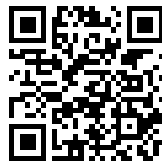


УДК 517.957

**ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО
УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ
ВОСЬМОГО ПОРЯДКА****Т. К. Юлдашев**Сибирский государственный аэрокосмический университет им. ак. М. Ф. Решетнева,
Россия, 660014, Красноярск, пр. имени газеты «Красноярский рабочий», 31.**Аннотация**

Изучены вопросы разрешимости обратной задачи для нелинейного уравнения в частных производных восьмого порядка, левая часть которого является суперпозицией псевдопараболического и псевдогиперболического операторов четвертого порядка. Обоснована применимость метода Фурье разделения переменных при изучении смешанной и обратной задач для нелинейного уравнения в частных производных восьмого порядка. С помощью метода разделения переменных смешанная задача сведена к изучению счетной системы нелинейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода. Использование заданного интегрального условия привело к изучению нелинейного интегрального уравнения Вольтерра первого рода относительно второй неизвестной функции (относительно функции восстановления). С помощью неклассического интегрального преобразования однозначное восстановление второй неизвестной функции сведено к изучению однозначной разрешимости нелинейного интегрального уравнения Вольтерра второго рода. В результате получена система из двух нелинейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода относительно двух неизвестных функций. Эта система однозначно разрешена с помощью метода последовательных приближений. Далее изучена устойчивость решений смешанной и обратной задач относительно начальных и дополнительно заданных функций.

Ключевые слова: обратная задача, нелинейное уравнение в частных производных, уравнение восьмого порядка, суперпозиция двух операторов, корректность решения.

doi: <http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1335>

Введение. Математическое моделирование многих процессов, происходящих в реальном мире, приводит к изучению прямых и обратных задач математической физики. Теория начальных, смешанных и краевых задач для уравнений в частных производных в силу ее прикладной важности является одним из важнейших разделов теории дифференциальных уравнений в частных производных.

© 2015 Самарский государственный технический университет.

Образец для цитирования

Юлдашев Т. К. Обратная задача для одного нелинейного уравнения в частных производных восьмого порядка // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2015. Т. 19, № 1. С. 136–154. doi: [10.14498/vsgtu1335](http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1335).

Сведения об авторе

Турсун Камалдинович Юлдашев (к.ф.-м.н., доц.; tursunbay@rambler.ru), доцент, каф. высшей математики.

Смешанные задачи в теории упругости возникают при расчете различных деталей машин и элементов конструкций, находящихся во взаимодействии, при расчете фундаментов и оснований сооружений [1]. К смешанным задачам также относятся задачи о концентрации напряжений в окрестности всевозможных трещин, инородных включений, подкрепляющих стрингеров и накладок. Смешанные задачи часто встречаются в гидродинамике: это и нелинейные задачи теории крыла и глиссирования, теория струйных течений, теории качки корабля и удара тел о поверхность жидкости, фильтрации, теории взрыва, ряд задач гидроупругости.

Дифференциальные уравнения в частных производных высоких порядков [2] представляют интерес с точки зрения физических приложений. Изучение многих задач газовой динамики, теории упругости, теории пластин и оболочек приводит к рассмотрению дифференциальных уравнений в частных производных высоких порядков. Дифференциальные уравнения высоких порядков используют и при построении инвариантных решений дифференциальных уравнений с использованием высшей симметрии и законов сохранения [3].

Изучению дифференциальных уравнений в частных производных высоких порядков посвящено немало работ. Дифференциальные уравнения в частных производных четвертого и шестого порядков изучались во многих работах, в частности [4–12]. Однако дифференциальные уравнения в частных производных более высоких порядков [13–22] остаются сравнительно мало изученными.

Теория обратных задач представляет собой активно развивающееся направление современной теории дифференциальных уравнений. Интенсивное исследование обратных задач в значительной степени обусловлено необходимостью разработки математических методов решения обширного класса важных прикладных проблем. Обратную задачу назовем нелинейной, если функция восстановления входит в данное уравнение нелинейно. Нелинейные обратные задачи рассматривались в [23–25].

В данной работе используются следующие известные понятия. Линейное множество

$$\{a^N(t) \mid a^N(t) = (a_1(t), a_2(t), \dots, a_N(t)) \in C(D_T)\}$$

введением нормы

$$\|a^N(t)\|_{B_2^N(T)} = \left[\sum_{n=1}^N \left(\max_{t \in D_T} |a_n(t)| \right)^2 \right]^{1/2}$$

становится банаховым пространством и обозначается через $B_2^N(T)$, где $D_T \equiv [0; T]$. Наряду с этим пространством также рассматривается банахово пространство $B_2(T)$ с нормой

$$\|a(t)\|_{B_2(T)} = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\max_{t \in D_T} |a_n(t)| \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Для произвольной функции $g(x)$, $x \in D_l \equiv [0; l]$ в пространстве $L_2(D_l)$

вводится норма

$$\|g(x)\|_{L_2(D_l)} = \left\{ \int_0^l |g(y)|^2 dy \right\}^{1/2}.$$

Для числовой последовательности φ_n в пространстве ℓ_2 используется норма

$$\|\varphi\|_{\ell_2} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n|^2 \right\}^{1/2}.$$

Рассмотрим пространство Соболева $W_2^3(D)$. Обозначим через $\hat{W}_2^3(D)$, где $D \equiv D_T \times D_l$, множество функций $w(t, x) \in W_2^3(D)$ таких, что

$$w(t, x), \frac{\partial^2}{\partial x^2} w(t, x), \dots, \frac{\partial^6}{\partial x^6} w(t, x)$$

при фиксированном $t \in D_T$ принадлежат области определения оператора $\partial^6/\partial x^6$ с достаточно гладкими функциями из $L_2(D)$, имеют обобщенные производные третьего порядка по t , принадлежащие $L_2(D)$, и обращаются в нуль при $t \geq T - \delta$ (величина $\delta > 0$ зависит от $w(t, x)$).

1. Постановка задачи. В области D рассмотрим уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial^3}{\partial t \partial x^2} + \frac{\partial^4}{\partial x^4} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \varepsilon \frac{\partial^3}{\partial t^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4}{\partial x^4} \right) u(t, x) = f(t, x, u(t, x), p(t)) \quad (1)$$

со смешанными

$$u(0, x) = \phi_1(x), \quad u_t(0, x) = \phi_2(x), \quad u_{tt}(0, x) = \phi_3(x), \quad x \in D_l, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} u(t, 0) = u(t, l) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, 0) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, l) = \\ &= \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(t, 0) = \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(t, l) = \frac{\partial^6}{\partial x^6} u(t, 0) = \frac{\partial^6}{\partial x^6} u(t, l) = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

и интегральным

$$\int_0^t K(t, s) u(s, x_0) ds = h(t), \quad t \in D_T, \quad 0 < x_0 < l \quad (4)$$

условиями, где $f(t, x, u, p) \in C(D \times \mathbb{R}^2)$; $\phi_1(x), \phi_2(x), \phi_3(x) \in C^9(D_l)$; $p(t)$ — функция восстановления; $K(t, s) \in C(D_T^2)$, $h(t) \in C(D_T)$; $h(0) = 0$; $D \equiv D_T \times D_l$, $D_T \equiv [0; T]$, $D_l \equiv [0; l]$, $0 < T < \infty$, $0 < l < \infty$; $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{R} \times \mathbb{R}$; $\varepsilon > 0$ — малый параметр.

При $\varepsilon = 0$ левая часть уравнения (1) состоит из суперпозиции двух известных операторов математической физики (параболический и гиперболический

операторы четвертого порядка). Правая часть уравнения состоит из функции, нелинейно включающей в себе неизвестную функцию $u(t, x)$ и функцию восстановления $p(t)$. В данной работе решение смешанной задачи (1)–(3) разыскивается в виде ряда [9, 10]:

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) b_n(x), \quad (5)$$

где $b_n(x) = \sqrt{2/l} \sin \lambda_n x$, $\lambda_n = n\pi/l$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если функция $u(t, x) \in W_2^3(D)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^l \left\{ u(t, y) \left[-\frac{\partial^3 w(t, y)}{\partial t^3} + 2\varepsilon \frac{\partial^5 w(t, y)}{\partial t^3 \partial y^2} - \varepsilon^2 \frac{\partial^7 w(t, y)}{\partial t^3 \partial y^4} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{\partial^6 w(t, y)}{\partial t^2 \partial y^4} - \varepsilon \frac{\partial^8 w(t, y)}{\partial t^2 \partial y^6} - \frac{\partial^5 w(t, y)}{\partial t \partial y^4} + \varepsilon \frac{\partial^7 w(t, y)}{\partial t \partial y^6} + \frac{\partial^8 w(t, y)}{\partial y^8} \right] - \right. \\ & \quad \left. - f(t, x, u(t, x), p(t)) w(t, y) \right\} dy dt = \\ & = \int_0^l \phi_1(y) \left[-\frac{\partial^2 w(t, y)}{\partial t^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^4 w(t, y)}{\partial t^2 \partial y^2} - \varepsilon^2 \frac{\partial^6 w(t, y)}{\partial t^2 \partial y^4} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial^5 w(t, y)}{\partial t \partial y^4} - \varepsilon \frac{\partial^7 w(t, y)}{\partial t \partial y^6} - \frac{\partial^4 w(t, y)}{\partial y^4} + \varepsilon \frac{\partial^6 w(t, y)}{\partial y^6} \right]_{t=0} dy + \\ & \quad + \int_0^l \phi_2(y) \left[\frac{\partial w(t, y)}{\partial t} - 2\varepsilon \frac{\partial^3 w(t, y)}{\partial t \partial y^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^5 w(t, y)}{\partial t \partial y^4} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{\partial^4 w(t, y)}{\partial y^4} + \varepsilon \frac{\partial^6 w(t, y)}{\partial y^6} \right]_{t=0} dy + \\ & \quad + \int_0^l \phi_3(y) \left[-w(t, y) + 2\varepsilon \frac{\partial^2 w(t, y)}{\partial y^2} - \varepsilon^2 \frac{\partial^4 w(t, y)}{\partial y^4} \right]_{t=0} dy \end{aligned}$$

для любого $w(t, x) \in \hat{W}_2^3(D)$, то она называется обобщенным решением смешанной задачи (1)–(3).

Применение метода разделения переменных в виде (5) и использование интегрального тождества для определения обобщенного решения позволяет отказаться от непрерывной дифференцируемости правой части уравнения (1). Кроме того, такой подход дает возможность свести смешанную задачу к счетной системе нелинейных интегральных уравнений (ССНИУ). Для восстановления второй неизвестной функции воспользуемся неклассическим интегральным преобразованием.

2. Сведение решения смешанной задачи к ССНИУ. Покажем, что коэффициенты разложения $a_n(t)$ обобщенного решения смешанной задачи (1)–(3) удовлетворяют следующей ССНИУ:

$$\begin{aligned} a_n(t) = & \psi_n(t, \varepsilon) + \\ & + \frac{1}{\omega_n(\varepsilon)} \int_0^t \int_0^l f\left(s, y, \sum_{i=1}^{\infty} a_i(s) b_i(y), p(s)\right) b_n(y) G_n(t, s, \varepsilon) dy ds, \quad (6) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\psi_n(t, \varepsilon) = & \frac{\mu_n^2(\varepsilon)\phi_{1n} + \phi_{3n}}{\mu_n^2(\varepsilon) + \mu_n^4(\varepsilon)} \exp \{-\mu_n^2(\varepsilon)t\} + \frac{\mu_n^4(\varepsilon)\phi_{1n} - \phi_{3n}}{\mu_n^2(\varepsilon) + \mu_n^4(\varepsilon)} \cos \mu_n(\varepsilon)t + \\ & + \frac{\mu_n^2(\varepsilon)\phi_{1n} + (1 + \mu_n^2(\varepsilon))\phi_{2n} + \phi_{3n}}{\mu_n^3(\varepsilon) + \mu_n^5(\varepsilon)} \sin \mu_n(\varepsilon)t,\end{aligned}$$

$$G_n(t, s, \varepsilon) = \exp \{-\mu_n^2(\varepsilon)(t - s)\} + \mu_n(\varepsilon) \sin \mu_n(\varepsilon)(t - s) - \cos \mu_n(\varepsilon)(t - s),$$

$$\omega_n(\varepsilon) = \rho_n^2(\varepsilon)\mu_n^2(\varepsilon)(1 + \mu_n^2(\varepsilon)), \quad \mu_n^2(\varepsilon) = \frac{\lambda_n^4}{\rho_n(\varepsilon)}, \quad \rho_n(\varepsilon) = 1 + \mu_n^2(\varepsilon),$$

начальные данные ϕ_{jn} подбирались из (2) так, что

$$\phi_{jn}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{jn} b_n(x), \quad \phi_{jn}(x) \in L_2(D_l), \quad j = 1, 2, 3.$$

Действительно, из определения обобщенного решения имеем

$$\begin{aligned}& \int_0^T \int_0^l \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) b_n(y) \left[-\frac{\partial^3 w(t, y)}{\partial t^3} + 2\varepsilon \frac{\partial^5 w(t, y)}{\partial t^3 \partial y^2} - \varepsilon^2 \frac{\partial^7 w(t, y)}{\partial t^3 \partial y^4} + \right. \right. \\ & + \frac{\partial^6 w(t, y)}{\partial t^2 \partial y^4} - \varepsilon \frac{\partial^8 w(t, y)}{\partial t^2 \partial y^6} - \frac{\partial^5 w(t, y)}{\partial t \partial y^4} + \varepsilon \frac{\partial^7 w(t, y)}{\partial t \partial y^6} + \left. \frac{\partial^8 w(t, y)}{\partial y^8} \right] - \\ & - f \left(t, y, \sum_{i=1}^{\infty} a_i(t) b_i(y), p(t) \right) w(t, y) \Big\} dy dt = \\ & = \int_0^l \phi_1(y) \left[-\frac{\partial^2 w(t, y)}{\partial t^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^4 w(t, y)}{\partial t^2 \partial y^2} - \varepsilon^2 \frac{\partial^6 w(t, y)}{\partial t^2 \partial y^4} + \right. \\ & + \frac{\partial^5 w(t, y)}{\partial t \partial y^4} - \varepsilon \frac{\partial^7 w(t, y)}{\partial t \partial y^6} - \frac{\partial^4 w(t, y)}{\partial y^4} + \varepsilon \frac{\partial^6 w(t, y)}{\partial y^6} \Big]_{t=0} dy + \\ & + \int_0^l \phi_2(y) \left[\frac{\partial w(t, y)}{\partial t} - 2\varepsilon \frac{\partial^3 w(t, y)}{\partial t \partial y^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^5 w(t, y)}{\partial t \partial y^4} - \right. \\ & - \frac{\partial^4 w(t, y)}{\partial y^4} + \varepsilon \frac{\partial^6 w(t, y)}{\partial y^6} \Big]_{t=0} dy + \\ & + \int_0^l \phi_3(y) \left[-w(t, y) + 2\varepsilon \frac{\partial^2 w(t, y)}{\partial y^2} - \varepsilon^2 \frac{\partial^4 w(t, y)}{\partial y^4} \right]_{t=0} dy.\end{aligned}$$

Пусть $w = w_m(t, x) = g(t)b_m(x) \in W_2^3(D)$, $g(t) \in C^3(D_T)$. Тогда из последнего соотношения следует, что

$$\begin{aligned}& \int_0^t \int_0^l \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s) b_n(y) \left[-(1 + \lambda_m^2 \varepsilon + \lambda_m^4 \varepsilon^2) g'''(s) b_m(y) + \right. \right. \\ & + \lambda_m^4 (1 + \lambda_m^2 \varepsilon) g''(s) b_m(y) - \lambda_m^4 (1 + \lambda_m^2 \varepsilon) g'(s) b_m(y) + \left. \lambda_m^8 g(s) b_m(y) \right] -\end{aligned}$$

$$-f\left(s, y, \sum_{i=1}^{\infty} a_i(s)b_i(y), p(s)\right)g(s)\Big\} dyds = 0. \quad (7)$$

Так как функции $b_n(x)$ ортонормированы в $L_2(D_l)$, путем интегрирования по частям из (7) можно получить:

$$\begin{aligned} \int_0^T g(t) \Big[(1 + \lambda_n^2 \varepsilon + \lambda_n^4 \varepsilon^2) a_n'''(t) + \\ + \lambda_n^4 (1 + \lambda_n^2 \varepsilon) a_n''(t) + \lambda_n^4 (1 + \lambda_n^2 \varepsilon) a_n'(t) + \lambda_n^8 a_n(t) - \\ - \int_0^l f\left(t, y, \sum_{i=1}^{\infty} a_i(t)b_i(y), p(t)\right) b_n(y) dy \Big] dt = 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует счетная система нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} (1 + \lambda_n^2 \varepsilon + \lambda_n^4 \varepsilon^2) a_n'''(t) + \lambda_n^4 (1 + \lambda_n^2 \varepsilon) a_n''(t) + \lambda_n^4 (1 + \lambda_n^2 \varepsilon) a_n'(t) + \\ + \lambda_n^8 a_n(t) = \int_0^l f\left(t, y, \sum_{i=1}^{\infty} a_i(t)b_i(y), p(t)\right) b_n(y) dy. \end{aligned} \quad (8)$$

Система (8) решается методом вариации произвольных постоянных:

$$\begin{aligned} a_n(t) = C_{1n} \exp(-\mu_n^2(\varepsilon)t) + C_{2n} \cos \mu_n(\varepsilon)t + C_{3n} \sin \mu_n(\varepsilon)t + \\ + \frac{1}{\omega_n(\varepsilon)} \int_0^t \int_0^l f\left(s, y, \sum_{i=1}^{\infty} a_i(s)b_i(y), p(s)\right) b_n(y) G_n(t, s, \varepsilon) dyds, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$G_n(t, s, \varepsilon) = \exp\{-\mu_n^2(\varepsilon)(t-s)\} + \mu_n(\varepsilon) \sin \mu_n(\varepsilon)(t-s) - \cos \mu_n(\varepsilon)(t-s),$$

$$\omega_n(\varepsilon) = \rho_n^2(\varepsilon) \mu_n^2(\varepsilon) (1 + \mu_n^2(\varepsilon)), \quad \mu_n^2(\varepsilon) = \frac{\lambda_n^4}{\rho_n(\varepsilon)}, \quad \rho_n(\varepsilon) = 1 + \mu_n^2(\varepsilon).$$

Для определения коэффициентов C_{1n} , C_{2n} , C_{3n} в (9) используются условия

$$a_n(0) = \phi_{1n}, \quad a_n'(0) = \phi_{2n}, \quad a_n''(0) = \phi_{3n}.$$

Тогда из (9) следует ССНИУ (6).

Рассмотрим укороченную систему нелинейных интегральных уравнений (УСНИУ):

$$\begin{aligned} a_n^N(t) = \psi_n^N(t, \varepsilon) + \\ + \frac{1}{\omega_n^N(\varepsilon)} \int_0^t \int_0^l f\left(s, y, \sum_{i=1}^N a_i^N(s)b_i^N(y), p(s)\right) b_n^N(y) G_n^N(t, s, \varepsilon) dyds, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned}\psi_n^N(t, \varepsilon) = & \frac{\mu_n^{2N}(\varepsilon)\phi_{1n}^N + \phi_{3n}^N}{\mu_n^{2N}(\varepsilon) + \mu_n^{4N}(\varepsilon)} \exp(-\mu_n^{2N}(\varepsilon)t) + \frac{\mu_n^{4N}(\varepsilon)\phi_{1n}^N - \phi_{3n}^N}{\mu_n^{2N}(\varepsilon) + \mu_n^{4N}(\varepsilon)} \cos \mu_n^N(\varepsilon)t + \\ & + \frac{\mu_n^{2N}(\varepsilon)\phi_{1n}^N + (1 + \mu_n^{2N}(\varepsilon))\phi_{2n}^N + \phi_{3n}^N}{\mu_n^{3N}(\varepsilon) + \mu_n^{5N}(\varepsilon)} \sin \mu_n^N(\varepsilon)t,\end{aligned}$$

$$G_n^N(t, s, \varepsilon) = \exp(-\mu_n^{2N}(\varepsilon)(t - s)) + \mu_n^N(\varepsilon) \sin \mu_n^N(\varepsilon)(t - s) - \cos \mu_n^N(\varepsilon)(t - s),$$

$$\omega_n^N(\varepsilon) = \rho_n^{2N}(\varepsilon)\mu_n^{2N}(\varepsilon)(1 + \mu_n^{2N}(\varepsilon)), \quad \mu_n^{2N}(\varepsilon) = \frac{\lambda_n^{4N}}{\rho_n^N(\varepsilon)}, \quad \rho_n^N(\varepsilon) = 1 + \mu_n^{2N}(\varepsilon).$$

3. Однозначная разрешимость УСНИУ.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполняются следующие условия:

- 1) $\int_0^T \left\| f\left(t, y, \sum_{i=1}^N a_i^N(t)b_i^N(y), p(t)\right) \right\|_{L_2(D_t)} dt \leq \Delta < \infty;$
- 2) $f(t, x, u, p) \in \text{Lip}\{H(t, x)|_u\}$, где $0 < \int_0^t \|H(s, x)\|_{L_2(D_t)} ds < \infty;$
- 3) $\|\psi_n^N(t, \varepsilon)\|_{B_2^N(T)} < \infty.$

Тогда УСНИУ (10) при фиксированном значении $p(t)$ имеет единственное решение в пространстве $B_2^N(T)$.

Доказательство. Воспользуемся методом последовательных приближений. Рассмотрим следующий итерационный процесс:

$$\begin{aligned}a_n^{N0}(t) &= \psi_n^N(t, \varepsilon), \quad t \in D_T, \\ a_n^{Nk+1}(t) &= a_n^{N0}(t) + \frac{1}{\omega_n^N(\varepsilon)} \int_0^t \int_0^l f\left(s, y, \sum_{j=1}^N a_j^{Nk}(s)b_j^N(y), p(s)\right) \times \\ &\quad \times b_n^N(y) G_n^N(t, s, \varepsilon) dy ds, \quad t \in D_T, \quad k = 0, 1, 2, \dots\end{aligned} \quad (11)$$

Согласно условиям теоремы для первой разности, из (11) следует:

$$\begin{aligned}& \|a^{N1}(t) - a^{N0}(t)\|_{B_2^N(T)} \leq \\ & \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{\omega_n^N(\varepsilon)} \int_0^t \int_0^l \left| f\left(s, y, \sum_{j=1}^N a_j^{N0}(s)b_j^N(y), p(s)\right) \right| \cdot |b_n^N(y) G_n^N(t, s, \varepsilon)| dy ds \leq \\ & \leq \left\{ \sum_{n=1}^N \frac{1}{(\omega_n^N(s))^2} \right\}^{1/2} \times \\ & \times \left\{ \sum_{n=1}^N \left[\int_0^t \int_0^l \left| f\left(s, y, \sum_{j=1}^N a_j^{N0}(s)b_j^N(y), p(s)\right) \right| \cdot |b_n^N(y) G_n^N(t, s, \varepsilon)| dy ds \right]^2 \right\}^{1/2} \leq \\ & \leq M_1 M_2 M_3 \int_0^t \int_0^l \left| f\left(s, y, \sum_{j=1}^N a_j^{N0}(s)b_j^N(y), p(s)\right) \right| dy ds \leq\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq M_1 M_2 M_3 \max_{t \in D_T} \int_0^t \left\| f\left(s, y, \sum_{j=1}^N a_j^{N^0}(s) b_j^N(y), p(s)\right) \right\|_{L_2(D_l)} \left\{ \int_0^l 1^2 dy \right\}^{1/2} ds \leq \\ &\leq M_1 M_2 M_3 \sqrt{l} \Delta, \quad (12) \end{aligned}$$

где

$$M_1 = \left\{ \sum_{n=1}^N \frac{1}{(\omega_n^N(\varepsilon))^2} \right\}^{1/2}, \quad M_2 = \|b^N(x)\|_{B_2^N(l)}, \quad M_3 = \|G^N(t, s)\|_{B_2^N(t)}.$$

Второе условие теоремы при учете (12) дает оценку для второй разности:

$$\begin{aligned} &\|a^{N^2}(t) - a^{N^1}(t)\|_{B_2^N(t)} \leq \\ &\leq M_1 M_2 M_3 \int_0^t \int_0^l H(s, y) \sum_{j=1}^N |a_j^{N^1}(s) - a_j^{N^0}(s)| \cdot |b_j^N(y)| dy ds \leq \\ &\leq M_1 M_2^2 M_3 \int_0^t \int_0^l H(s, y) \|a^{N^1}(s) - a^{N^0}(s)\|_{B_2^N(s)} dy ds \leq \\ &\leq M_1 M_2^2 M_3 \sqrt{l} \int_0^t \left\{ \int_0^l H^2(s, y) dy \right\}^{1/2} \|a^{N^1}(s) - a^{N^0}(s)\|_{B_2^N(s)} ds \leq \\ &\leq (M_1 M_3 \sqrt{l})^2 (M_2)^3 \Delta \int_0^t \|H(s, x)\|_{L_2(D_l)} ds, \quad (13) \end{aligned}$$

где $\|\cdot\|_{B_2^N(t)} = \left[\sum_{n=1}^N |\cdot|^2 \right]^{1/2}$.

Подобно (13), для любого натурального $k > 1$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} &\|a^{N^{k+1}}(t) - a^{N^k}(t)\|_{B_2^N(t)} \leq \\ &\leq M_1 M_2^2 M_3 \int_0^t \int_0^l H(s, y) \|a^{N^k}(s) - a^{N^{k-1}}(s)\|_{B_2^N(s)} dy ds \leq \\ &\leq (M_1 M_3 \sqrt{l})^{k+1} (M_2)^{2k+1} \left[\int_0^t \|H(s, x)\|_{L_2(D_l)} ds \right]^k \frac{\Delta}{k!}. \quad (14) \end{aligned}$$

Существование решения УСНИУ (10) следует из справедливости оценок (12) и (14), так как при $k \rightarrow \infty$ последовательность функций $\{a^{N^k}(t)\}_{k=1}^\infty$ сходится равномерно по t к функции $a^N(t) \in B_2^N(T)$.

Для доказательства единственности решения в пространстве $B_2^N(T)$ предположим, что УСНИУ (10) имеет два решения: $a^N(t) \in B_2^N(T)$ и $\vartheta^N(t) \in B_2^N(T)$. Тогда для их разности справедлива оценка

$$\begin{aligned} &\|a^N(t) - \vartheta^N(t)\|_{B_2^N(t)} \leq \\ &\leq M_1 M_2^2 M_3 \sqrt{l} \int_0^t \|H(s, x)\|_{L_2(D_l)} \|a^N(s) - \vartheta^N(s)\|_{B_2^N(t)} ds. \end{aligned}$$

Отсюда после применения неравенства Гронуолла—Беллмана к последней оценке получаем $\|a^N(t) - \vartheta^N(t)\|_{B_2^N(T)} \equiv 0$ для всех $t \in D_T$. Это и доказывает единственность решения УСНИУ (10) в пространстве $B_2^N(T)$. Теорема доказана. $\square$

4. Разрешимость смешанной задачи. Подстановка решения ССНИУ (6) в (5) дает формальное решение смешанной задачи (1)–(3):

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\psi_n(t, \varepsilon) + \frac{1}{\omega_n(\varepsilon)} \int_0^t \int_0^l f\left(s, y, \sum_{i=1}^{\infty} a_i(s) b_i(y), p(s)\right) b_n(y) G_n(t, s, \varepsilon) dy ds \right] b_n(x). \quad (15)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполняются условия теоремы 1 и $\|\psi_n(t, \varepsilon)\|_{B_2(T)} < \infty$. Если $a^N(t) \in B_2^N(T)$ — решение УСНИУ (10), то (15) дает единственное обобщенное решение смешанной задачи (1)–(3).

Доказательство. Установим, что $\lim_{N \rightarrow \infty} P_N = 0$, где

$$\begin{aligned} P_N = & \int_0^T \int_0^l \left\{ u^N(t, y) \left[-\frac{\partial^3 w(t, y)}{\partial t^3} + 2\varepsilon \frac{\partial^5 w(t, y)}{\partial t^3 \partial y^2} - \varepsilon^2 \frac{\partial^7 w(t, y)}{\partial t^3 \partial y^4} + \right. \right. \\ & + \frac{\partial^6 w(t, y)}{\partial t^2 \partial y^4} - \varepsilon \frac{\partial^8 w(t, y)}{\partial t^2 \partial y^6} - \frac{\partial^5 w(t, y)}{\partial t \partial y^4} + \varepsilon \frac{\partial^7 w(t, y)}{\partial t \partial y^6} + \frac{\partial^8 w(t, y)}{\partial y^8} \left. \right] - \\ & - f(t, y, u^N(t, y), p(t)) w(t, y) \left. \right\} dy dt - \\ & - \int_0^l \phi_1(y) \left[-\frac{\partial^2 w(t, y)}{\partial t^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^4 w(t, y)}{\partial t^2 \partial y^2} - \varepsilon^2 \frac{\partial^6 w(t, y)}{\partial t^2 \partial y^4} + \right. \\ & + \frac{\partial^5 w(t, y)}{\partial t \partial y^4} - \varepsilon \frac{\partial^7 w(t, y)}{\partial t \partial y^6} - \frac{\partial^4 w(t, y)}{\partial y^4} + \varepsilon \frac{\partial^6 w(t, y)}{\partial y^6} \left. \right]_{t=0} dy - \\ & - \int_0^l \phi_2(y) \left[\frac{\partial w(t, y)}{\partial t} - 2\varepsilon \frac{\partial^3 w(t, y)}{\partial t \partial y^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^5 w(t, y)}{\partial t \partial y^4} - \right. \\ & - \frac{\partial^4 w(t, y)}{\partial y^4} + \varepsilon \frac{\partial^6 w(t, y)}{\partial y^6} \left. \right]_{t=0} dy - \\ & - \int_0^l \phi_3(y) \left[-w(t, y) + 2\varepsilon \frac{\partial^2 w(t, y)}{\partial y^2} - \varepsilon^2 \frac{\partial^4 w(t, y)}{\partial y^4} \right]_{t=0} dy. \quad (16) \end{aligned}$$

С учетом начальных условий

$$a_n(0) = \phi_{1n}, \quad a'_n(0) = \phi_{2n}, \quad a''_n(0) = \phi_{3n}$$

после интегрирования по частям отдельных слагаемых в (16) и с учетом условий теоремы получаем следующий функционал:

$$\begin{aligned}
 P_N = & \int_0^l \left(\phi_1(y) - \sum_{n=1}^N \phi_{1n}^N b_n^N(y) \right) \left[-\frac{\partial^2 w(t, y)}{\partial t^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^4 w(t, y)}{\partial t^2 \partial y^2} - \varepsilon^2 \frac{\partial^6 w(t, y)}{\partial t^2 \partial y^4} + \right. \\
 & \left. + \frac{\partial^5 w(t, y)}{\partial t \partial y^4} - \varepsilon \frac{\partial^7 w(t, y)}{\partial t \partial y^6} - \frac{\partial^4 w(t, y)}{\partial y^4} + \varepsilon \frac{\partial^6 w(t, y)}{\partial y^6} \right]_{t=0} dy + \\
 & + \int_0^l \left(\phi_2(y) - \sum_{n=1}^N \phi_{2n}^N b_n^N(y) \right) \left[\frac{\partial w(t, y)}{\partial t} - 2\varepsilon \frac{\partial^3 w(t, y)}{\partial t \partial y^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^5 w(t, y)}{\partial t \partial y^4} - \right. \\
 & \left. - \frac{\partial^4 w(t, y)}{\partial y^4} + \varepsilon \frac{\partial^6 w(t, y)}{\partial y^6} \right]_{t=0} dy + \\
 & + \int_0^l \left(\phi_3(y) - \sum_{n=1}^N \phi_{3n}^N b_n^N(y) \right) \left[-w(t, y) + 2\varepsilon \frac{\partial^2 w(t, y)}{\partial y^2} - \varepsilon^2 \frac{\partial^4 w(t, y)}{\partial y^4} \right]_{t=0} dy + \\
 & + \int_0^T \int_0^l w(t, y) \left\{ f(t, y, u(t, y), p(t)) - \right. \\
 & \left. - \sum_{n=1}^N \int_0^l f(t, z, u^N(t, z), p(t)) b_n^N(z) dz \right\} b_n(y) dy dt. \quad (17)
 \end{aligned}$$

Поскольку $\phi_1(x), \phi_2(x), \phi_3(x) \in L_2(D_l)$, первые три интеграла в (17) стремятся к нулю при $N \rightarrow \infty$. Сходимость разности при $N \rightarrow \infty$ в последнем интеграле (17) следует из условия теоремы, т. е. $\lim_{N \rightarrow \infty} P_N = 0$, что и требовалось. $\square$

5. Устойчивость по начальным данным решения смешанной задачи. Следует отметить, что УСНИУ (10) при $N \rightarrow \infty$ является счетной системой нелинейных интегральных уравнений (ССНИУ). Из доказанных выше двух теорем, в частности, следует однозначная разрешимость ССНИУ (6) в пространстве $B_2(T)$. Поэтому (15) можно переписать в виде интегрального уравнения Вольтерра второго рода:

$$u(t, x) = u_0(t, x) + \int_0^t \int_0^l \bar{H}(t, s, x, y, \varepsilon) f(s, y, u(s, y), p(s)) dy ds, \quad (18)$$

где $u_0(t, x) = \sum_{n=1}^\infty \psi_n(t, \varepsilon) b_n(x)$, $\bar{H}(t, s, x, y, \varepsilon) = \sum_{n=1}^\infty G_n(t, s, \varepsilon) b_n(y) b_n(x)$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполняются условия теоремы 2. Если $a(t) \in B_2(T)$ является решением ССНИУ (6), то решение смешанной задачи (1)–(3) непрерывно зависит от начальных данных (2).

Доказательство. Пусть $u_1(t, x)$ и $u_2(t, x)$ — два различные решения смешанной задачи (1)–(3), соответствующие двум различным начальным данным $\phi_{k1}(x)$ и $\phi_{k2}(x)$, $k = 1, 2, 3$, соответственно.

Положим, что

$$\left\| \phi_{k1}(x) - \phi_{k2}(x) \right\|_{C(D_l)} < \frac{\delta_k}{\alpha_k}, \quad 0 < \delta_k = \text{const}, \quad k = 1, 2, 3,$$

где

$$\alpha_1 = \left\| \frac{1 + \mu(\varepsilon) + \mu^3(\varepsilon)}{\mu(\varepsilon) + \mu^3(\varepsilon)} \right\|_{\ell_2}, \quad \alpha_2 = \left\| \frac{1 + \mu^2(\varepsilon)}{\mu^3(\varepsilon) + \mu^5(\varepsilon)} \right\|_{\ell_2}, \quad \alpha_3 = \left\| \frac{1 + 2\mu(\varepsilon)}{\mu^3(\varepsilon) + \mu^5(\varepsilon)} \right\|_{\ell_2}.$$

Тогда в силу условий теоремы из уравнения (18) следует справедливость оценок

$$\begin{aligned} & \|u_{01}(t, x) - u_{02}(t, x)\|_{C(D_l)} \leq \\ & \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 + \mu_n(\varepsilon) + \mu_n^3(\varepsilon)}{\mu_n(\varepsilon) + \mu_n^3(\varepsilon)} |\phi_{11n}b_n(x) - \phi_{12n}b_n(x)| + \right. \right. \\ & \quad + \frac{1 + \mu_n^2(\varepsilon)}{\mu_n^3(\varepsilon) + \mu_n^5(\varepsilon)} |\phi_{21n}b_n(x) - \phi_{22n}b_n(x)| + \\ & \quad \left. \left. + \frac{1 + 2\mu_n(\varepsilon)}{\mu_n^3(\varepsilon) + \mu_n^5(\varepsilon)} |\phi_{31n}b_n(x) - \phi_{32n}b_n(x)| \right] \right\|_{C(D_l)} \leq \\ & \leq \sum_{k=1}^3 \alpha_k \|\phi_{k1}(x) - \phi_{k2}(x)\|_{C(D_l)} < \delta, \quad (19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \|u_1(t, x) - u_2(t, x)\|_{C(D_l)} \leq \|u_{01}(t, x) - u_{02}(t, x)\|_{C(D_l)} + \\ & + \sqrt{\frac{2}{l}} \overline{M}_1 \overline{M}_2 \overline{M}_3 \max_{t \in D_T} \int_0^t \int_0^l H(s, y) \|u_1(t, y) - u_2(t, y)\|_{C(D_l)} dy ds, \quad (20) \end{aligned}$$

где $\delta = \sum_{k=1}^3 \delta_k$, $\overline{M}_k = \lim_{N \rightarrow \infty} M_{k,N}$, $k = 1, 2, 3$.

Так как по условию теоремы

$$\int_0^t \int_0^l H(s, y) dy ds < \infty,$$

можно применять неравенства Гронуолла—Беллмана к (20). Тогда с учетом (19) из (20) получаем

$$\|u_1(t, x) - u_2(t, x)\|_{C(D_l)} < \varepsilon_0,$$

если положим

$$\delta = \varepsilon_0 \exp \left\{ -\sqrt{\frac{2}{l}} \overline{M}_1 \overline{M}_2 \overline{M}_3 \max_{t \in D_T} \int_0^t \int_0^l H(s, y) dy ds \right\},$$

где $\varepsilon_0 > 0$ — заданное малое число. $\square$

6. Однозначная разрешимость обратной задачи. Воспользуемся условием (4). Тогда интегральное уравнение (18) приобретет вид

$$h(t) = \int_0^t K(t, s) u_0(s, x_0) ds +$$

$$+ \int_0^t K(t, s) \int_0^s \int_0^l \bar{H}(s, \xi, x_0, y, \varepsilon) f(\xi, y, u(\xi, y), p(\xi)) dy d\xi ds, \quad (21)$$

где $u_0(t, x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(t, \varepsilon) b_n(x_0)$, $\bar{H}(t, s, x_0, y, \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t, s, \varepsilon) b_n(y) b_n(x_0)$.

Уравнение (21) — нелинейное интегральное уравнение Вольтерра первого рода относительно пары неизвестных функций $\{u(t, x); p(t)\}$. Запишем его в следующем виде:

$$\int_0^t K(t, s) \int_0^s \int_0^l \bar{H}(s, \xi, x_0, y, \varepsilon) f(\xi, y, u(\xi, y), p(\xi)) dy d\xi ds = \bar{h}(s), \quad (22)$$

где

$$\bar{h}(s) = h(t) - \int_0^t K(t, s) u_0(s, x_0) ds.$$

Здесь очевидно, что $\bar{h}(0) = 0$.

Интегральные уравнения (18) и (22) составляют систему интегральных уравнений относительно пары неизвестных функций $\{u(t, x); p(t)\}$:

$$\begin{aligned} u(t, x) &= u_0(t, x) + \int_0^t \int_0^l \bar{H}(t, s, x, y, \varepsilon) f(s, y, u(s, y), p(s)) dy ds, \\ \int_0^t K(t, s) \int_0^s \int_0^l \bar{H}(s, \xi, x_0, y, \varepsilon) f(\xi, y, u(\xi, y), p(\xi)) dy d\xi ds &= \bar{h}(s). \end{aligned} \quad (23)$$

Для разрешимости системы (23) методом последовательных приближений относительно неизвестной функции $p(t)$ преобразуем уравнение (22). Запишем его в виде

$$p(t) + \int_0^t F(s) p(s) ds = H_1(t, s, u(s, x), p(s)),$$

где $F(t) > 0$ — произвольная функция такая, что

$$\exp(-\eta(t)) \ll 1, \quad \eta(t) = \int_0^t F(s) ds$$

и

$$\begin{aligned} H_1(t, s, u(s, y), p(s)) &= p(t) + \int_0^t F(s) p(s) ds + \bar{h}(t) - \\ &- \int_0^t K(t, s) \int_0^s \int_0^l \bar{H}(s, \xi, x_0, y, \varepsilon) f(\xi, y, u(\xi, y), p(\xi)) dy d\xi ds. \end{aligned}$$

Отсюда имеем (см. [26])

$$\begin{aligned} p(t) &= H_1(t, s, u(s, y), p(s)) \exp(-\eta(t)) + \\ &+ \int_0^t F(s) \exp(-\eta(t-s)) [H_1(t, s, u(s, y), p(s)) - H_1(s, \xi, u(\xi, y), p(\xi))] ds \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
p(t) = & \left[p(t) + \int_0^t F(s)p(s)ds + \bar{h}(t) - \int_0^t K(t, s) \int_0^s \int_0^l \bar{H}(s, \xi, x_0, y, \varepsilon) \times \right. \\
& \times f(\xi, y, u(\xi, y), p(\xi)) dy d\xi ds \left. \right] \exp(-\eta(t)) + \\
& + \int_0^t F(s) \exp(-\eta(t-s)) \left[p(t) + \int_0^t F(s)p(s)ds + \bar{h}(t) - \right. \\
& - \int_0^t K(t, s) \int_0^s \int_0^l \bar{H}(s, \xi, x_0, y, \varepsilon) f(\xi, y, u(\xi, y), p(\xi)) dy d\xi ds - \\
& - p(s) - \int_0^s F(\xi)p(\xi)d\xi - \bar{h}(s) + \int_0^s K(s, \xi) \int_0^\xi \int_0^l \bar{H}(\xi, \zeta, x_0, y, \varepsilon) \times \\
& \times f(\zeta, y, u(\zeta, y), p(\zeta)) dy d\zeta d\xi \left. \right] ds, \quad (24)
\end{aligned}$$

где $\eta(t-s) = \int_s^t F(\xi)d\xi$.

Отсюда вместо (23) получается новая система нелинейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода относительно пары неизвестных функций $\{u(t, x); p(t)\}$:

$$\begin{aligned}
u(t, x) &= \Theta_1(t, x; u, p), \\
p(t) &= \Theta_2(t; u, p),
\end{aligned} \quad (25)$$

где через $\Theta_1(t, x; u, p)$ обозначен оператор в правой части (18), а через $\Theta_2(t; u, p)$ — оператор в правой части (24).

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполняются условия теоремы 3 и условия

- 1) $\max_{t \in D_T} \int_0^t |K(t, s)| \int_0^s \int_0^l |\bar{H}(s, \xi, x_0, y, \varepsilon)| \cdot |f(\xi, y, u(\xi, y), p(\xi))| dy d\xi ds \leq \Delta < \infty$;
- 2) $f(t, x, u, p) \in \text{Lip}\{L_0(t, x)|_{u, p}\}$, где $0 < \int_0^t \int_0^l L_0(s, y) dy ds < \infty$;
- 3) $\max_{t \in D_T} \int_0^t F(s) |\bar{h}(t) - \bar{h}(s)| \exp(-\eta(t-s)) ds \leq \beta < \infty$;
- 4) $\rho = 2 \max \left\{ \max_{t \in D_T} N_1(t); \max_{t \in D_T} N_2(t) \right\} < 1$, где

$$N_1(t) = \int_0^t |K(t, s)| \int_0^s \int_0^l |\bar{H}(s, \xi, x_0, y, \varepsilon)| \cdot L_0(\xi, y) dy d\xi ds, \quad (26)$$

$$N_2(t) = \left(1 + \int_0^t F(s) ds + N_1(t) \right) \cdot N_0(t),$$

$$N_0(t) = \exp(-\eta(t)) + 2 \int_0^t F(s) \exp(-\eta(t-s)) ds. \quad (27)$$

Тогда обратная задача (1)–(4) имеет единственное обобщенное решение $\{u(t, x); p(t)\}$ в области D .

Доказательство. Воспользуемся методом последовательных приближений в сочетании с методом сжимающих отображений:

$$\begin{aligned} u^0(t, x) &= u_0(t, x), \quad u^{k+1}(t, x) = \Theta_1(t, x; u^k, p^k), \\ p^0(t) &= \bar{h}(t) \exp(-\eta(t)), \quad p^{k+1}(t) = \Theta_2(t; u^k, p^k), \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (28)$$

В силу условий теоремы из (28) следуют оценки

$$\|u^1(t, x) - u^0(t, x)\|_C \leq \Delta, \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \|p^1(t) - p^0(t)\|_C &\leq \beta + \\ &+ \left(\bar{h}(t) \exp(-\eta(t)) + \int_0^t F(s) \bar{h}(s) \exp(-\eta(t-s)) ds + \Delta \right) N_0(t), \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \|u^{k+1}(t, x) - u^k(t, x)\|_C &\leq N_1(t) \times \\ &\times \left(\|u^k(t, x) - u^{k-1}(t, x)\|_C + \|p^k(t) - p^{k-1}(t)\|_C \right), \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \|p^{k+1}(t) - p^k(t)\|_C &\leq N_2(t) \times \\ &\times \left(\|u^k(t, x) - u^{k-1}(t, x)\|_C + \|p^k(t) - p^{k-1}(t)\|_C \right). \end{aligned} \quad (32)$$

Так как по условию теоремы

$$\rho = 2 \max \left\{ \max_{t \in D_T} N_1(t); \max_{t \in D_T} N_2(t) \right\} < 1,$$

в силу (29) и (30) из (31) и (32) следует, что операторы Θ_1 и Θ_2 в правой части системы (25) являются сжимающими. Следовательно, обратная задача (1)–(4) имеет единственное решение $\{u(t, x); p(t)\}$ в области D . $\square$

7. Устойчивость решения обратной задачи. Рассмотрим вопрос об устойчивости решения обратной задачи по отношению к функции $h(t)$, заданной в правой части (4).

ТЕОРЕМА 5. Пусть выполняются условия теоремы 4. Тогда решение обратной задачи (1)–(4) устойчиво относительно заданной функции $h(t)$.

Доказательство. Пусть $\{u_1(t, x); p_1(t)\}$ и $\{u_2(t, x); p_2(t)\}$ — две различные пары решений обратной задачи (1)–(4), соответствующие двум различным значениям функции $h_1(t)$ и $h_2(t)$, соответственно. Если

$$\|h_1(t) - h_2(t)\| \leq \delta, \quad 0 < \delta = \text{const}, \quad (33)$$

то из системы (25) следуют оценки

$$\|u_1(t, x) - u_2(t, x)\|_C \leq N_1(t) \times \\ \times (\|u_1(t, x) - u_2(t, x)\|_C + \|p_1(t) - p_2(t)\|_C), \quad (34)$$

$$\|p_1(t) - p_2(t)\|_C \leq N_2(t) (\|u_1(t, x) - u_2(t, x)\|_C + \|p_1(t) - p_2(t)\|_C), \quad (35)$$

где функции $N_0(t)$, $N_1(t)$, $N_2(t)$ определяются из (26)–(27).

Так как по условию теоремы

$$\rho = 2 \max \left\{ \max_{t \in D_T} N_1(t); \max_{t \in D_T} N_2(t) \right\} < 1,$$

из (34) и (35) получаем

$$V_0 < \|h_1(t) - h_2(t)\| + \rho V_0, \quad (36)$$

где $V_0 = \|u_1(t, x) - u_2(t, x)\|_C + \|p_1(t) - p_2(t)\|_C$.

В силу (33) из (36) следует $V_0 < \delta/(1 - \rho)$. Отсюда получаем $V_0 < \varepsilon$, если положим $\delta = \varepsilon(1 - \rho)$. Это и доказывает теорему. $\square$

ORCID

Tursun Yuldashev: <http://orcid.org/0000-0002-9346-5362>

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Александров В. М., Коваленко Е. В. *Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями*. М.: Наука, 1986. 336 с.
2. Алгазин С. Д., Кийко И. А. *Флаттер пластин и оболочек*. М.: Наука, 2006. 248 с.
3. Сенашов С. И. О законах сохранения уравнений пластичности // *Докл. Акад. наук СССР*, 1991. Т. 320, №3. С. 606–608.
4. Джураев Т. Д., Логинов Б. В., Малогина И. А. Вычисления собственных значений и собственных функций некоторых дифференциальных операторов третьего и четвертого порядков // *Дифференциальные уравнения математической физики и их приложения*. Ташкент: Фан, 1989. С. 24–36.
5. Корпусов М. О. *Разрушение в параболических и псевдопараболических уравнениях с двойными нелинейностями*. М.: Либроком, 2012. 186 с.
6. Мукминов Ф. Х., Биккулов И. М. О стабилизации нормы решения одной смешанной задачи для параболических уравнений 4-го и 6-го порядков в неограниченной области // *Матем. сб.*, 2004. Т. 195, №3. С. 115–142. doi: [10.4213/sm810](https://doi.org/10.4213/sm810).
7. Смирнов М. М. *Модельные уравнения смешанного типа четвертого порядка*. Л.: ЛГУ, 1972. 125 с.
8. Юлдашев Т. К. О смешанной задаче для нелинейного уравнения в частных производных четвертого порядка с отражающим отклонением // *Вестник ЮУрГУ. Серия Математика. Механика. Физика*, 2011. № 10 (277) Вып. 4. С. 40–48.
9. Юлдашев Т. К. О смешанной задаче для нелинейного дифференциального уравнения, содержащего квадрат гиперболического оператора и нелинейное отражающее отклонение // *Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех.*, 2011. № 2(14). С. 59–69.
10. Юлдашев Т. К. Смешанная задача для нелинейного интегро-дифференциального уравнения, содержащего куб параболического оператора // *Вестник СибГАУ*, 2011. № 2 (35). С. 96–100.
11. Юлдашев Т. К. Смешанная задача для нелинейного дифференциального уравнения четвертого порядка с малым параметром при параболическом операторе // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2011. Т. 51, №9. С. 1703–1711.

12. Юлдашев Т. К. О смешанной задаче для одного нелинейного интегродифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка // *Журнал СВМО*, 2012. Т. 14, № 2. С. 137–142.
13. Кошелев А. И., Челкак С. И. О регулярности решений систем высших порядков // *Докл. Акад. наук СССР*, 1983. Т. 272, № 2. С. 297–300.
14. Похожаев С. И. О квазилинейных эллиптических уравнениях высокого порядка // *Дифф. урavn.*, 1981. Т. 17, № 1. С. 115–128.
15. Скрыпник И. В. *Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка*. Киев: Наукова думка, 1973. 220 с.
16. Тодоров Т. Г. О непрерывности ограниченных обобщенных решений квазилинейных эллиптических уравнений высокого порядка // *Вестн. Ленингр. ун-в.*, 1975. Т. 19, № 3. С. 56–63.
17. Юлдашев Т. К. Смешанная задача для нелинейного интегродифференциального уравнения с параболическим оператором высокой степени // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2012. Т. 52, № 1. С. 112–123.
18. Юлдашев Т. К. О слабой разрешимости смешанной задачи для нелинейного уравнения с псевдопараболическим оператором высокой степени // *Вестник СибГАУ*, 2012. № 5. С. 110–113.
19. Юлдашев Т. К. Об обобщенной разрешимости смешанной задачи для нелинейного уравнения с псевдопараболическим оператором высокой степени // *Вестник СибГАУ*, 2013. № 2. С. 116–121.
20. Юлдашев Т. К. Смешанная задача для нелинейного уравнения с псевдопараболическим оператором высокой степени // *Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика*, 2013. № 1. С. 277–295.
21. Юлдашев Т. К. Задача Коши для нелинейных уравнений с гиперболическим оператором высокой степени // *Таврический вестник информатики и математики*, 2013. № 1. С. 89–98, <http://tvim.info/node/798>.
22. Юлдашев Т. К. Об обратной задаче для нелинейных интегродифференциальных уравнений высшего порядка // *Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика*, 2014. № 1. С. 153–163.
23. Юлдашев Т. К. Обратная задача для нелинейного интегродифференциального уравнения с гиперболическим оператором высокой степени // *Вестник ЮУрГУ. Серия Математика. Механика. Физика*, 2013. Т. 5, № 1. С. 69–75.
24. Юлдашев Т. К. Обратная задача для одного интегродифференциального уравнения Фредгольма в частных производных третьего порядка // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2014. № 1(34). С. 56–65. doi: [10.14498/vsgtu1299](https://doi.org/10.14498/vsgtu1299).
25. Юлдашев Т. К., Шабаликов К. Х. Обратная задача для гиперболического интегродифференциального уравнения Фредгольма // *Таврический вестник информатики и математики*, 2014. Т. 24, № 1. С. 73–81, <http://tvim.info/node/869>.
26. Юлдашев Т. К. Неявное эволюционное интегральное уравнение Вольтерра первого рода с нелинейным интегральным отклонением // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2009. № 2(19). С. 38–44. doi: [10.14498/vsgtu672](https://doi.org/10.14498/vsgtu672).

Поступила в редакцию 24/VII/2014;
в окончательном варианте — 15/X/2014;
принята в печать — 11/XII/2014.

MSC: 35K70, 35R30

INVERSE PROBLEM FOR A NONLINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION OF THE EIGHTH ORDER

T. K. Yuldashev

M. F. Reshetnev Siberian State Aerospace University,
 31, pr. "Krasnoyarski Rabochiy", Krasnoyarsk, 660014, Russian Federation.

Abstract

We study the questions of solvability of the inverse problem for a nonlinear partial differential equation of the eighth order, left-hand side of which is the superposition of pseudoparabolic and pseudohyperbolic operators of the fourth order. The applicability of the Fourier method of separation of variables is proved in study of mixed and inverse problems for a nonlinear partial differential equation of the eighth order. Using the method of separation of variables, the mixed problem is reduced to the study of the countable system of nonlinear Volterra integral equations of the second kind. Use the given additional conditions led us to study of nonlinear Volterra integral equation of the first kind with respect to the second unknown function (with respect to restore function). With the help of nonclassical integral transform the one-value restore of the second unknown function is reduced to study of the unique solvability of nonlinear Volterra integral equation of the second kind. As a result is obtained a system of two nonlinear Volterra integral equations of the second kind with respect to two unknown functions. This system is one-value solved by the method of successive approximations. Further the stability of solutions of the mixed and inverse problems is studied with respect to initial value and additional given functions.

Keywords: inverse problem, nonlinear partial differential equation, equation of the eighth order, superposition of two operators, correctness of solution.

doi: <http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1335>

ORCID

Tursun Yuldashev: <http://orcid.org/0000-0002-9346-5362>

REFERENCES

1. Aleksandrov V. M., Kovalenko E. V. *Zadachi mekhaniki sploshnykh sred so smeshannymi granichnymi usloviyami* [Problems with Mixed Boundary Conditions in Continuum Mechanics]. Moscow, Nauka, 1986, 336 pp. (In Russian)

© 2015 Samara State Technical University.

How to cite Reference

Yuldashev T. K. Inverse problem for a nonlinear partial differential equation of the eighth order, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 1, pp. 136–154. doi: [10.14498/vsgtu1335](http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1335). (In Russian)

Author Details

Tursun K. Yuldashev (Cand. Phys. & Math. Sci.; tursunbay@rambler.ru), Associate Professor, Dept. of Higher Mathematics.

2. Algazin S. D., Kiiko I. A. *Flatter plastin i obolochek* [Flutter of plates and shells]. Moscow, Nauka, 2006, 248 pp. (In Russian)
3. Senashov S. I. On the conservation laws of the equations of plasticity, *Sov. Phys., Dokl.*, 1991, vol. 36, no. 9, pp. 629–630.
4. Dzhuraev T. D., Loginov B. V., Maliugina I. A. Calculation the Proper Values and Proper Functions of Some Operators of Third and Fourth Orders, *Differentsial'nye uravneniia matematicheskoi fiziki i ikh prilozheniia* [Differential Equations of Mathematical Physics and Their Applications]. Tashkent, Fan, 1989, pp. 24–36 (In Russian).
5. Korpusov M. O. *Razrushenie v parabolicheskikh i psevdoparabolicheskikh uravneniiakh s dvoynymi nelineinostiami* [Destruction in parabolic and pseudoparabolic equations with doubly nonlinearity]. Moscow, Librokom, 2012, 186 pp. (In Russian)
6. Mukminov F. Kh., Bikkulov I. M. Stabilization of the norm of the solution of a mixed problem in an unbounded domain for parabolic equations of orders 4 and 6, *Sb. Math.*, 2004, vol. 195, no. 3, pp. 413–440. doi: [10.1070/SM2004v195n03ABEH000810](https://doi.org/10.1070/SM2004v195n03ABEH000810).
7. Smirnov M. M. *Model'nye uravneniia smeshannogo tipa chetvertogo poriadka* [Model equations of mixed type of the fourth order]. Leningrad, Leningrad State Univ., 1972, 125 pp. (In Russian)
8. Yuldashev T. K. On a mixed value problem for nonlinear partial differential equation of the fourth order with reflecting deviation, *Vestnik YuUrGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Fizika* [Bulletin of South Ural State University. Series of “Mathematics. Mechanics. Physics”], 2011, no. 10 (277) Issue 4, pp. 40–48 (In Russian).
9. Yuldashev T. K. On a mixed value problem for a nonlinear partial differential equation containing a squared hyperbolic operator and nonlinear reflecting deviation, *Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh.*, 2011, no. 2(14), pp. 59–69 (In Russian).
10. Yuldashev T. K. Mixed problem for a nonlinear integro-differential equation involving cube of parabolic operator, *Vestnik SibGAU*, 2011, no. 2 (35), pp. 96–100 (In Russian).
11. Yuldashev T. K. Mixed value problem for a nonlinear differential equation of fourth order with small parameter on the parabolic operator, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2011, vol. 51, no. 9, pp. 1596–1604. doi: [10.1134/S0965542511090181](https://doi.org/10.1134/S0965542511090181).
12. Yuldashev T. K. On a mixed value problem for one nonlinear partial integro-differential equation of the fourth order, *Zhurnal SVMO*, 2012, vol. 14, no. 2, pp. 137–142 (In Russian).
13. Koshelev A. I., Chelkak S. I. On the regularity of solutions of higher order elliptic systems, *Sov. Math., Dokl.*, 1983, vol. 28, pp. 378–380.
14. Pokhozhaev S. I. High-order quasilinear elliptic equations, *Differ. Equ.*, 1981, vol. 17, pp. 78–88.
15. Skrypnik I. V. *Nelineinye ellipticheskie uravneniia vysshego poriadka* [Nonlinear higher order elliptic equations]. Kiev, Naukova dumka, 1973, 220 pp. (In Russian)
16. Todorov T. G. On the regularity of the bounded weak-solutions of non-linear elliptic equations, *Vestn. Leningr. Univ.*, 1975, vol. 19, no. 3, pp. 56–63 (In Russian).
17. Yuldashev T. K. Mixed value problem for nonlinear integro-differential equation with parabolic operator of higher power, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2012, vol. 52, no. 1, pp. 105–116. doi: [10.1134/S0965542512010150](https://doi.org/10.1134/S0965542512010150).
18. Yuldashev T. K. On feeble solubility of mixed problem for nonlinear equation with pseudo-parabolic operator of high degree, *Vestnik SibGAU*, 2012, no. 5, pp. 110–113 (In Russian).
19. Yuldashev T. K. On generalized solvability of mixed value problem for nonlinear equation with pseudoparabolic operator of higher power, *Vestnik SibGAU*, 2013, no. 2, pp. 116–121 (In Russian).
20. Yuldashev T. K. Mixed value problem for nonlinear equation with pseudoparabolic operator of higher power, *Vestn. Voronezh. Gos. Un-ta. Ser. Fizika, Matematika* [Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics], 2013, no. 1, pp. 277–295 (In Russian).
21. Yuldashev T. K. The Cauchy problem for nonlinear hyperbolic equations with a high degree of operator, *Tauricheskii vestnik informatiki i matematiki* [Taurida Journal of Computer

- Science Theory and Mathematics], 2013, no. 1, pp. 89–98 (In Russian), <http://tvim.info/node/798>.
22. Yuldashev T. K. On inverse problem for nonlinear integro-differential equations of the higher order, *Vestn. Voronezh. Gos. Un-ta. Ser. Fizika, Matematika* [Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics], 2014, no. 1, pp. 153–163 (In Russian).
 23. Yuldashev T. K. Inverse problem for nonlinear integral differential equation with hyperbolic operator of a high degree, *Vestnik YuUrGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Fizika* [Bulletin of South Ural State University. Series of “Mathematics. Mechanics. Physics”], 2013, vol. 5, no. 1, pp. 69–75 (In Russian).
 24. Yuldashev T. K. Inverse Problem for a Fredholm Third Order Partial Integro-differential Equation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2014, no. 1(34), pp. 56–65 (In Russian). doi: [10.14498/vsgtu1299](https://doi.org/10.14498/vsgtu1299).
 25. Yuldashev T. K., Shabadikov K. Kh. The inverse problem for the hyperbolic Fredholm integro-differential equations, *Tavrisheskii vestnik informatiki i matematiki* [Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics], 2014, vol. 24, no. 1, pp. 73–81 (In Russian), <http://tvim.info/node/869>.
 26. Yuldashev T. K. Nonexplicit evolution Volterra integral equation of the first kind with nonlinear integral delay, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2009, no. 2(19), pp. 38–44 (In Russian). doi: [10.14498/vsgtu672](https://doi.org/10.14498/vsgtu672).

Received 24/VII/2014;
 received in revised form 15/X/2014;
 accepted 11/XII/2014.