением Перрона. Поэтому для существования решения необходимо и достаточно, чтобы решение Перрона было непрерывным во всех точках границы (чтобы все точки границы были регулярными).

Можно привести достаточные условия регулярности граничной точки. В частности, в случае двух независимых переменных ($n = 2$) точка x^0 регулярна, если она является концом лежащей вне $\bar{D} \backslash x^0$ кривой (непрерывной), см., например, [21]. При $n = 3$ достаточным условием регулярности точки является возможность коснуться её извне конусом, получающимся вращением вокруг оси x_1 кривой $x_2 = x_1^k$ с некоторым показателем $k > 0$. Как следует из работы А. Лебега [18], заменить степенной порядок касания в вершине конуса экспоненциальным нельзя. Необходимое и достаточное условие регулярности граничной точки формулируется в терминах емкости множества. Оно было получено в 1924 году Н. Винером в работе [22]. С дальнейшим развитием этой тематики можно ознакомиться в работе М. В. Келдыша [23], см. также [17].

Отметим ещё одно важное свойство классических решений. Как отмечалось выше, непрерывность правой части уравнения не гарантирует существование решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона; нужны более жёсткие условия. Достаточно потребовать выполнение условия Гёльдера. В этом случае, как доказано в 1909 году А. Корном, см. [24], производные второго порядка решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона также удовлетворяют условию Гёльдера, причем с тем же показателем.

Аналогичный результат имеет место и для уравнения с достаточно гладкими (непрерывными по Гёльдеру) переменными коэффициентами

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = -f(x), \quad x \in D. \tag{3}$$

В книге О. А. Ладыженской и Н. Н. Уральцевой [25] он справедливо назван «безупречным во всех отношениях». Для простоты мы ограничились случаем уравнения без младших членов. Все результаты справедливы и для общего уравнения при условии неположительности коэффициента при свободном члене. Если этот коэффициент принимает и положительные значения, то накладываются условия малости области.

Теорема о единственности решения задачи (3), (2) немедленно следует из принципа максимума. Сильный принцип максимума для решений такого уравнения был доказан в 1927 году в работе Э. Хопфа [26]. Доказательство существования решения базируется на принадлежащей Корну, см. [27], идее замораживания коэффициентов: уравнения с гладкими коэффициентами можно локально рассматривать как возмущения уравнений с постоянными коэффициентами. Проблема существования и основные свойства решений задачи Дирихле были исследованы в 1929–1932 годах Г. Жиро методом интегральных уравнений, связанным с представлением решения в виде потенциалов, см. [28–30].

Другой метод исследования задачи Дирихле был предложен в тридцатых годах прошлого века Ю. Шаудером в работах [31] и [32]. Основой этого метода являются априорные оценки решений в $C^{2+\alpha}(\bar{D})$ и разрешимость задачи Дирихле для уравнения Пуассона в этом пространстве. Этим методом было доказано, что для любой правой части из $C^{\alpha}(\bar{D})$ существует решение из $C^{2+\alpha}(\bar{D})$. Таким образом, рассматриваемый дифференциальный оператор осуществляет изоморфизм указанных пространств. Возникающее при этом условие $u_0 \in C^{2+\alpha}(\bar{D})$ не является существенным. От него можно отказаться (конечно, граничная функция должна быть непрерывной на ∂D), рассматривая весовые (внутренние) гёльдеровы нормы; подробнее по этому поводу см., например, [17]. Непосредственное, не использующее теорему существования доказательство результата о непрерывности по Гёльдеру вторых производных решения (из $C^2(D)$) было получено в 1932 году Хопфом в работе [33]. Его метод, основанный на идее Корна возмущения уравнения с постоянными коэффициентами, предвосхищает некоторые важные аспекты теории Шаудера. Наличие принципа максимума и разрешимость задачи Дирихле в шаре позволяют распространить метод Перрона на уравнения с переменными коэффициентами и отказаться от условия гладкости границы. При этом точная верхняя грань субрешений не только будет решением уравнения, но и будет принадлежать $C^{2+\alpha}(D)$. Этот метод позволяет получить теорему существования для произвольной непрерывной граничной функции (например, для областей, удовлетворяющих во всех граничных точках условию внешней сферы). Необходимые и достаточные условия на границу области, при которых справедливы теоремы о классической разрешимости, дает доказанная в работе О. А. Олейник [34] теорема об эквивалентности регулярности граничной точки относительно оператора L и ее регулярности относительно оператора Лапласа. Ссылки на дальнейшие результаты в этом направлении можно найти, например, в [17].

2. Обобщённое решение. Введенные С. Л. Соболевым пространства дифференцируемых в обобщенном смысле функций и доказанные им теоремы вложения, см. работы [35–37] и книгу [38], оказались мощным аппаратом исследования краевых задач для дифференциальных уравнений. Пространства Соболева идеально приспособлены, см. [36] и [38], к исследованию смешанных задач и задачи Коши для гиперболических уравнений, для которых в классической постановке требования к гладкости начальных функций растут с увеличением числа независимых переменных. Они оказались весьма удобным аппаратом и в теории уравнений эллиптического типа, см. [38]. Расширение класса дифференцируемых функций и ослабление требований на гладкость решения позволило, в частности, с новых позиций взглянуть на задачу Дирихле для линейного эллиптического уравнения второго порядка и получить совсем простое и прозрачное доказательство её однозначной разрешимости. Именно в таких пространствах удобно рассматривать функционал энергии, на отыскании экстремума которого базируется принцип Дирихле. Отметим, что вариационный подход к задаче Дирихле для уравнения Лапласа в сочетании с методом гильбертова пространства был использован еще в работах Д. Гильберта [39] и А. Лебега [18]. Далее мы ограничимся рассмотрением уравнения в самосопряженной форме без младших членов

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = -f(x). \tag{4}$$

Здесь $(a_{ij}(x))$, $x \in D$ — заданная симметрическая, равномерно по $x \in D$ положительно определенная матрица с измеримыми и ограниченными элементами.

В основе построения пространств Соболева лежит обобщение понятия производной, которое сохраняет следующее важное свойство: производная по некоторой переменной может быть равной нулю в области только в том случае, когда функция не зависит от этой переменной. Пусть D — произвольная область $\mathbb{R}_n$. Функция $v_{x_i} \in L_{1,\mathrm{loc}}(D)$ называется *обобщенной производной функции* $v \in L_{1,\mathrm{loc}}(D)$ *по переменной* x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, если для любой бесконечно дифференцируемой и финитной в D функции η $(\eta \in C_0^\infty(D))$ справедливо равенство

$$\int_D v_{x_i}(x)\eta(x)dx = -\int_D v(x)\frac{\partial \eta}{\partial x_i}(x)dx.$$

Это определение допускает распространение на обобщенные функции. По этому поводу см., например, книги В. С. Владимирова [40] и [41]; там же имеются приложения теории обобщенных функций к уравнениям математической физики.

Множество функций из $L_2(D)$, у которых существуют принадлежащие $L_2(D)$ обобщенные производные по всем x_i, $i = 1, 2, \dots, n$, называется пространством $W_2^1(D)$. Оно является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(v, w)_{W_2^1(D)} = \int_D [(\nabla v(x), \nabla w(x)) + v(x)w(x)]\,dx. \tag{5}$$

Если граница рассматриваемой ограниченной области является гладкой, то множество сужений на $\bar{D}$ бесконечно дифференцируемых в $\mathbb{R}_n$ функций плотно в $W_2^1(D)$; по поводу областей с негладкими границами см., например, книги [17, 25, 42] и [43]. Замыкание в $W_2^1(D)$ множества $C_0^\infty(D)$ обозначается через $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$. В силу оценки нормы в $L_2(D)$ функции из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ через её интеграл Дирихле билинейная форма

$$(v, w)_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)} = \int_D (\nabla v(x), \nabla w(x))dx \tag{6}$$

является эквивалентным скалярным произведением на $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$.

Для любой гладкой поверхности Γ определяется след $v|_\Gamma$ на Γ функции v из $W_2^1(D)$ — предел в $L_2(\Gamma)$ последовательности сужений на Γ членов сходящейся к v в $W_2^1(D)$ последовательности гладких функций. Множество следов на Γ всех функций из $W_2^1(D)$ образует гильбертово пространство $W_2^{1/2}(\Gamma) \subset L_2(\Gamma)$. Оператор вложения, ставящий в соответствие функции v из $W_2^1(D)$ ее след на Γ, является вполне непрерывным оператором из $W_2^1(D)$ в $L_2(\Gamma)$. Если граница ∂D ограниченной области D является гладкой поверхностью, то справедлив следующий критерий: для принадлежности функции $v \in W_2^1(D)$ подпространству $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ необходимо и достаточно, чтобы ее след на ∂D был равен нулю, см., например, [44].

Вариационный подход немедленно приводит к обобщенной постановке задачи Дирихле для уравнения (4). В случае области (ограниченной) с гладкой границей минимум функционала энергии

$$\int_D \left(\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} a_{ij}(x) \frac{\partial v(x)}{\partial x_j} - 2f(x)v(x) \right) dx \tag{7}$$

ищется на множестве функций из $W_2^1(D)$, след которых на границе совпадает с заданной граничной функцией u_0; здесь $f \in L_2(D)$. Конечно, при этом необходимо требовать, чтобы $u_0 \in W_2^{1/2}(\partial D)$. Возьмем некоторое продолжение граничной функции на D и будем обозначать его тем же символом u_0, $u_0 \in W_2^1(D)$. Тогда множество функций, на котором ищется экстремум функционала (7), можно записать в виде

$$\{v \in W_2^1(D) : v - u_0 \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)\}.$$

При такой записи отпадает необходимость в условии гладкости границы; при этом функцию u_0 следует считать заданной на всей области D и принадлежащей пространству $W_2^1(D)$; в этом случае также будем писать $u_0 \in W_2^{1/2}(\partial D)$.

Легко видеть, что необходимым условием достижения на функции u экстремума функционала энергии является выполнение следующего интегрального тождества

$$\int_D \left(\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} a_{ij}(x) \frac{\partial \eta}{\partial x_j} \right) dx = \int_D f \eta dx \quad \text{для всех} \quad \eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D). \tag{8}$$

Так как множество бесконечно дифференцируемых и финитных в D функций плотно в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$, то (8) эквивалентно уравнению (4), понимаемому как равенство обобщённых функций.

Определение 2. Функция u из $W_2^1(D)$, удовлетворяющая тождеству (8) и условию $u - u_0 \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$, называется *обобщенным решением* задачи Дирихле для уравнения (4) с граничным условием (2).

Можно расширить и множество правых частей f уравнения (4): в качестве f можно брать произвольный линейный ограниченный функционал на пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ или его продолжение на $W_2^1(D)$; в обоих случаях будем писать $f \in W_2^{-1}(D)$. В силу теоремы Ф. Рисса об общем виде линейного функционала произвольный линейный непрерывный функционал на $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ задается равенством

$$\langle f, \eta \rangle = -\int_D (F, \nabla \eta) dx, \quad \eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$$

с некоторым векторным полем $F \in (L_2(D))^n$; $f = \operatorname{div} F$. Если вместо скалярного произведения (6) взять эквивалентное ему скалярное произведение (5), то получим представление

$$\langle f, \eta \rangle = -\int_D \left[(G, \nabla \eta) + g\eta \right] dx, \quad \eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D),$$

$G \in (L_2(D))^n$, $g \in L_2(D)$, которое даёт продолжение функционала f на $W_2^1(D)$. Более подробную информацию по этому поводу можно найти, например, в [45].

Так как определенный равенством

$$\langle f_0, \eta \rangle = \int_D \left(\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial u_0}{\partial x_i} a_{ij}(x) \frac{\partial \eta}{\partial x_j} \right) dx$$

функционал f_0 является ограниченным функционалом на $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ (принадлежит пространству $W_2^{-1}(D)$), задача (4), (2) немедленно сводится к случаю равной нулю граничной функции (и правой части $f - f_0$). Но тогда искомое решение $(u - u_0)$ принадлежит пространству $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$, а левая часть интегрального тождества является эквивалентным скалярным произведением в

$\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$. Однозначная разрешимость задачи и естественная оценка решения немедленно следуют из теоремы Ф. Рисса об общем виде линейного ограниченного функционала. Таким образом, и для обобщенных решений имеет место теорема об изоморфизме.

В случае общего эллиптического уравнения второго порядка задача немедленно сводится к операторному уравнению в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$. В силу компактности оператора вложения $W_2^1(D)$ в $L_2(D)$, см. [46] и [47], оператор в этом уравнении вполне непрерывен и по теореме Фредгольма существование решения следует из утверждения о его единственности.

Если потребовать более жестких условий на гладкость коэффициентов и правую часть уравнения, то и обобщенное решение будет более гладким. А с помощью теорем вложения Соболева можно добиться, чтобы оно стало классическим (конечно, для этого нужны дополнительные условия и на граничную функцию). Подробнее по этому поводу см., например, [44]. Мы не будем останавливаться на многочисленных результатах, относящихся к исследованию свойств обобщенных решений эллиптических уравнений. Отметим только известные работы Э. де Джорджи [48] и Дж. Нэша [49], см. также [50], в которых без дополнительных условий на коэффициенты (они только измеримы и ограничены) был получен неожиданный результат о непрерывности по Гёльдеру внутри рассматриваемой области обобщенного решения однородного (с $f = 0$) уравнения (4). В работе автора [51] «интегральное» свойство принадлежности решений пространству $W^1_{2,\mathrm{loc}}(D)$ (пространству W_2^1 на любом лежащем в D компакте) и «точечное» свойство его внутренней непрерывности по Гёльдеру были объединены в терминах принадлежности специальному функциональному пространству, определяемому в терминах конечности интегралов от квадрата разности значений функции в различных точках по специальному классу мер. Причем эта теорема не является чисто интерполяционной: среди полученных таким образом промежуточных свойств имеются и свойства, которые не следуют из крайних. Отметим, что теорема де Джорджи не может быть получена из теорем вложения: без дополнительных условий на коэффициенты уравнения решение не обязано принадлежать пространству $W^1_{p,\mathrm{loc}}(D)$ с $p > 2$. Для однозначной разрешимости задачи Дирихле в $W_p^1(D)$ необходимы, кроме того, и условия на область. По поводу задачи Дирихре в $W_p^1(D)$ см. работы В. А. Кондратьева и Ю. А. Алхутова [52] и [53]; там же имеются и соответствующие примеры. Более полное изложение результатов о свойствах решений эллиптических уравнений (в том числе теоремы о гёльдеровой непрерывности вплоть до границы и доказательство этого свойства для решений общего эллиптического уравнения) можно найти в книгах [25] и [17], см. также работу [54].

Таким образом, теорема об однозначной разрешимости задачи Дирихле для эллиптического уравнения (4) справедлива для любой ограниченной области, произвольных $u_0 \in W_2^{1/2}(\partial D)$ и $f \in W_2^{-1}(D)$. Существенно, что от коэффициентов достаточно требовать только измеримость и ограниченность. Это позволяет переносить некоторые свойства линейных уравнений на квазилинейные, см., например, [25] и [17].

3. Решение из $W^1_{2,\mathrm{loc}}(D)$. Как уже отмечалось в начале статьи, понятие обобщенного решения имеет один довольно существенный недостаток. Оно не является в буквальном смысле обобщением понятия классического решения: не любая непрерывная на границе функция является следом функции из $W^1_2(D)$ (пространство $C(\partial D)$ не содержится в $W^{1/2}_2(\partial D)$). В связи с этим возникает потребность в новом определении решения, в расширении класса граничных функций. Естественным пространством, содержащем $C(\partial D)$ и $W^{1/2}_2(\partial D)$, является пространство $L_2(\partial D)$.

Как было показано в 1960 году И. Нечасом, см. [55], оператор, ставящий в соответствие граничной функции u_0 решение u задачи Дирихле (для простоты ограничимся сейчас случаем однородного уравнения) и рассматриваемый как оператор из $L_2(\partial D)$ в $L_2(D)$, является ограниченным оператором. Следовательно, его замыкание определено на всем $L_2(\partial D)$. Недостатком такой схемы является, прежде всего, отсутствие явного определения решения. Чтобы проверить, является ли рассматриваемая функция решением задачи, нужно определить, является ли она пределом обобщенных решений. Кроме того, пространство $L_2(D)$, в котором находится область значений этого оператора, слишком широкое. Явное описание получаемой при таком расширении постановки задачи Дирихле и вариационный метод требуют существования у решения производных (обобщённых).

В случае дважды гладкой границы такое определение решения было предложено В. П. Михайловым в работе [2].

Определение 3. Принадлежащая пространству $W^1_{2,\mathrm{loc}}(D)$ функция u называется *решением задачи Дирихле из* $W^1_{2,\mathrm{loc}}(D)$, если она удовлетворяет тождеству (8) для всех бесконечно дифференцируемых и финитных в D функций η (является решением уравнения (4) в пространстве обобщенных функций $\mathscr{D}'(D)$) и граничному условию (2) в следующем смысле:

$$\int_{\partial D} (u(x-\delta\nu(x)) - u_0(x))^2\, ds \to 0 \quad \text{при } \delta \to +0; \tag{9}$$

здесь и далее $\nu(x)$ — единичный вектор внешней нормали к ∂D в точке $x \in \partial D$. Очевидно, что и классическое и обобщенное решения являются решениями из $W^1_{2,\mathrm{loc}}(D)$.

Отметим, что для обобщённого решения (из $W^1_2(D)$) левая часть (9) является $o(\delta)$ при $\delta \to 0$. Такое требование принятия граничного значения с заданным порядком представляется излишним. Ведь мы не требуем в определении классического решения, чтобы оно принадлежало пространству Гёльдера $C^{1/2}$ в замыкании области.

При условии гладкости коэффициентов a_{ij} ($a_{ij} \in C^1(\bar{D})$) в [2] доказано следующее утверждение.

Теорема Михайлова. *Для любой u_0 из $L_2(\partial D)$ и любой $f \in L_{2,\mathrm{loc}}(D)$, удовлетворяющей условию*

$$\int_D r^\theta(x) f^2(x) dx < \infty,$$

в котором $r(x) = \mathrm{dist}(x, \partial D)$ — расстояние от точки $x \in D$ до границы рассматриваемой области, а $\theta < 3$, задача Дирихле (4), (2) однозначно разре-

шима и для ее решения и справедлива оценка

$$\int_D r(x)|\nabla u|^2 dx + \sup_{\delta\in(0,\delta_0)} \int_{\partial D} u^2(x-\delta\nu(x))ds \leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{const}\left[\|u_0\|^2_{L_2(\partial D)} + \int_D r^\theta(x) f^2(x)dx\right]$$

с достаточно малым $\delta_0 > 0$.

Для общего уравнения второго порядка (с непрерывными коэффициентами при младших членах) теорема о разрешимости имеет такой же вид, как и для задачи в $W_2^1(D)$: собственные значения и соответствующие им собственные подпространства совпадают (см. [2]).

Отметим, что обсуждаемая теорема о разрешимости задачи Дирихле тесно связана (и идейно, и по используемой в доказательстве технике) с результатами о граничном поведении решений уравнения, см. работу [56] и приведенную в ней литературу. Истоки этого направления лежат в классических результатах Ф. Рисса, [57], и Литтлвуда—Пэли, [58–60], о граничном поведении аналитических функций.

Обеспечивающее взаимную однозначность (при всех достаточно малых положительных значениях параметра δ) отображения $x \leftrightarrow x - \delta\nu(x) \in D$ из (9) условие $\partial D \in C^2$ можно ослабить. Достаточно потребовать, чтобы $\partial D \in C^1$ и нормаль ν удовлетворяла условию Гёльдера, см. [61], или она была непрерывна по Дини:

$$\|\nu(x) - \nu(y)\| \leqslant \omega(\|x-y\|), \quad x \in \partial Q, \quad y \in \partial Q \tag{10}$$

с такой монотонной функцией ω, для которой

$$\int_0 \frac{\omega(t)}{t} dt < \infty,$$

см. [3]. При этом принятие решением своего граничного значения (будем говорить о принятии граничного значения в L_p, $p > 1$; конечно, при этом и граничная функция u_0 берётся из L_p) следует формулировать в локальных терминах:

для каждой точки $x^0 \in \partial D$ найдётся такая окрестность $V_{x^0} \subset \partial D$, что

$$\int_{V_{x^0}} \left(u(x-\delta\nu(x^0)) - u_0(x)\right)^p ds \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to +0. \tag{11}$$

Обсуждать точность условия (10) вряд ли имеет смысл. По-видимому, ситуация аналогична случаю классического решения, в котором мы понимали бы граничное значение как предел решения по нормали. Для серьёзного исследования этого вопроса нужны новые идеи. Но сначала нужно изменить определение принятия граничного значения; без существования нормали к границе условие (11) нельзя сформулировать. Мы вернёмся ещё к этому вопросу в последнем параграфе.

В работе автора [3] были ослаблены (при $p = 2$) и условия на коэффициенты уравнения. Достаточно предполагать, что они измеримы и ограничены в D и непрерывны по Дини на границе. То есть их значения можно так изменить на множестве меры нуль, что будет выполняться неравенство

$$\|a_{i,j}(x) - a_{i,j}(y)| \leqslant \omega(\|x-y\|), \quad i,j = 1,\dots,n, \quad x \in \partial Q, \quad y \in Q; \tag{12}$$

не ограничивая общность, функцию ω можно считать такой же, как и в (10). По-видимому, условие (12) не является точным. Но совсем отказаться от дополнительного (к измеримости и ограниченности) условия на коэффициенты уравнения нельзя; не будет справедлива теорема о единственности, соответствующий пример приведен в [3]. Ослабление требований к принятию граничного значения приводит к ужесточению условий на коэффициенты на границе. Но каковы точные условия на коэффициенты — неизвестно. Условия (10) и (12) мы всюду далее будем считать выполненными.

Обсудим теперь условия на правую часть уравнения. Они более слабые, чем для задачи в $W_2^1(D)$; допускается более сильный рост правой части вблизи границы.

Прежде всего приведем определение решения в случае $u_0 \in L_p(\partial D)$. Функцию u будем называть *решением задачи Дирихле* (4), (2) *с граничным значением из* L_p, если она принадлежит $W^1_{2,\mathrm{loc}}(D)$, удовлетворяет тождеству (8) для всех бесконечно дифференцируемых и финитных в D функций η (уравнения (4) выполняются в смысле равенства обобщенных функций), её следы на любой лежащей в D замкнутой гладкой $(n-1)$-мерной поверхности Γ принадлежат $L_p(\Gamma)$ и выполнено граничное условие (2) в смысле (11). Конечно, условие принадлежности следов L_p нужно только при больших значениях p. Чтобы избежать этого дополнительного условия, естественно было бы в определении решения вместо принадлежности решения пространству $W^1_{2,\mathrm{loc}}(D)$ требовать его принадлежности $W^1_{p,\mathrm{loc}}(D)$. Но это потребовало бы дополнительных условий на коэффициенты уравнения. При сделанных предположениях в случае $p > 2$ решение может не существовать, а для $p \in (1,2)$ не верно утверждение о единственности. Не помогает и условие гладкости коэффициентов на границе, см. [62].

Так как искомое решение $u \in W^1_{2,\mathrm{loc}}(D)$, правая часть уравнения должна принадлежать $W^{-1}_{2,\mathrm{loc}}(D)$. Следовательно, она представляется в виде

$$f = g - \operatorname{div} G,$$

где $G \in (L_{2,\mathrm{loc}}(D))^n$, $g \in L_{2,\mathrm{loc}}(D)$.

Остановимся сначала на случае $G = 0$ (то есть $f = g$). Будем предполагать, что $f \in L_{p,\mathrm{loc}}(D)$ и найдется такая монотонно неубывающая, удовлетворяющая условию Дини функция ω $\left(\int_0 \frac{\omega(t)}{t} dt < \infty\right)$, что

$$\int_D \frac{r(x)^{2p-1}}{[\omega(r(x))]^{p-1}} |f(x)|^p dx < \infty. \tag{13}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (10) *и* (12). *Тогда для любой граничной функции* u_0 *из* $\in L_p(\partial D)$ *и любой правой части* f *из* $L_{2,\mathrm{loc}}(D) \cap$

$L_{p,\mathrm{loc}}(D)$, удовлетворяющей условию (13), *существует решение задачи Дирихле. Это решение единственно и для него справедлива естественная оценка*

$$\sup_{\xi>0}\left(\frac{1}{\xi}\int_{\{x\in D:\xi<r(x)<2\xi\}}|u(x)|^p dx\right)+\int_D r(x)|u(x)|^{p-2}|\nabla u(x)|^2 dx\leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{const}\left[\int_{\partial D}|u_0(x)|^p dS+\int_D\frac{r(x)^{2p-1}}{[\omega(r(x))]^{p-1}}|f(x)|^p dx\right]. \quad (14)$$

В случае $p=2$ доказательство этого утверждения можно найти в работе [56]. При произвольном $p>1$ единственность решения и его существование для $f\in L_2(D)\cap L_p(D)$ было доказано в работе [62]. В общем случае этот результат является новым.

Оценка (14) теоремы 1 позволяет расширить при $p\in(1,2)$ класс правых частей, для которых можно гарантировать существование решения задачи Дирихле и отказаться от условия $f\in L_{2,\mathrm{loc}}(D)$. Но это приведет к отказу от требования $u\in W^1_{2,\mathrm{loc}}(D)$ в определении решения, без которого неверна теорема единственности. Естественно возникает задача отыскания более широкого класса единственности, содержащего все решения задачи Дирихле для уравнений вида (4) с правыми частями из $L_{p,\mathrm{loc}}(D)$, удовлетворяющими условию (13).

Рассмотрим теперь общий случай $f=g-\operatorname{div}G$, $G\in(L_{2,\mathrm{loc}}(D))^n$, $g\in L_{2,\mathrm{loc}}(D)$. Будем предполагать, что функция g удовлетворяет условию

$$\int_D\frac{r(x)^{2p-1}}{[\omega(r(x))]^{p-1}}|g(x)|^p dx<\infty,$$

а векторное поле G — условию

$$\int_D\frac{r(x)}{\omega(r(x))}|G(x)|^2 dx<\infty \quad \text{при} \quad 1<p\leqslant 2$$

и условию

$$\int_D\left[\frac{r(x)}{\omega(r(x))}\right]^{p-1}|G(x)|^p dx<\infty \quad \text{при} \quad p>2.$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (10) и (12). *Тогда для любой граничной функции u_0 из $\in L_p(\partial D)$ и любой правой части $f=g-\operatorname{div}G$, где g и G удовлетворяют приведённым условиям, существует решение задачи Дирихле* (4), (2). *Решение этой задачи единственно.*

Для решения справедлива аналогичная (14) оценка; в её правую часть следует добавить соответствующее G слагаемое.

В случае $p=2$ теорема 2 была доказана в работе [56]. Её доказательство в общем случае $p>1$ будет опубликовано в следующей работе автора.

Можно и далее ослаблять требования гладкости в определении решения: рассматривать решения из $W^s_2(D)$ с $s\leqslant 1$ или даже из $\mathscr{D}'$. Но это неизбежно приводит к более ограничительным условиям на коэффициенты уравнения (чем менее гладким является решение, тем более гладкой должна быть функция, на которую умножается его производная). Если коэффициенты уравнения (4) только измеримы и ограничены внутри области D, то необходимо предполагать существование обобщённых производных решения. Более того, и использованный выше показатель суммирования производных ($p = 2$) является в следующем смысле оптимальным. Как отмечалось выше, при $u \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(D)$ с $p > 2$ решения не существует, а при $p < 2$ нет теоремы единственности.

Возможны различные обобщения и определения принятия решением своего граничного значения. Например, следуя И. И. Привалову, см. [63], можно потребовать, чтобы для почти всех точек границы существовал предел решения по некасательным направлениям и он совпадал со значением граничной функции. В этом случае, как легко видеть, без дополнительного условия на решение не справедлива теорема единственности. Как показано в [63], классом единственности такой задачи для уравнения Лапласа (такой же результат справедлив и для уравнения (4)) является пространство $L_\infty(D)$. Но тогда и граничная функция должна быть ограниченной. Нетрудно показать, что в этом случае решение будет принадлежать и пространству $(n-1)$-мерно непрерывных функций $C_{n-1}(\bar{D})$, о котором мы будем говорить в следующем параграфе. Но тогда оно будет и решением в обсуждаемом в этом параграфе смысле и мы не получим ничего нового. Можно существенно расширить класс допустимых граничных функций, считая, что граничное значение является пределом в смысле обобщенных функций, см., например, [64]. Но тогда и граница должна быть бесконечно дифференцируемой.

4. $(n-1)$-мерно непрерывное решение. Основным результатом работы автора [3] является доказательство свойства $(n-1)$-мерной непрерывности решения задачи Дирихле. В нем, как и в классическом определении непрерывности, все направления равноправны. С помощью этого свойства можно дать другое, более близкое к классическому определение решения из $W^1_{2,\mathrm{loc}}(D)$. В этом определении роль пространства непрерывных функций играет пространство $(n-1)$-мерно непрерывных функций $C_{n-1}(\bar{Q})$, в котором вместо значений функции в точках рассматриваются её следы на мерах из специального класса.

Рассмотрим неотрицательные борелевские меры μ в $\mathbb{R}_n$ с носителем в $\bar{D}$, удовлетворяющие следующему условию: существует такая постоянная $C = C(\mu)$, что для всех $x^0 \in \bar{D}$ и всех $r > 0$ выполняется неравенство

$$\mu(B_{x^0}(r)) \leqslant Cr^{n-1}, \tag{15}$$

в котором $B_{x^0}(r)$ — шар с центром в точке x^0 радиуса r. Наименьшую из постоянных C, с которыми выполнено условие (15), будем называть нормой меры μ и обозначать $\|\mu\|$. Заметим, что условие (15) близко к определению меры Карлесона, см. [4–6], но не совпадает с ним (класс мер Карлесона шире).

Пусть μ и υ — удовлетворяющие (15) единичные меры ($\|\mu\| < \infty$, $\|\upsilon\| < \infty$). И пусть ϕ — мера в $\mathbb{R}_{2n}$, проекция которой на пространство первых n переменных совпадает с μ, а на пространство остальных n переменных совпадает с υ:

$$\phi(G \times \mathbb{R}_n) = \mu(G), \quad \phi(\mathbb{R}_n \times G) = \upsilon(G)$$

для всех борелевских множеств $G \subset \mathbb{R}_n$; будем говорить, что ϕ соединяет меры μ и υ.

Зафиксируем некоторое число $p > 1$. Принадлежащую пространствам $L_p(\bar{D};\mu)$ для всех мер μ из рассматриваемого класса функцию v будем называть $(n-1)$*-мерно непрерывной функцией со значениями в* L_p (или просто $(n-1)$-мерно непрерывной функцией), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех мер μ и υ из рассматриваемого класса и любой соединяющей их меры ϕ, удовлетворяющих условию

$$\iint_{\mathbb{R}_{2n}} |x-y| d\phi(x,y) < \delta$$

(расстояние между мерами μ и υ вдоль ϕ меньше δ), выполняется оценка

$$\frac{1}{\|\mu\| + \|\upsilon\|} \iint_{\bar{D}\times\bar{D}} |v(x) - v(y)|^p d\phi(x,y) < \varepsilon$$

(значения функции v на μ и υ вдоль ϕ отличаются меньше, чем на $\varepsilon^{1/p}$). Множество всех $(n-1)$-мерно непрерывных функций со значениями в L_p будем обозначать через $C_{n-1,p}(\bar{D})$. Оно является банаховым пространством с нормой

$$\|v\|^2_{C_{n-1}(\bar{D})} = \sup_{\mu} \frac{1}{\|\mu\|} \int_{\bar{D}} |v(x)|^p d\mu \tag{16}$$

и множество гладких функций плотно в нем. $(n-1)$-мерно непрерывные функции имеют следы $v|_\Gamma$ на любом множестве положительной $(n-1)$-мерной меры Хаусдорфа. А множество их следов на гладкой $(n-1)$-мерной поверхности Γ (на мере Лебега на этой поверхности) совпадает с $L_p(\Gamma)$. Понятие $(n-1)$-мерно непрерывных функций было введено в работе автора [3]. Там же приведены другие определения $(n-1)$-мерной непрерывности, доказана их эквивалентность и установлены свойства (в том числе и приведенные выше) таких функций.

Определение 4. Функция u называется $(n-1)$*-мерно непрерывным решением задачи Дирихле* (4), (2) (с $u_0 \in L_p(\partial D)$), если

– $u \in W^1_{2,\mathrm{loc}}(D)$ и удовлетворяет (в $\mathscr{D}'$) уравнению (4);

– $u \in C_{n-1,p}(\bar{D})$ и ее след на ∂D равен u_0.

Отметим, что само определение $(n-1)$-мерно непрерывного решения не требует выполнения жёстких условий на границу области. Для того чтобы все входящие в него понятия были определены, нужно только существование следа на ∂D функции из $C_{n-1,p}(\bar{D})$. Но и от этого требования можно отказаться. Для этого, как и в случае определения обобщённого решения, следует определить подпространство $\overset{\circ}{C}_{n-1,p}(\bar{D})$, являющееся замыканием в $C_{n-1,p}(\bar{D})$ (с нормой (16)) множества непрерывных и финитных в D функций. Граничную функцию u_0 следует считать заданной во всей области D ($u_0 \in C_{n-1,p}(\bar{D})$) и в определении решения требовать принадлежности $u-u_0$ подпространству $\overset{\circ}{C}_{n-1,p}(\bar{D})$. Однако разрешимость задачи Дирихле доказана только для случая гладкой границы, предполагается выполнение условия (10). Таким образом, ситуация похожа на случай классического решения:

если искать решение методом потенциалов, то нужны требования к гладкости границы. Освободиться от них можно, привлекая принципиально другой метод — метод Перрона. По-видимому, и в случае решения из $C_{n-1,p}(\bar{D})$ возможно значительное расширение класса рассматриваемых областей, но для этого нужны новые идеи. Этот вопрос требует серьёзного изучения.

Обсудим теперь вопрос о разрешимости задачи Дирихле в приведённой постановке. Как и ранее, будем предполагать, что коэффициенты уравнения непрерывны по Дини на границе — удовлетворяют условию (12). Без этого условия решение не обязано быть единственным даже в «гильбертовом» случае $p = 2$, соответствующий пример имеется в [3]; не помогает и дополнительное (по сравнению с определением 3) требование к поведению решения вблизи границы. Утверждение о единственности такого решения для $p = 2$ было доказано ещё в [3], а в общем случае $p > 1$ немедленно следует из доказанного автором в работе [65] значительно более сильного и сложного утверждения, являющегося распространением на рассматриваемую ситуацию теоремы Л. Карлесона об L_p-оценках аналитических функций, см. [4] и [5]. Для гармонических функций такая теорема была доказана Л. Хёрмандером, см. [6].

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (10) *и* (12), *u — решение задачи Дирихле для однородного уравнения* (4) (*с* $f = 0$) *и пусть* μ — *мера в* $\mathbb{R}_n$ *с носителем в* $\bar{D}$. *Тогда для того чтобы оценка*

$$\iint_Q |u|^p d\mu \leqslant \mathrm{const} \int_{\partial Q} |u_0|^p dS \tag{17}$$

была справедлива для всех граничных функций u_0 *из* $L_p(\partial Q)$, *необходимо и достаточно, чтобы мера* μ *удовлетворяла следующему условию: существует такая постоянная* $C = C(\mu)$, *что для всех* $x^0 \in \partial D$ *и всех* $r > 0$ *выполняется неравенство*

$$\mu(B_{x^0}(r)) \leqslant Cr^{n-1}.$$

Отметим, что условие справедливости оценки (17) не зависит ни от p, ни от эллиптического уравнения вида (4). В частности, для её справедливости для рассматриваемого уравнения и взятого p необходимо и достаточно, чтобы она была справедлива для всех гармонических функций с граничными значениями из $L_2(\partial Q)$.

Последняя теорема содержит в себе, в частности, свойство непрерывности внутри области решений однородного уравнения. В близких терминах можно объединить принадлежность решения $W^1_{2,\mathrm{loc}}(D)$ и установленную Э. де Джорджи и Дж. Нэшем внутреннюю непрерывность решения по Гёльдеру и усилить эти свойства. По этому поводу см. [51] и [66].

Из теоремы 3 легко следует существование решения из $C_{n-1,p}(\bar{D})$ для однородного уравнения. Случай неоднородного уравнения более или менее полно исследован только для $p = 2$.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (10) *и* (12). *Тогда для любой* $u_0 \in L_2(\partial D)$ *и любой* $f = g - \operatorname{div} G$ *с такими* $G \in (L_{2,\mathrm{loc}}(D))^n$ *и* $g \in L_{2,\mathrm{loc}}(D)$, *что* $r^{3/2}(x)|\ln r(x)|^{3/4}|g(x)| \in L_2(D)$, $r^{1/2}(x)|\ln r(x)|^{3/4}|G(x)| \in L_2(D)$, *существует решение задачи Дирихле* (4), (2). *Это решение единственно и для него* *справедлива оценка*

$$\int_D r(x)|\nabla u|^2 dx + \|v\|^2_{C_{n-1}(\bar D)} \leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{const}\Big[\|u_0\|^2_{L_2(\partial D)} + \|r^{3/2}(x)|\ln r(x)|^{3/4} g(x)\|_{L_2(D)} +$$
$$+ \|r^{1/2}(x)|\ln\ r(x)|^{3/4}|G(x)|\|_{L_2(D)}\Big].$$

Доказательство этой теоремы можно найти в совместной работе В. П. Михайлова и автора [56]. Для общего эллиптического уравнения второго порядка разрешимость задачи Дирихле в обсуждаемой постановке была исследована В. Ж. Думаняном, см. [67] и [68].

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 13–01–00065-а).

ORCID
Анатолий Константинович Гущин: http://orcid.org/0000-0001-8600-6021

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гущин А. К. О задаче Дирихле для эллиптического уравнения / *Четвертая международная конференция «Математическая физика и ее приложения»*: материалы конф.; ред. чл.-корр. РАН И. В. Волович; д.ф.-м.н., проф. В. П. Радченко. Самара: СамГТУ, 2014. С. 136.
2. Михайлов В. П. О задаче Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка // *Диффер. уравн.*, 1976. Т. 12, № 10. С. 1877–1891.
3. Гущин А. К. О задаче Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка // *Матем. сб.*, 1988. Т. 137(179), № 1(9). С. 19–64.
4. Carleson L. An interpolation problem for bounded analytic functions // *Amer. J. Math.*, 1958. vol. 80, no. 4. pp. 921–930. doi: 10.2307/2372840.
5. Carleson L. Interpolation by bounded analytic functions and the corona problem // *Ann. Math.*, 1962. vol. 76, no. 3. pp. 547–559. doi: 10.2307/1970375.
6. Hörmander L. L^p-estimates for (pluri-) subharmonic functions // *Math. Scand.*, 1967. vol. 20. pp. 65–78, http://www.mscand.dk/article/view/10821/8842.
7. Никольский Н. К. *Лекции об операторе сдвига.* М.: Наука, 1980.
8. Garnett J. B. *Bounded analytic functions* / Pure and Applied Mathematics. vol. 96. New York etc.: Academic Press, 1981. xvi+467 pp.. doi: 10.1016/s0079-8169(08)61051-x ; Garnett J. B. *Bounded analytic functions* / Graduate Texts in Mathematics. vol. 236. New York: Springer, 2007. 433 pp.. doi: 10.1007/0-387-49763-3.
9. Liapounoff A. Sur certaines questions qui se rattachent au problème de Dirichlet // *Journ. de Math.*(5), 1898. vol. 4. pp. 241–311.
10. Poincaré H. La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet // *Acta Mathematica*, 1897. vol. 20, no. 1. pp. 59–142. doi: 10.1007/bf02418028.
11. Korn A. *Lehrbuch der Potentialtheorie. Allgemeine Theorie des Potentials und der Potentialfunctionen im Raume.* Berlin: Ferd. Dümmler, 1899. xiv+417 pp.
12. Stekloff W. Sur les problèmes fondamentaux de la Physique mathématique // *C. R. Acad. Sci.*, Paris, 1899. vol. 128. pp. 588–591.
13. Stekloff W. Les méthodes générales pour résoudre les problmes fondamentaux de la physique mathématique // *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2 série [Toulouse Ann. (2)], 1900. vol. 2. pp. 207–272. doi: 10.5802/afst.170.
14. Zaremba S. Sur la thórie de l'équation de Laplace et les méthodes de Neumann et de Robin // *Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie* [Krakauer Anzeiger], 1901. pp. 171–189.

15. Стеклов В. А. *Основные задачи математической физики*, 2-е изд. / ред. В. С. Владимиров. М.: Наука, 1983.
16. Hölder O. *Beiträge zur potentialtheorie*: Inaugural-Dissertation zur Erlangung der Doctorwürde der naturwissenschaftlichen Facultät zu Tübingen. Stuttgart: Druck J. B. Metzlersche Buchdruckerei, 1882. iv+71 pp., Internet Archive Identifier: bietrgezurpoten00hlgoog.
17. Gilbarg D., Trudinger N. S. *Elliptic partial differential equations of second order* / Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. vol. 224. Berlin etc.: Springer-Verlag, 1983. xiii+513 pp.. doi: 10.1007/978-3-642-61798-0.
18. Lebesgue H. Sur le problème de Dirichlet // *C. R. Acad. Sci.*, Paris, 1907. vol. 144. pp. 316–318, 622–623 ; Lebesgue H. Sur le problème de Dirichlet // *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 1907. vol. 24. pp. 371–402. doi: 10.1007/BF03015070.
19. Гюнтер Н. М. *Теория потенциала и ее применения к основным задачам математической физики.* М.: Гостехиздат, 1953.
20. Perron O. Eine neue Behandlung der ersten Randwertaufgabe für $\Delta u = 0$ // *Math. Z.*, 1923. vol. 18. pp. 42–54. doi: 10.1007/BF01192395.
21. Петровский И. Г. *Лекции об уравнениях с частными производными.* М.: ГИТЛ, 1953.
22. Wiener N. The Dirichlet problem // *Mass. J. of Math.*, 1924. vol. 3. pp. 129–146.
23. Келдыш М. В. О разрешимости и устойчивости задачи Дирихле // *УМН*, 1941. №8. С. 171–231.
24. Korn A. *Über Minimalflächen, deren Randkurven wenig von ebenen Kurven abweichen.* Berlin: Königl. Akademie der Wissenschaften, 1909. 37 pp.
25. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.* М.: Наука, 1973.
26. Hopf E. Elementare Bemerkungen über die Lösungen partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus // *Sitz. Ber. Preuss Akad. Wissensch. Berlin. Math.-Phys. Kl.* **19**, 1927. pp. 147–152 ; Hopf E. Elementare Bemerkungen über die Lösungen partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus / *Selected works of Eberhard Hopf. With commentaries*; eds. Cathleen S. Morawetz, James B. Serrin and Yakov G. Sinai. Providence, RI: American Mathematical Society, 2002. pp. 3–8.
27. Korn A. Zwei Anwendungen der Methode der sukzessiven Annäherungen / *Mathematische Abhandlungen Hermann Amandus Schwarz: zu seinem fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 6. August 1914 (German Edition).* Berlin: Schwarz Festschrift, 1914. pp. 215–229.
28. Giraud G. Sur le problème de Dirichlet généralisé (deuxième mémoire) // *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.*, III. Ser., 1929. vol. 46. pp. 131–245.
29. Giraud G. Sur certains problèmes non linéaires de Neumann et sur certains problèmes non linéaires mixtes // *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.*, III. Ser., 1932. vol. 49. pp. 1–104.
30. Giraud G. Sur certains problèmes non linéaires de Neumann et sur certains problèmes non linéaires mixtes // *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.*, III. Ser., 1932. vol. 49. pp. 245–309.
31. Schauder J. Über lineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung // *Math. Z.*, 1934. vol. 38. pp. 257–282. doi: 10.1007/BF01170635.
32. Schauder J. Numerische Abschätzungen in elliptischen linearen Differentialgleichungen // *Stud. Math.*, 1934. vol. 5. pp. 34–42.
33. Hopf E. Über den funktionalen, insbesondere den analytischen Charakter der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung // *Math. Z.*, 1931. vol. 34. pp. 194–233. doi: 10.1007/bf01180586.
34. Олейник О. А. О задаче Дирихле для уравнений эллиптического типа // *Матем. сб.*, 1949. Т. 24(66), №1. С. 3–14.
35. Соболев С. Л. О некоторых оценках, относящихся к семействам функций, имеющих производные, интегрируемые с квадратом // *ДАН СССР*, 1936. Т. 1. С. 267–270.
36. Soboleff S. Méthode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy pour les équations linéaires hyperboliques normales // *Матем. сб.*, 1936. Т. 1(43), №1. С. 39–72.
37. Соболев С. Л. Об одной теореме функционального анализа // *Матем. сб.*, 1938. Т. 4(46), №3. С. 471–497.

38. Соболев С. Л. *Некоторые применения функционального анализа в математической физике.* Новосибирск: АН СССР, Сибир. отд., 1962.
39. Hilbert D. Über das Dirichlet'sche Princip // *Deutsche Math. Ver.*, 1900. vol. 8, no. 1. pp. 184–188 (In German) ; Hilbert D. Sur le principe de Dirichlet // *Nouv. Ann.*, 1900. vol. 3, no. 19. pp. 337–344 (In French).
40. Владимиров В. С. *Обобщенные функции в математической физике.* М.: Наука, 1979.
41. Владимиров В. С. *Уравнения математической физики.* М.: Наука, 1981.
42. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.* М.: Наука, 1969.
43. Мазья В. Г. *Пространства Соболева.* Л.: ЛГУ, 1975.
44. Михайлов В. П. *Дифференциальные уравнения в частных производных.* М.: Наука, 1983.
45. Михайлов В. П., Гущин А. К. Дополнительные главы курса "Уравнения математической физики" / Лекц. курсы НОЦ, Т. 7. М.: МИАН, 2007. С. 3–144. doi: 10.4213/lkn7.
46. Rellich F. Ein Satz über mittlere Konvergenz // *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math.-Phys.*, 1930. vol. 31. pp. 30–35.
47. Кондрашов В. И. О некоторых свойствах функций из пространств L_p // *ДАН СССР*, 1945. Т. 48. С. 535–538.
48. de Giorgi E. Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari // *Mem. Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.*, Serie III, 1957. vol. 3. pp. 25–43 (In Italian) ; de Giorgi E. On the differentiability and the analyticity of extremals of regular multiple integrals / *Selected papers*; eds. L. Ambrosio, G. Dal Maso, M. Forti, M. Miranda, S. Spagnolo. Berlin, New York: Springer-Verlag, 2006. pp. 149–166.
49. Nash J. Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations // *Amer. J. Math.*, 1958. vol. 80, no. 4. pp. 931–954. doi: 10.2307/2372841.
50. Moser J. A new proof of de Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations // *Comm. Pure Appl. Math.*, 1960. vol. 13, no. 3. pp. 457–468. doi: 10.1002/cpa.3160130308.
51. Гущин А. К. О внутренней гладкости решений эллиптических уравнений второго порядка // *Сиб. матем. журн.*, 2005. Т. 46, № 5. С. 1036–1052.
52. Алхутов Ю. А., Кондратьев В. А. Разрешимость задачи Дирихле для эллиптических уравнений второго порядка в выпуклой области // *Диффер. уравн.*, 1992. Т. 28, № 5. С. 806–817.
53. Алхутов Ю. А. L_p-оценки решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений второго порядка // *Матем. сб.*, 1998. Т. 189, № 1. С. 3–20. doi: 10.4213/sm287.
54. Кондратьев В. А., Ландис Е. М. Качественная теория линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка / *Дифференциальные уравнения с частными производными – 3* / Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, Т. 32. М.: ВИНИТИ, 1988. С. 99–215.
55. Нечас И. О решениях эллиптических уравнений с неограниченным интегралом Дирихле // *Чехослов. матем. журнал*, 1960. Т. 10, № 2. С. 283–298, http://dml.cz/handle/10338.dmlcz/100410.
56. Гущин А. К., Михайлов В. П. О существовании граничных значений решений эллиптического уравнения // *Матем. сб.*, 1991. Т. 182, № 6. С. 787–810.
57. Riesz F. Über die Randwerte einer analytischen Funktion // *Math. Z.*, 1923. vol. 18, no. 1. pp. 87–95. doi: 10.1007/bf01192397.
58. Littlewood J., Paley R. Theorems on Fourier Series and Power Series // *J. Lond. Math. Soc.*, 1931. vol. s1-6, no. 3. pp. 230–233. doi: 10.1112/jlms/s1-6.3.230.
59. Littlewood J., Paley R. Theorems on Fourier Series and Power Series(II) // *Proc. Lond. Math. Soc.*, 1936. vol. s2-42, no. 1. pp. 52–89. doi: 10.1112/plms/s2-42.1.52.
60. Littlewood J., Paley R. Theorems on Fourier Series and Power Series(III) // *Proc. Lond. Math. Soc.*, 1937. vol. s2-43, no. 2. pp. 105–126. doi: 10.1112/plms/s2-43.2.105.

61. Петрушко И. М. О граничных значениях в $\mathscr{L}_p$, $p > 1$, решений эллиптических уравнений в областях с ляпуновской границей // *Матем. сб.*, 1983. Т. 120(162), № 4. С. 569–588.
62. А. К. Гущин О задаче Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка с граничной функцией из L_p // *Матем. сб.*, 2012. Т. 203, № 1. С. 3–30. doi: 10.4213/sm7825.
63. Привалов И. И. *Интеграл Cauchy.* Саратов, 1919. 94 с.
64. Seeley R. T. Singular integrals and boundary value problems // *Amer. J. Math.*, 1966. vol. 88, no. 4. pp. 781–809. doi: 10.2307/2373078.
65. Гущин А. К. L_p-оценки решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка // *ТМФ*, 2013. Т. 174, № 2. С. 243–255. doi: 10.4213/tmf8410.
66. Гущин А. К. Некоторое усиление свойства внутренней непрерывности по Гёльдеру решений задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка // *ТМФ*, 2008. Т. 157, № 3. С. 345–363. doi: 10.4213/tmf6284.
67. Думанян В. Ж. О разрешимости задачи Дирихле для общего эллиптического уравнения второго порядка // *Матем. сб.*, 2011. Т. 202, № 7. С. 75–94. doi: 10.4213/sm7814.
68. Думанян В. Ж. О разрешимости задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка // *ТМФ*, 2014. Т. 180, № 2. С. 189–205. doi: 10.4213/tmf8670.

Поступила в редакцию 19/XII/2014;
в окончательном варианте — 05/II/2015;
принята в печать — 25/II/2015.

Vestn. Samar. Gos. Techn. Un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 1, pp. 19–43

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) **doi:** http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1383

MSC: 35J25

ON THE DIRICHLET PROBLEM FOR AN ELLIPTIC EQUATION*

A. K. Gushchin

Steklov Mathematical Institute, Russian Academy of Sciences,
8, Gubkina st., Moscow, 119991, Russian Federation.

This paper is dedicated to the blessed memory
of Valentin P. Mikhailov

Abstract

It is well known that the concept of a generalized solution from the Sobolev space W_2^1 of the Dirichlet problem for a second order elliptic equation is not a generalization of the classical solution sensu stricto: not every continuous function on the domain boundary is a trace of some function from

How to cite Reference
G u s h c h i n A. K. On the Dirichlet problem for an elliptic equation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 1, pp. 19–43. doi: 10.14498/vsgtu1383. (In Russian)

Author Details
Anatolii K. Gushchin (Dr. Phys. & Math. Sci.; akg@mi.ras.ru), Leading Researcher, Dept. of Mathematical Physics.

*This paper is an extended version of the paper [1], presented at the Mathematical Physics and Its Applications 2014 Conference.

W_2^1. The present work is dedicated to the memory of Valentin Petrovich Mikhailov, who proposed a generalization of both these concepts. In the Mikhailov's definition the boundary values of the solution are taken from the L_2; this definition extends naturally to the case of boundary functions from L_p, $p > 1$. Subsequently, the author of this work has shown that solutions have the property $(n-1)$-dimensional continuity; n is a dimension of the space in which we consider the problem. This property is similar to the classical definition of uniform continuity, but traces of this function on the measures from a special class should be considered instead of values of the function at points. This class is a little more narrow than the class of Carleson measures. The trace of function on the measure is an element of L_p with respect to this measure. The property $(n-1)$-dimensional continuity makes it possible to give another definition of the solution of the Dirichlet problem (a definition of $(n-1)$-dimensionally continuous solution), which is in the form close to the classical one. This definition does not require smoothness of the boundary. The Dirichlet problem in the Mikhailov's formulation and especially for the $(n-1)$-dimensionally continuous solution was studied insufficiently (in contrast to the cases of classical and generalized solutions). First of all, it refers to conditions on the right side of the equation, in which the Dirichlet problem is solvable. In this article the new results in this direction are presented. In addition, we discuss the conditions on the coefficients of the equation and the conditions on the boundary of a domain in which the problem is considered. The results about the solvability and about the boundary behavior of solutions are compared with the analogous theorems for classical and generalized solutions. Some unsolved problems arising from such comparison are discussed.

Keywords: elliptic equation, Dirichlet problem, function space.

doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1383

Acknowledgments. This work has been supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 13–01–00065-a).

ORCID
Anatolii K. Gushchin: http://orcid.org/0000-0001-8600-6021

REFERENCES

1. Gushchin A. K. On the Dirichlet Problem for an Elliptic Equation, *The 4nd International Conference "Mathematical Physics and its Applications"*, Book of Abstracts and Conference Materials; ред. I. V. Volovich; V. P. Radchenko. Samara, Samara State Technical Univ., 2014, С. 136 (In Russian).
2. Mikhaylov V. P. The Dirichlet problem for a second order elliptic equation, *Differ. Equ.*, 1976, vol. 12, no. 10, pp. 1320–1329.
3. Gushchin A. K. On the Dirichlet problem for a second-order elliptic equation, *Math. USSR-Sb.*, 1990, vol. 65, no. 1, pp. 19–66. doi: 10.1070/SM1990v065n01ABEH002075.
4. Carleson L. An interpolation problem for bounded analytic functions, *Amer. J. Math.*, 1958, vol. 80, no. 4, pp. 921–930. doi: 10.2307/2372840.
5. Carleson L. Interpolation by bounded analytic functions and the corona problem, *Ann. Math.*, 1962, vol. 76, no. 3, pp. 547–559. doi: 10.2307/1970375.
6. Hörmander L. L^p-estimates for (pluri-) subharmonic functions, *Math. Scand.*, 1967, vol. 20, pp. 65–78, http://www.mscand.dk/article/view/10821/8842.
7. Nikol'skiy N. K. *Lektsii ob operatore sdviga* [Lectures on the shift operator]. Moscow, Nauka, 1980 (In Russian).
8. Garnett J. B. *Bounded analytic functions*, Pure and Applied Mathematics, vol. 96. New York etc., Academic Press, 1981, xvi+467 pp.. doi: 10.1016/s0079-8169(08)61051-x ;

Garnett J. B. *Bounded analytic functions*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 236. New York, Springer, 2007, 433 pp.. doi: 10.1007/0-387-49763-3.

9. Liapounoff A. Sur certaines questions qui se rattachent au problème de Dirichlet, *Journ. de Math.*(5), 1898, vol. 4, pp. 241–311.
10. Poincaré H. La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet, *Acta Mathematica*, 1897, vol. 20, no. 1, pp. 59–142. doi: 10.1007/bf02418028.
11. Korn A. *Lehrbuch der Potentialtheorie. Allgemeine Theorie des Potentials und der Potentialfunctionen im Raume*. Berlin, Ferd. Dümmler, 1899, xiv+417 pp.
12. Stekloff W. Sur les problèmes fondamentaux de la Physique mathématique, *C. R. Acad. Sci.*, Paris, 1899, vol. 128, pp. 588–591.
13. Stekloff W. Les méthodes générales pour résoudre les problmes fondamentaux de la physique mathématique, *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2 série [Toulouse Ann. (2)], 1900, vol. 2, pp. 207–272. doi: 10.5802/afst.170.
14. Zaremba S. Sur la thórie de l'équation de Laplace et les méthodes de Neumann et de Robin, *Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie* [Krakauer Anzeiger], 1901, pp. 171–189.
15. Steklov V. A. *Osnovnye zadachi matematicheskoi fiziki*[Fundamental problems in mathematical physics] Second edition, ed. V. S. Vladimirov. Moscow, Nauka, 1983 (In Russian).
16. Hölder O. *Beiträge zur potentialtheorie*, Inaugural-Dissertation zur Erlangung der Doctorwürde der naturwissenschaftlichen Facultät zu Tübingen. Stuttgart, Druck J. B. Metzlersche Buchdruckerei, 1882, iv+71 pp., Internet Archive Identifier: bietrgezurpoten00hlgoog.
17. Gilbarg D., Trudinger N. S. *Elliptic partial differential equations of second order*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 224. Berlin etc., Springer-Verlag, 1983, xiii+513 pp.. doi: 10.1007/978-3-642-61798-0.
18. Lebesgue H. Sur le problème de Dirichlet, *C. R. Acad. Sci.*, Paris, 1907, vol. 144, pp. 316–318, 622–623 ; Lebesgue H. Sur le problème de Dirichlet, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 1907, vol. 24, pp. 371–402. doi: 10.1007/BF03015070.
19. Gunther N. M. *Teoriia potentsiala i ee primeneniia k osnovnym zadacham matematicheskoi fiziki* [Theory of the potential and its application to the basic problems of mathematical physics]. Moscow, Gostekhizdat, 1953 (In Russian).
20. Perron O. Eine neue Behandlung der ersten Randwertaufgabe für $\Delta u = 0$, *Math. Z.*, 1923, vol. 18, pp. 42–54. doi: 10.1007/BF01192395.
21. Petrovsky I. G. *Lectures on partial differential equations.* New York, Interscience, 1954, x+245 pp.
22. Wiener N. The Dirichlet problem, *Mass. J. of Math.*, 1924, vol. 3, pp. 129–146.
23. Keldysh M. V. On the solubility and the stability of Dirichlet's problem, *Uspekhi Mat. Nauk*, 1941, no. 8, pp. 171–231 (In Russian).
24. Korn A. *Über Minimalflächen, deren Randkurven wenig von ebenen Kurven abweichen.* Berlin, Königl. Akademie der Wissenschaften, 1909, 37 pp.
25. Ladyzhenskaya O. A., Uraltseva N. N. *Lineinye i kvazilineinye uravneniia ellipticheskogo tipa* [Linear and quasilinear equations of elliptic type]. Moscow, Nauka, 1973 (In Russian).
26. Hopf E. Elementare Bemerkungen über die Lösungen partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus, *Sitz. Ber. Preuss Akad. Wissensch. Berlin. Math.-Phys. Kl.* **19**, 1927, pp. 147–152 ; Hopf E. Elementare Bemerkungen über die Lösungen partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus, *Selected works of Eberhard Hopf. With commentaries*; eds. Cathleen S. Morawetz, James B. Serrin and Yakov G. Sinai. Providence, RI, American Mathematical Society, 2002, pp. 3–8.
27. Korn A. Zwei Anwendungen der Methode der sukzessiven Annäherungen, *Mathematische Abhandlungen Hermann Amandus Schwarz: zu seinem fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 6. August 1914 (German Edition).* Berlin, Schwarz Festschrift, 1914, pp. 215–229.
28. Giraud G. Sur le problème de Dirichlet généralisé (deuxième mémoire), *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.*, III. Ser., 1929, vol. 46, pp. 131–245.

29. Giraud G. Sur certains problèmes non linéaires de Neumann et sur certains problèmes non linéaires mixtes, *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.*, III. Ser., 1932, vol. 49, pp. 1–104.
30. Giraud G. Sur certains problèmes non linéaires de Neumann et sur certains problèmes non linéaires mixtes, *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.*, III. Ser., 1932, vol. 49, pp. 245–309.
31. Schauder J. Über lineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung, *Math. Z.*, 1934, vol. 38, pp. 257–282. doi: 10.1007/BF01170635.
32. Schauder J. Numerische Abschätzungen in elliptischen linearen Differentialgleichungen, *Stud. Math.*, 1934, vol. 5, pp. 34–42.
33. Hopf E. Über den funktionalen, insbesondere den analytischen Charakter der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung, *Math. Z.*, 1931, vol. 34, pp. 194–233. doi: 10.1007/bf01180586.
34. Oleinik O. A. On the Dirichlet problem for equations of elliptic type, *Mat. Sb. (N.S.)*, 1949, vol. 24(66), no. 1, pp. 3–14 (In Russian).
35. Sobolev S. L.: On some estimates relating to families of functions having derivatives that are square integrable, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1936, vol. 1, pp. 267–270 (In Russian).
36. Soboleff S. Méthode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy pour les équations linéaires hyperboliques normales, *Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S.*, 1936, vol. 1(43), no. 1, pp. 39–72.
37. S. Soboleff Sur un théorème d'analyse fonctionnelle, *Amer. Math. Soc. Transl.*, 1963, vol. 2(34), pp. 39–68.
38. Sobolev S. L. *Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 90. Providence, RI, American Mathematical Society, 1991, vii+286 pp.
39. Hilbert D. Über das Dirichlet'sche Princip, *Deutsche Math. Ver.*, 1900, vol. 8, no. 1, pp. 184–188 (In German) ; Hilbert D. Sur le principe de Dirichlet, *Nouv. Ann.*, 1900, vol. 3, no. 19, pp. 337–344 (In French).
40. Vladimirov V. S. *Obobshchennye funktsii v matematicheskoi fizike* [Generalized functions in mathematical physics]. Moscow, Nauka, 1979 (In Russian).
41. Vladimirov V. S. *Uravneniia matematicheskoi fiziki* [The equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka, 1981 (In Russian).
42. Besov O. V., Il'in V. P., Nikol'skii S. M. *Priblizhenie funktsii mnogikh peremennykh i teoremy vlozheniia* [Approximation of functions of several variables and imbedding theorems]. Moscow, Nauka, 1969 (In Russian).
43. Maz'ja V. G. *Sobolev Spaces*, Springer Series in Soviet Mathematics. Berlin etc., Springer-Verlag, 1985, xix+486 pp.. doi: 10.1007/978-3-662-09922-3.
44. Mikhaylov V. P. *Differentsial'nye uravneniia v chastnykh proizvodnykh* [Partial differential equations]. Moscow, Nauka, 1983 (In Russian).
45. Mikhailov V. P., Gushchin A. K. Additional chapters of course "Equations of Mathematical Physics", Lekts. Kursy NOC, 7. Moscow, Steklov Math. Inst., RAS, 2007, pp. 3–144 (In Russian). doi: 10.4213/lkn7.
46. Rellich F. Ein Satz über mittlere Konvergenz, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math.-Phys.*, 1930, vol. 31, pp. 30–35.
47. Kondrashov V. I. On Certain Properties of Functions from Spaces L_p, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1945, vol. 48, pp. 535–538 (In Russian).
48. de Giorgi E. Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari, *Mem. Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.*, Serie III, 1957, vol. 3, pp. 25–43 (In Italian) ; de Giorgi E. On the differentiability and the analyticity of extremals of regular multiple integrals, *Selected papers*; eds. L. Ambrosio, G. Dal Maso, M. Forti, M. Miranda, S. Spagnolo. Berlin, New York, Springer-Verlag, 2006, pp. 149–166.
49. Nash J. Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations, *Amer. J. Math.*, 1958, vol. 80, no. 4, pp. 931–954. doi: 10.2307/2372841.
50. Moser J. A new proof of de Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, 1960, vol. 13, no. 3, pp. 457–468. doi: 10.1002/cpa.3160130308.

51. Gushchin A. K. On the Interior Smoothness of Solutions to Second-Order Elliptic Equations, *Siberian Math. J.*, 2005, vol. 46, no. 5, pp. 826–840. doi: 10.1007/s11202-005-0081-3.
52. Alkhutov Yu. A., Kondrat?ev V. A. Solvability of the Dirichlet problem for second-order elliptic equations in a convex domain, *Differ. Equ.*, 1992, vol. 28, no. 5, pp. 650–662.
53. Alkhutov Yu. A. L_p-estimates of the solution of the Dirichlet problem for second-order elliptic equations, *Sb. Math.*, 1998, vol. 189, no. 1, pp. 1–17. doi: 10.1070/sm1998v189n01ABEH000287.
54. Kondratiev V. A., Landis E. M. Qualitative theory of second order linear partial differential equations, *Partial differential equations – 3*, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fund. Napr., 32. Moscow, VINITI, 1988, pp. 99–215 (In Russian).
55. Nečas J. On the solutions of second order elliptic partial differential equations with unbounded Dirichlet integral, *Czechosl. Mathem. Journal*, 1960, vol. 10, no. 2, pp. 283–298 (In Russian).
56. Gushchin A. K., Mikhailov V. P. On the existence of boundary values of solutions of an elliptic equation, *Math. USSR-Sb.*, 1992, vol. 73, no. 1, pp. 171–194. doi: 10.1070/SM1992v073n01ABEH002540.
57. Riesz F. Über die Randwerte einer analytischen Funktion, *Math. Z.*, 1923, vol. 18, no. 1, pp. 87–95. doi: 10.1007/bf01192397.
58. Littlewood J., Paley R. Theorems on Fourier Series and Power Series, *J. Lond. Math. Soc.*, 1931, vol. s1-6, no. 3, pp. 230–233. doi: 10.1112/jlms/s1-6.3.230.
59. Littlewood J., Paley R. Theorems on Fourier Series and Power Series(II), *Proc. Lond. Math. Soc.*, 1936, vol. s2-42, no. 1, pp. 52–89. doi: 10.1112/plms/s2-42.1.52.
60. Littlewood J., Paley R. Theorems on Fourier Series and Power Series(III), *Proc. Lond. Math. Soc.*, 1937, vol. s2-43, no. 2, pp. 105–126. doi: 10.1112/plms/s2-43.2.105.
61. Petrushko I. M. On boundary values in $\mathscr{L}_p$, $p > 1$, of solutions of elliptic equations in domains with a Lyapunov boundary, *Math. USSR-Sb.*, 1984, vol. 48, no. 2, pp. 565–585. doi: 10.1070/SM1984v048n02ABEH002693.
62. Gushchin A. K. The Dirichlet problem for a second-order elliptic equation with an L_p boundary function, *Sb. Math.*, 2012, vol. 203, no. 1, pp. 1–27. doi: 10.1070/SM2012v203n01ABEH004211.
63. Privalov I. I. *Integral Cauchy* [The Cauchy integral]. Saratov, 1919, 94 pp. (In Russian)
64. Seeley R. T. Singular integrals and boundary value problems, *Amer. J. Math.*, 1966, vol. 88, no. 4, pp. 781–809. doi: 10.2307/2373078.
65. Guschin A. K. L_p-estimates for solutions of second-order elliptic equation Dirichlet problem, *Theoret. and Math. Phys.*, 2013, vol. 174, no. 2, pp. 209–219. doi: 10.1007/s11232-013-0018-0.
66. Gushchin A. K. A strengthening of the interior Hölder continuity property for solutions of the Dirichlet problem for a second-order elliptic equation, *Theoret. and Math. Phys.*, 2008, vol. 157, no. 3, pp. 1655–1670. doi: 10.1007/s11232-008-0138-0.
67. Dumanyan V. Zh. Solvability of the Dirichlet problem for a general second-order elliptic equation, *Sb. Math.*, 2011, vol. 202, no. 7, pp. 1001–1020. doi: 10.1070/SM2011v202n07ABEH004174.
68. Dumanyan V. Zh. Solvability of the Dirichlet problem for second-order elliptic equations, *Theoret. and Math. Phys.*, 2014, vol. 180, no. 2, pp. 917–931. doi: 10.1007/s11232-014-0188-4.

Received 19/XII/2014;
received in revised form 05/II/2015;
accepted 25/II/2015.