Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2015. Т. 19, № 1. С. 186–202
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1412

Механика деформируемого твёрдого тела

УДК 539.3

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ И ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ КОНТИНУУМА*

Ю. Н. Радаев[1]***, В. А. Ковалев***[2]

[1] Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН,
Россия, 119526, Москва, просп. Вернадского, 101, корп. 1.
[2] Московский городской университет управления Правительства Москвы,
Россия, 107045, Москва, ул. Сретенка, 28.

Аннотация

Рассматриваются теории и задачи той части термомеханики континуума, которая не может быть корректно сформулирована вне рамок гиперболических уравнений и систем таких уравнений. При этом внимание сфокусировано на двух относительно новых гиперболических теориях: теории трёхмерного идеально пластического течения и теории микрополярной термоупругости второго типа (type-II thermoelasticity). Исследуются трёхмерные статические и кинематические уравнения теории идеальной пластичности Ишлинского—Ивлева с точки зрения их аналитической классификации, определения характеристических направлений и возможных подходов к построению интегрируемых соотношений. Новые подходы к гиперболическим формулировкам связываются с введением дополнительных базисных переменных, когда допустимыми признаются не только термодинамические переменные состояния (так называемые «медленные переменные»), ассоциированные с термическими и микроструктурными свойствами континуума, но и их референциальные градиенты («быстрые переменные»). Развивается гиперболическая термомеханика микрополярных термоупругих сред на основе теоретико-полевой схемы и с помощью вариационного функционала действия и принципа наименьшего действия.

Ключевые слова: континуум, гиперболичность, идеальная пластичность, термоупругость, действие, принцип наименьшего действия.

Образец для цитирования
Радаев Ю. Н., Ковалев В. А. Гиперболические теории и задачи механики континуума // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2015. Т. 19, № 1. С. 186–202. doi: 10.14498/vsgtu1412.

Сведения об авторах
Юрий Николаевич Радаев (д.ф.-м.н.; radayev@ipmnet.ru; автор, ведущий переписку), ведущий научный сотрудник, лаб. моделирования в механике деформируемого твердого тела.
Владимир Александрович Ковалев (д.ф.-м.н., проф.; vlad_koval@mail.ru), профессор, каф. прикладной математики и аналитической поддержки принятия решений.

*Настоящая статья представляет собой расширенный вариант доклада [1], сделанного авторами на Четвёртой международной конференции «Математическая физика и её приложения» (Россия, Самара, 25 августа – 1 сентября 2014).

doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1412

Вводные замечания. Гиперболические теории и соответствующие гиперболические дифференциальные уравнения в частных производных — единственно возможный подход в механике континуума, приводящий к выполнению принципа «конечности» скорости переноса энергии и импульса и допускающий возможность распространения энергии и импульса на большие расстояния, не сопровождающегося возрастанием энтропии. Последнее обстоятельство выступает в качестве одного из признаков существования волновых решений соответствующих систем дифференциальных уравнений в частных производных. Как известно, механика континуума включает ряд нелинейных гиперболических теорий [2]. Особого упоминания здесь заслуживают газовая динамика, теория идеально пластических сред [3, 4], связанная термоупругость второго типа (type-II thermoelasticity) [5].

Весьма заметный прогресс в той части термомеханики континуума, которая не может быть корректно сформулирована вне рамок гиперболических уравнений, связан прежде всего с тем, что при построении математических моделей в качестве базисных переменных допускаются не только термодинамические переменные состояния (так называемые «медленные переменные»), ассоциированные с термическими и микроструктурными свойствами континуума, но и их референциальные градиенты («быстрые переменные»). При этом переменные состояния и их градиенты считаются функционально независимыми. Именно следуя по этому пути, удаётся создать новую термомеханику континуума с гиперболическими уравнениями транспорта тепла. Последнее обстоятельство вполне соответствует новой гиперболической парадигме развития теории и механики континуума [2]. В работе рассматриваются две относительно новые гиперболические теории: теория трёхмерного идеально пластического течения и теория микрополярной термоупругости второго типа.

Переход к трёхмерной гиперболической модели в математической теории пластичности исторически связан с известной статьей А. Ю. Ишлинского [6], относящейся 1946 г., и в существенных чертах был выполнен в ряде работ Д. Д. Ивлева, начиная с 1959 г. А. Ю. Ишлинский принял в качестве определяющего закона тензорное уравнение перестановочности (см. [7]) тензора напряжений и тензора приращения пластической деформации при условии, что имеются два конечных соотношения, связывающих главные нормальные напряжения. Работы Д. Д. Ивлева базировались на предположении о том, что текучесть реализуется на ребре призмы Кулона—Треска, когда имеются ровно два соотношения, связывающих главные нормальные напряжения, и на *обобщённом* ассоциированном законе пластического течения. Как было показано в [7], этот подход эквивалентен теории А. Ю. Ишлинского, если рассматривается ребро призмы Кулона—Треска. Пространственные уравнения А. Ю. Ишлинского полностью сохраняют свое значение в современной математической теории пластичности и их можно использовать при постановке и решении задач теории идеальной пластичности, поскольку они являются следствиями обобщённого ассоциированного закона течения в случае течения на ребре призмы Кулона—Треска.

В представляемой работе исследуются трёхмерные статические и кинематические уравнения теории идеальной пластичности Ишлинского—Ивлева с точки зрения их аналитической классификации, определения характеристических направлений и возможных подходов к построению интегрируемых соотношений.

С помощью гиперболических уравнений, следуя [8], может быть изучена кинематика трёхмерного пластического течения на поверхностях скольжения (поверхностях максимальной скорости сдвига). Вдоль этих поверхностей касательная составляющая вектора приращения перемещений $d\mathbf{u}$ разрывна; тензор приращения пластических деформаций $d\boldsymbol{\varepsilon}$ допускает следующее представление ($\mathbf{N}$ — единичный вектор, ортогональный поверхности скольжения):

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = \psi([d\mathbf{u}] \otimes \mathbf{N} + \mathbf{N} \otimes [d\mathbf{u}]),$$

где ψ — некоторая функция, определённая на поверхности скольжения. Деформация в нормальных сечениях поверхности скольжения представляет собой сдвиг одной стороны поверхности относительно другой ее стороны. В одном из нормальных сечений поверхности скольжения скорость деформации сдвига максимальна. Это нормальное сечение имеет направление вектора разности векторов тангенциальных приращений вектора перемещения с двух сторон поверхности. Линия пересечения этого нормального сечения с касательной плоскостью указывает направление максимальной скорости сдвига. Значительный интерес представляют собой соотношения, связывающие скачки тангенциальных приращений перемещений при переходе через линии сильного разрыва, расположенные на поверхности максимальной скорости сдвига. Указанные линии являются асимптотическими линиями поверхности максимальной скорости сдвига, а соотношения вдоль них, связывающие скачки, оказываются интегрируемыми. Таким образом, скольжения внутри тела проявляются как результат микроскольжений вдоль наименее искривленных *асимптотических* линий на гиперболических поверхностях максимальной скорости сдвига.

В рамках гиперболической теории удается проанализировать [9] уравнения совместности для приращений малых деформаций в триортогональной изостатической системе координат, а также дополнительные соотношения, связывающие физические компоненты тензора несовместности. Как хорошо известно, существенных уравнений совместности шесть. Для напряженных состояний, соответствующих ребру призмы Кулона—Треска, имеются лишь три независимых уравнения совместности, причём явно могут быть указаны различные системы независимых уравнений совместности. При этом находятся условия, достаточные для того, чтобы при выполнении трёх независимых уравнений совместности удовлетворялись три оставшихся уравнения совместности. Интересно отметить следующий результат: нарушения сплошности на поверхности идеально пластического тела распространяются вглубь тела вдоль асимптотических линий на слоях векторного поля, указывающего направления наибольшего главного нормального напряжения. Поскольку асимптотические линии наименее искривлены по сравнению с любыми другими линиями на поверхности (в том смысле, что нормальная кривизна асимптотических линий равна нулю), нарушения сплошности проникают вглубь идеально пластического тела по наименее искривленным траекториям, что позволяет вести речь о минимальном искривлении траекторий распространения трещин в идеально пластических твердых телах.

Широкое распространение в механике континуума гиперболические теории получили в связи с необходимостью объяснения волновой природы связанных термоупругих волн, обнаруживаемых экспериментально в области низких температур в кристаллах высокой чистоты. Термомеханика гиперболических термоупругих сред может быть развита на основе теоретико-полевой концепции с помощью принципа наименьшего действия [5, 10]. Стандартные теории поля (см., например, [11]) развиваются на базе трёхмерного евклидова пространства и независимого абсолютного времени. Более общая задача состоит в том, чтобы выработать ковариантную формулировку всех классических физических теорий на основе пространственно-временного многообразия Минковского (или искривленного риманова пространства-времени). Единственная известная в настоящее время полевая гиперболическая модель недиссипативной термоупругости в термодинамически корректной форме была предложена Грином (A. E. Green) и Нахди (P. M. Naghdi) в 1992 г. и терминологически обозначается как термоупругость второго типа. Указанная теория может быть построена в каноническом отсчётном описании с позиций теории поля с соответствующим образом подобранным лагранжианом. Важными элементами теоретико-полевого подхода являются ковариантность дифференциальных уравнений поля и наличие вариационных симметрий поля. Последние позволяют находить законы сохранения, которые выступают в роли «первых интегралов» дифференциальных уравнений поля.

С помощью гиперболических уравнений теории термоупругости второго типа исследуются задачи о распространении без затухания связанных гармонических термоупругих волн «второго звука» в длинных цилиндрических волноводах [5]. При этом численно находятся волновые числа (постоянные распространения), соответствующие незатухающим связанным термоупругим волнам, способным распространяться на неограниченные расстояния вдоль волновода.

1. Гиперболическая теория идеально пластического течения на ребре призмы Кулона—Треска. Рассмотрим уравнения равновесия для напряжённых состояний, соответствующих ребру призмы Кулона—Треска. Обозначим через $\boldsymbol{\sigma}$ тензор напряжений; $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ — ортонормированный базис из собственных векторов тензора напряжений.

Спектральное разложение тензора напряжений имеет вид

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_1 \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} + \sigma_2 \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \sigma_3 \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}. \tag{1}$$

В пространстве главных напряжений ребра призмы Кулона—Треска определяются уравнениями

$$\sigma_1 \pm 2k = \sigma_2 = \sigma_3, \quad \sigma_1 = \sigma_2 \pm 2k = \sigma_3, \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2k.$$

Для данного напряжённого состояния, соответствующего ребру призмы Треска, всегда можно перенумеровать главные оси тензора напряжений так, чтобы выполнялось равенство

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2k.$$

Последнее условие означает, что два главных напряжения равны по величине, а главное напряжение σ_3 является либо наименьшим, либо наибольшим главным нормальным напряжением.

Равенство двух главных напряжений $\sigma_1 = \sigma_2$ означает, что любое направление, расположенное в плоскости, ортогональной вектору $\mathbf{n}$, является главным. Ясно поэтому, что при соответствии напряжённого состояния ребру призмы Кулона—Треска имеется известная доля произвола при выборе собственных векторов $\mathbf{l}$ и $\mathbf{m}$ (они определены с точностью до поворотов в плоскости, ортогональной вектору $\mathbf{n}$).

Так как $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ — ортонормированный базис,

$$\mathbf{l} \otimes \mathbf{l} + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} = \mathbf{I}, \tag{2}$$

где $\mathbf{I}$ — единичный тензор.

Учитывая (1), (2) и уравнение ребра призмы Кулона—Треска

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2k,$$

получим

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_3 \pm 2k)\mathbf{I} \mp 2k\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}. \tag{3}$$

Таким образом, тензор напряжений определяется скалярным полем σ_3 и единичным векторным полем $\mathbf{n}$.

Уравнение равновесия

$$\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$$

после подстановки в него разложения (3) можно представить в следующем виде:

$$\mathrm{grad}\,\sigma_3 \mp 2k\mathrm{div}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) = \mathbf{0} \quad (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1). \tag{4}$$

Следовательно, задача о равновесии тела, напряжённое состояние которого соответствует ребру призмы Кулона—Треска, формально статически определима (поскольку имеются ровно три уравнения для определения трёх неизвестных: собственного значения σ_3 и, например, двух углов, задающих ориентацию единичного вектора $\mathbf{n}$), если граничные условия заданы в напряжениях. Уравнения равновесия могут быть рассмотрены независимо от кинематических уравнений.

Обозначим через Σ отношение σ_3 к $\mp 2k$ и приведём уравнение (4) к виду

$$\mathrm{grad}\,\Sigma + \mathrm{div}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) = \mathbf{0} \quad (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1). \tag{5}$$

Отметим также еще одну инвариантную форму уравнения (5):

$$\boldsymbol{\nabla}\Sigma + (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{n} + \mathbf{n}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{n}) = \mathbf{0}. \tag{6}$$

Для единичного векторного поля справедлива формула

$$(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{n} = -\mathbf{n} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{n},$$

с помощью которой векторное уравнение (6) может быть также представлено в виде

$$\boldsymbol{\nabla}\Sigma - \mathbf{n} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{n} + \mathbf{n}\mathrm{div}\mathbf{n} = \mathbf{0}. \tag{7}$$

Поскольку для любого единичного векторного поля имеем

$$|\mathbf{n}\mathrm{div}\mathbf{n} - \mathbf{n} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{n}|^2 = |\mathrm{div}\mathbf{n}|^2 + |\mathbf{n} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{n}|^2,$$

и в силу тождества Эйлера—Лагранжа[1]

$$|\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{n}|^2 = |\operatorname{rot} \mathbf{n}|^2 - (\mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{n})^2,$$

оказывается справедливым соотношение

$$|\mathbf{n}\operatorname{div}\mathbf{n} - \mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{n}|^2 = |\operatorname{div}\mathbf{n}|^2 + |\operatorname{rot} \mathbf{n}|^2 - (\mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{n})^2,$$

из которого с помощью уравнения (7) находим

$$|\boldsymbol{\nabla}\Sigma|^2 = |\operatorname{div}\mathbf{n}|^2 + |\operatorname{rot} \mathbf{n}|^2 - (\mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{n})^2,$$

откуда сразу же следует неравенство

$$|\boldsymbol{\nabla}\Sigma|^2 \leqslant |\operatorname{div}\mathbf{n}|^2 + |\operatorname{rot} \mathbf{n}|^2 .$$

Исследуем характеристики векторного уравнения (7). Для этого будем трактовать характеристические поверхности уравнения (7) как поверхности слабого разрыва Σ и $\mathbf{n}$ и воспользуемся условиями совместности Адамара—Томаса

$$[\boldsymbol{\nabla}\Sigma] = B\mathbf{N}, \quad [\boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{n}] = \mathbf{N} \otimes \mathbf{b}, \tag{8}$$

где квадратные скобки [ ] обозначают скачок при переходе через поверхность слабого разрыва; $\mathbf{N}$ — единичный вектор нормали к поверхности слабого разрыва; B, $\mathbf{b}$ — некоторые поля, определённые на этой поверхности, причём равенства $B = 0$ и $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ не могут выполняться одновременно ни в какой точке поверхности, если рассматриваемая поверхность есть действительно поверхность слабого разрыва.

На основании уравнения (7) имеем

$$[\boldsymbol{\nabla}\Sigma] - \mathbf{n} \times [\operatorname{rot} \mathbf{n}] + \mathbf{n}\,[\operatorname{div}\mathbf{n}] = \mathbf{0}$$

и, применяя условия совместности (8), получим

$$B\mathbf{N} - \mathbf{n} \times (\mathbf{N} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{N} \cdot \mathbf{b})\mathbf{n} = \mathbf{0}. \tag{9}$$

Кроме того, так как $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$, то $\mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{n})^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}$ и, следовательно, $(\mathbf{b} \cdot \mathbf{n})\mathbf{N} = \mathbf{0}$, что приводит к следующему соотношению на поверхности слабого разрыва:

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{n} = 0. \tag{10}$$

Замечая, что

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{N} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{b})\mathbf{N} - (\mathbf{N} \cdot \mathbf{n})\mathbf{b}$$

и учитывая (10), уравнение (9) приводим к виду

$$B\mathbf{N} + (\mathbf{N} \cdot \mathbf{n})\mathbf{b} + (\mathbf{N} \cdot \mathbf{b})\mathbf{n} = \mathbf{0}. \tag{11}$$

[1] Речь идёт о тождестве

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2\,|\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2,$$

справедливом для любых двух векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$.

Умножим обе части этого уравнения скалярно на вектор $\mathbf{N}$:

$$B + 2(\mathbf{N}\cdot\mathbf{n})(\mathbf{N}\cdot\mathbf{b}) = 0. \tag{12}$$

Умножая обе части уравнения (11) скалярно на вектор $\mathbf{n}$, получим также

$$B(\mathbf{N}\cdot\mathbf{n}) + \mathbf{N}\cdot\mathbf{b} = 0.$$

Подставляя в это уравнение выражение для B, полученное с помощью предыдущего уравнения, находим, что

$$(\mathbf{N}\cdot\mathbf{b})(1 - 2(\mathbf{N}\cdot\mathbf{n})^2) = 0.$$

Это уравнение распадается на два. Если $\mathbf{N}\cdot\mathbf{b} \neq 0$, то необходимо

$$\mathbf{N}\cdot\mathbf{n} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{13}$$

Если $\mathbf{N}\cdot\mathbf{b} = 0$, то на основании (12) $B = 0$, и тогда уравнение (11) даёт

$$(\mathbf{N}\cdot\mathbf{n})\mathbf{b} = \mathbf{0},$$

откуда в силу того, что равенства $B = 0$ и $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ не могут выполняться одновременно,

$$\mathbf{N}\cdot\mathbf{n} = 0.$$

Итак, уравнение (7) принадлежит к гиперболическому типу. Его характеристическое уравнение имеет три различных вещественных корня. Нормали к характеристическим поверхностям в силу (13) образуют круговой конус с углом полураствора $\pi/4$ и осью, ориентированной вдоль вектора $\mathbf{n}$. Характеристическими являются также интегральные поверхности поля $\mathbf{n}$ (т. е. поверхности, составленные из интегральных кривых векторного поля $\mathbf{n}$).

Рассмотрим далее кинематические уравнения. Уравнения обобщённого ассоциированного закона течения, сформулированного для ребра призмы Треска, позволяют найти помимо условия соосности тензоров $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ и $\boldsymbol{\sigma}$ (да и то с точностью до поворота триэдра главных осей в плоскости, ортогональной вектору $\mathbf{n}$) еще только одно существенное соотношение — условие несжимаемости:

$$d\varepsilon_1^P + d\varepsilon_2^P + d\varepsilon_3^P = 0.$$

Его можно также представить в форме

$$d\varepsilon_{jj}^P = 0 \tag{14}$$

или в инвариантной прямой записи

$$\operatorname{tr}(d\boldsymbol{\varepsilon}^P) = 0.$$

Последнее обстоятельство имеет принципиально важное значение: для напряжённых состояний, соответствующих ребру призмы Треска, пластическое течение имеет наибольшую свободу, и именно поэтому возрастает вероятность построить решения ряда важнейших прикладных задач, привлекая схему полной пластичности Хаара—Кармана[2]. Ясно, что напряжённые состояния, соответствующие граням призмы Треска, могут реализовываться лишь в исключительных случаях, поскольку при этом имеется весьма сильное кинематическое ограничение: одна из главных скоростей пластических деформаций должна быть равна нулю. Граням призмы соответствуют чисто сдвиговые течения, когда главные приращения пластических деформаций удовлетворяют условиям

$$d\varepsilon_i^P = 0, \quad d\varepsilon_j^P + d\varepsilon_l^P = 0 \quad (i \neq j,\, j \neq l,\, l \neq i).$$

Условие соосности тензоров $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ и $\boldsymbol{\sigma}$ в силу (1) может быть сформулировано как

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^P = \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} d\varepsilon_1^P + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} d\varepsilon_2^P + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} d\varepsilon_3^P. \tag{15}$$

Здесь векторы $\mathbf{l}$ и $\mathbf{m}$ уже выступают как собственные векторы тензора $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$, и поэтому их ориентация в плоскости, ортогональной вектору $\mathbf{n}$, уникальна. Если тензор напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ соответствует ребру призмы Кулона—Треска и задан, то ориентация вектора $\mathbf{n}$ известна, а ориентации векторов $\mathbf{l}$ и $\mathbf{m}$ неопределенны до тех пор, пока не определено поле скоростей. Поэтому далее в кинематических уравнениях мы задействуем лишь вектор $\mathbf{n}$.

Соотношение (15) позволяет заключить, что

$$\mathbf{n} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^P = \mathbf{n} d\varepsilon_3^P,$$

или также

$$\mathbf{n} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^P \cdot \mathbf{n} = d\varepsilon_3^P$$

и кроме того

$$\mathbf{n} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^P = \mathbf{n} \operatorname{tr}((\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^P). \tag{16}$$

Полученное уравнение устанавливает лишь только тот факт, что вектор $\mathbf{n}$ — собственный вектор тензора $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$. Проектируя векторное уравнение (16) на оси некоторой прямоугольной системы координат x_1, x_2, x_3, можно получить три скалярных уравнения

$$n_j d\varepsilon_{ij}^P = n_i n_k n_l d\varepsilon_{kl}^P. \tag{17}$$

Только два из них будут независимыми. Действительно, свёрнутые с n_i соотношения (17) удовлетворяются тождественно, что указывает на их линейную зависимость.

Два независимых уравнения из (17) вместе с уравнением несжимаемости (14) образуют систему из *трёх* независимых уравнений

$$\begin{aligned} &d\varepsilon_{jj}^P = 0, \\ &n_j d\varepsilon_{ij}^P = n_i n_k n_l d\varepsilon_{kl}^P, \end{aligned} \tag{18}$$

[2]Эта гипотеза (по крайней мере в пространственном варианте) принадлежит Д. Д. Ивлеву. Применительно к осесимметричной задаче точно такая же мысль высказывалась Шилдом.

которые после подстановки в них вместо приращений пластических деформаций *трёх* приращений перемещений согласно

$$2d\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{\nabla} \otimes d\mathbf{u}) + (\boldsymbol{\nabla} \otimes d\mathbf{u})^{\mathrm{T}}$$

или, переходя к прямоугольной системе координат x_1, x_2, x_3,

$$2d\varepsilon_{ij}^{P} = \partial_i(du_j) + \partial_j(du_i),$$

позволяют полностью исследовать кинематику пластического течения, если поле напряжений уже определено.

Система кинематических уравнений (18)

$$\begin{aligned} &\mathrm{tr}\,(d\boldsymbol{\varepsilon}^{P}) = 0, \\ &\mathbf{n} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^{P} = \mathbf{n}\mathrm{tr}((\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^{P}), \end{aligned} \tag{19}$$

описывающая идеально пластическое течение на ребре призмы Кулона—Треска, правильно определённая и гиперболическая. Характеристические направления этой системы, как показывает несложный расчёт, совпадают с характеристическими направлениями системы трёхмерных статических уравнений.

Действительно, будем трактовать характеристические поверхности системы уравнений (19) как поверхности слабого разрыва приращений перемещений $d\mathbf{u}$ и воспользуемся геометрическаими условиями совместности Адамара—Томаса:

$$[\boldsymbol{\nabla} \otimes d\mathbf{u}] = \mathbf{N} \otimes \mathbf{a},$$

где [ ] обозначает скачок при переходе через поверхность слабого разрыва, $\mathbf{N}$ — единичный вектор нормали к поверхности слабого разрыва, $\mathbf{a}$ — некоторое ненулевое векторное поле, определённое на этой поверхности. На основании соотношений Коши

$$2\left[d\boldsymbol{\varepsilon}^{P}\right] = \mathbf{N} \otimes \mathbf{a} + \mathbf{a} \otimes \mathbf{N},$$

следовательно,

$$\mathrm{tr}\left(\left[d\boldsymbol{\varepsilon}^{P}\right]\right) = \mathbf{N} \cdot \mathbf{a}.$$

Учитывая полученные формулы, из уравнений системы (19) находим следующие соотношения для вектора $\mathbf{N}$:

$$\begin{aligned} &\mathbf{N} \cdot \mathbf{a} = 0, \\ &(\mathbf{n} \cdot \mathbf{N})\mathbf{a} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{a})\mathbf{N} - 2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{N})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{a})\mathbf{n} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Проектируя последнее из полученных уравнений на ортогональные друг другу направления $\mathbf{N}$, $\mathbf{a}$, получаем

$$\begin{aligned} &(\mathbf{n} \cdot \mathbf{a})(1 - 2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{N})^2) = 0, \\ &(\mathbf{n} \cdot \mathbf{N})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - 2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{a})^2) = 0. \end{aligned} \tag{20}$$

В зависимости от того, выполняется ли условие $\mathbf{n} \cdot \mathbf{a} = 0$, имеем $\mathbf{n} \cdot \mathbf{N} = 0$ или $1 - 2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{N})^2 = 0$[3]. Поэтому нормали к характеристическим поверхностям

[3] Любопытно отметить, что во втором случае (т. е. когда $\mathbf{n} \cdot \mathbf{a} \neq 0$) с помощью второго уравнения системы (20) можно установить, что вектор $\mathbf{a}$, обладая произвольным модулем, должен составлять с вектором $\mathbf{n}$ угол $\pm\pi/4$.

образуют конус с углом полураствора $\pi/4$ и осью, ориентированной вдоль вектора $\mathbf{n}$. Конус нормалей к характеристическим поверхностям для системы кинематических уравнений пространственной задачи математической теории пластичности (в случае течения на ребре призмы Треска) тот же самый, что и для системы уравнений равновесия. Ясно, что на основании $\mathbf{n}\cdot\mathbf{N}=0$ характеристическими поверхностями являются также и интегральные поверхности поля $\mathbf{n}$ (т. е. поверхности, составленные из интегральных кривых поля $\mathbf{n}$). Все это указывает на гиперболичность системы уравнений (19).

2. Гиперболическая полевая теория микрополярного термоупругого континуума с «нежестким» репером ассоциированных директоров. Теория континуума с дополнительными (помимо трансляционных) ротационными степенями свободы и моментными напряжениями была создана в 1909 г. Э. и Ф. Коссера [10]. Исторически теоретико-полевой метод оказался весьма важным и эффективным инструментом вывода уравнений микрополярного упругого континуума, поскольку обеспечивал возможность отхода от традиционного пути представления внутренних напряжений симметричным тензором напряжений Коши. Указанный подход благодаря своим очевидным преимуществам использовался, например, в классической работе [12]. В этой статье принцип наименьшего действия был положен в основу математической модели континуума с микроструктурой, определяемой «нежестким» репером локальных поворотов, вывода дифференциальных уравнений микрополярного поля в форме соответствующих функционалу действия уравнений Эйлера—Лагранжа и определяющих уравнений, а также построения канонических полевых скаляров и тензоров, таких как энергия, импульс и угловой импульс. Наиболее фундаментальное положение теории поля состоит в том, что физическое поле математически описывается интегральным функционалом действия $\Im$:

$$\Im=\int\mathscr{L}(\varphi^k,\partial_\alpha\varphi^k,\partial_\gamma\partial_\alpha\varphi^k,\ldots,X^\beta)d^4X, \tag{21}$$

где $\mathscr{L}$ — плотность лагранжиана (плотность действия); φ^k — упорядоченный набор физических полевых величин, число которых предполагается конечным; X^β $(\beta=1,2,3,4)$ — пространственно-временные координаты; $X^4=ct$ (константа c имеет смысл характерной скорости и ее можно положить равной единице); d^4X — «естественный» элемент объема пространства-времени. Область интегрирования 4-пространства в (21), в пределах которой изменяются пространственно-временные координаты X^1, X^2, X^3, X^4, неспецифицирована и в принципе в этом не нуждается.

Под символом d^4X в (21) мы понимаем «естественный» пространственно-временной элемент объема, представляющий собой произведение дифференциалов пространственно-временных координат:

$$d^4X=dX^1dX^2dX^3dX^4.$$

Как это принято в современных работах по теории поля (см. также [13]), через ∂_β в представлении действия (21) и далее обозначается оператор *полного* дифференцирования по пространственно-временной координате X^β:

$$\partial_\beta=\partial_\beta^{\text{expl}}+\sum_{s\geqslant0}\left(\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_s}\partial_\beta\varphi^l\right)\frac{\partial}{\partial(\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_s}\varphi^l)},$$

где $\partial_\beta^{\text{expl}}$ — оператор частного дифференцирования по *явному* вхождению переменной X^β.

Математическое описание физического поля основывается на вариационном принципе, который по соображениям исторического характера называется в современной научной литературе вариационным принципом Гамильтона—Остроградского (или принципом наименьшего действия). Этот принцип утверждает, что действительное поле реализуется в пространстве-времени таким образом, что действие оказывается экстремальным, т. е. первая вариация действия обращается в нуль для всех допустимых вариаций физических полей φ^k:

$$\delta\mathfrak{I} = 0.$$

Здесь не подвергаются варьированию пространственно-временные координаты X^β и 4-область интегрирования.

Из принципа наименьшего действия получаются дифференциальные уравнения поля в форме уравнений Эйлера—Лагранжа

$$\mathscr{E}_k(\mathscr{L}) = 0,$$

где

$$\mathscr{E}_k(\mathscr{L}) \equiv \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi^k} - \partial_\beta\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)} + \partial_\gamma\partial_\beta\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\gamma\partial_\beta\varphi^k)} - \cdots$$

есть важнейший дифференциальный оператор математической физики — оператор Эйлера.

Вариационный принцип наименьшего действия Гамильтона—Остроградского, являющийся фундаментальным для теории поля, устанавливает тесную связь физических теорий поля с дифференциальной геометрией искривленных пространств Римана, вариационным исчислением, теорией групп преобразований, вариационных симметрий и законов сохранения для систем дифференциальных уравнений в частных производных.

В микрополярных теориях «конечная» деформация тела, представляемая геометрическим преобразованием

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$$

положения $\mathbf{X}$ отсчётной конфигурации в соответствующее актуальное место $\mathbf{x}$, сопровождается дополнительной деформацией (экстрадеформацией), описываемой нарушениями геометрии системы трёх пространственных полярных d-векторов (директоров) $\underset{\mathfrak{a}}{\mathbf{d}}$ $(\mathfrak{a} = 1, 2, 3)$, связанных с микроэлементом:

$$\underset{\mathfrak{a}}{\mathbf{d}} = \underset{\mathfrak{a}}{\mathbf{d}}(\mathbf{X}, t).$$

Изменение репера $\underset{\mathfrak{a}}{\mathbf{d}}$ $(\mathfrak{a} = 1, 2, 3)$ характеризуется его возможной деформацией (сдвиги трёхгранника и удлинения его рёбер) и поворотом. Таким образом, каждый элемент континуума обладает большим число степеней свободы. С дополнительными степенями свободы, которыми наделяется микроэлемент, связаны и дополнительная инерция, импульс, кинетическое и деформационное действие. В оригинальной работе Э. и Ф. Коссера [10] движение репера

$\underset{\mathfrak{a}}{\mathbf{d}}$ ($\mathfrak{a} = 1, 2, 3$) предполагалось «жёстким», следовательно, помимо трёх трансляционных степеней свободы микроэлемент континуума Коссера обладает лишь тремя дополнительными ротационными степенями свободы. Возможность только «жёсткой» трансформации d-репера можно выразить уравнением

$$g_{ij}\underset{\mathfrak{a}}{d^i}\underset{\mathfrak{b}}{d^j} = \underset{\mathfrak{ab}}{\delta} \qquad (\mathfrak{a},\ \mathfrak{b} = 1, 2, 3),$$

где g_{ij} — компоненты эйлеровой пространственной метрики, $\underset{\mathfrak{ab}}{\delta}$ — символ Кронекера, которое, очевидно, имеет смысл дополнительного кинематического ограничения, навязываемого полевым переменным $\underset{\mathfrak{a}}{\mathbf{d}}$ ($\mathfrak{a} = 1, 2, 3$).

Переменные $\mathbf{X}$ и $\mathbf{x}$ выступают как соответственно лагранжева и эйлерова переменные, если пользоваться стандартной терминологиней механики континуума. С этими переменными связаны метрики $g_{\alpha\beta}$, g_{ij}. Референциальная и пространственная системы отсчёта предполагаются инерциальными. В качестве основной термической переменной примем температурное смещение ϑ, которое определяется как первообразная по времени (при фиксированных Лагранжевых переменных) от абсолютной температуры θ.

В лагранжевых X^α ($\alpha = 1, 2, 3$) и эйлеровых координатах x^j ($j = 1, 2, 3$) естественная плотность действия (лагранжиан) в расчёте на единицу объёма в отсчётном состоянии

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(X^\alpha, x^j, \underset{\mathfrak{a}}{d^j}, \vartheta, \dot{x}^j, \underset{\mathfrak{a}}{\dot{d}^j}, \dot{\vartheta}, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha \underset{\mathfrak{a}}{d^j}, \partial_\alpha\vartheta) \tag{22}$$

представляет собой разность плотности кинетической энергии и свободной энергии Гельмгольца

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\rho_{\mathrm{R}}(X^\alpha)g_{kj}\dot{x}^k\dot{x}^j + \frac{1}{2}\rho_{\mathrm{R}}(X^\alpha)g_{ij}\overset{\mathfrak{ab}}{\mathfrak{I}}\underset{\mathfrak{a}}{\dot{d}^i}\underset{\mathfrak{b}}{\dot{d}^j} - \\ - \psi(X^\alpha, x^j, \underset{\mathfrak{a}}{d^j}, \vartheta, \dot{\vartheta}, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha \underset{\mathfrak{a}}{d^j}, \partial_\alpha\vartheta). \tag{23}$$

Здесь точкой обозначается частное дифференцирование по времени при постоянных лагранжевых координатах X^α, ρ_{R} — референциальная плотность, $\overset{\mathfrak{ab}}{\mathfrak{I}}$ — тензор инерции микрополярного поля.

Таким образом, в качестве определяющих переменных гиперболической микрополярной термоупругости с «нежёстким» репером локальных поворотов выступают в том числе[4] градиент деформации $\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{R}} \otimes \mathbf{x}$; директоры $\underset{\mathfrak{a}}{\mathbf{d}}$ ($\mathfrak{a} = 1, 2, 3$) и их референциальные градиенты $\boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{R}} \otimes \underset{\mathfrak{a}}{\mathbf{d}}$ ($\mathfrak{a} = 1, 2, 3$); градиент температурного смещения $\boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{R}}\vartheta$ и скорость температурного смещения $\dot{\vartheta}$.

Заметим, что согласно (23) термическое поле не обладает инерцией, поскольку не даёт никакого вклада в кинетическую часть действия.

Вариационный интеграл микрополярного термоупругого действия в силу (22) будет иметь следующий вид:

$$\mathfrak{S} = \int \mathscr{L}(X^\beta, x^j, \underset{\mathfrak{a}}{d^j}, \vartheta, \dot{x}^j, \underset{\mathfrak{a}}{\dot{d}^j}, \dot{\vartheta}, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha \underset{\mathfrak{a}}{d^j}, \partial_\alpha\vartheta)dX^1dX^2dX^3dt$$

[4]Ниже через $\boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{R}}$ обозначается отсчётный оператор Гамильтона.

$$(\mathfrak{a}=1,2,3;\ \alpha,\ \beta=1,2,3;\ j=1,2,3). \quad (24)$$

Соответствующие вариационному интегралу (24) уравнения поля распадаются на следующие три группы:

$$\begin{aligned}
&\partial_\alpha S^{\alpha\cdot}_{\cdot j} - \dot{P}_j = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x^j} && (\alpha=1,2,3;\ j=1,2,3),\\
&\partial_\alpha \overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{M}}{}^{\alpha\cdot}_{\cdot j} + \overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{A}}_j - (\overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{Q}}_j)^{\cdot} = 0 && (\mathfrak{a}=1,2,3;\ \alpha=1,2,3;\ j=1,2,3),\\
&\partial_\alpha j^\alpha_{\mathrm{R}} + \dot{s} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \vartheta} && (\alpha=1,2,3).
\end{aligned} \quad (25)$$

В рамках Лагранжева полевого формализма определяющие уравнения выступают просто как обозначения для канонических полевых частных производных, которые вводятся в целях сокращения записи дифференциальных уравнений поля (25):

$$\begin{aligned}
&P_j = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}^j}, \quad \overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{Q}}_j = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\underset{\mathfrak{a}}{d}}{}^j},\\
&S^{\alpha\cdot}_{\cdot j} = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\alpha x^j)}, \quad \overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{M}}{}^{\alpha\cdot}_{\cdot j} = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\alpha \underset{\mathfrak{a}}{d}{}^j)}, \quad \overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{A}}_j = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \underset{\mathfrak{a}}{d}{}^j},\\
&s = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\vartheta}}, \quad j^\alpha_{\mathrm{R}} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\alpha \vartheta)}.
\end{aligned}$$

В данных выше определяющих уравнениях приняты следующие обозначения: P_j — обобщённый импульс, соответствующий трансляционным степеням свободы; $\overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{Q}}_j$ — обобщённые импульсы, соответствующие дополнительным (в том числе ротационным) степеням свободы; $S^{\alpha\cdot}_{\cdot j}$ — первый тензор напряжений Пиола—Кирхгофа; $\overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{M}}{}^{\alpha\cdot}_{\cdot j}$ — тензоры экстранапряжений; $\overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{A}}_j$ — обобщённые моменты, сопряжённые локальным вращениям триэдра $\underset{\mathfrak{a}}{\mathbf{d}}$ $(\mathfrak{a}=1,2,3)$; s — плотность энтропии (в расчёте на единицу объема в отсчётном состоянии); j^α_{R} — референциальный вектор потока энтропии (в единицу времени через единицу площади в отсчётном состоянии).

Дифференциальное уравнение в нижней строке (25) выражает баланс энтропии. Если лагранжиан не содержит явных вхождений температурного смещения, то производство энтропии будет равно нулю. Таким образом, уравнение транспорта тепла будет иметь гиперболический аналитический тип так же, как это имеет место в термоупругости второго типа.

Инвариантность интегрального функционала действия (вариационная симметрия действия) относительно однопараметрической геометрической группы преобразований порождает, как известно, некоторый дивергентный закон сохранения. Дивергентный закон сохранения является обобщением известного из теории обыкновенных дифференциальных уравнений понятия первого интеграла и всегда имеет форму дивергентного дифференциального уравнения

$$\partial_\beta J^\beta = 0,$$

где $J^\beta(\varphi^k, \partial_\alpha\varphi^k, \partial_\gamma\partial_\alpha\varphi^k, \ldots, X^\mu)$ — 1-контравариантный пространственно-временной 4-вектор, которое должно удовлетворяться для любого решения уравнений поля. Вектор J^β — дифференциальная функция, зависящая от градиентов полевых переменных, наивысший порядок которых на единицу меньше порядка уравнений поля; этот вектор называется вектором тока (или 4-током).

Для каждой вариационной симметрии действия вектор J^β может быть эффективно вычислен (см., например, [13]). Вариационным симметриям действия в форме трансляций пространственно-временных координат соответствуют токи

$$J^{\mu}_{(\lambda)} = T^{\mu\cdot}_{\cdot\lambda} \qquad (\lambda,\ \mu = 1,2,3,4),$$

где $T^{\mu\cdot}_{\cdot\lambda}$ $(\lambda,\ \mu = 1,2,3,4)$ — тензор энергии-импульса поля.

В дальнейшем будем считать пространство-время плоским. В этом случае выполняется условие трансляционной инвариантности действия. Поэтому можно ввести 4-ковариантный тензор энергии-импульса $T^{\mu\cdot}_{\cdot\lambda}$ $(\lambda,\ \mu = 1,2,3,4)$ и сформулировать с его помощью законы сохранения, соответствующие независимым сдвигами всех четырёх пространственно-временных координат. Следуя [13], вычислим компоненты канонического тензора энергии-импульса микрополярного термоупругого поля. Всего имеются следующие четыре группы соотношений:

$$T^{\mu\cdot}_{\cdot\lambda} = \mathscr{L}\delta^{\mu}_{\lambda} + S^{\mu\cdot}_{\cdot l}(\partial_\lambda x^l) + \overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{M}}{}^{\mu\cdot}_{\cdot l}(\partial_\lambda \underset{\mathfrak{a}}{d}{}^l) - j^{\mu}_{\mathrm{R}}(\partial_\lambda \vartheta) \quad (\lambda,\ \mu = 1,2,3); \tag{26}$$

$$T^{\mu\cdot}_{\cdot 4} = S^{\mu\cdot}_{\cdot l}\dot{x}^l + \overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{M}}{}^{\mu\cdot}_{\cdot l}\underset{\mathfrak{a}}{\dot{d}}{}^l - j^{\mu}_{\mathrm{R}}\dot{\vartheta} \quad (\lambda = 4;\ \mu = 1,2,3); \tag{27}$$

$$T^{4\cdot}_{\cdot\lambda} = -(\partial_\lambda x^l)P_l - (\partial_\lambda \underset{\mathfrak{a}}{d}{}^l)\overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{Q}}_l - s(\partial_\lambda\vartheta) \quad (\lambda = 1,2,3;\ \mu = 4); \tag{28}$$

$$T^{4\cdot}_{\cdot 4} = \mathscr{L} - \dot{x}^l P_l - \underset{\mathfrak{a}}{\dot{d}}{}^l\overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{Q}}_l - s\dot{\vartheta} \quad (\lambda = 4;\ \mu = 4). \tag{29}$$

Приведённые выше компоненты тензора энергии-импульса микрополярного термоупругого поля позволяют быстро найти гамильтониан поля $\mathscr{H}$, вектор псевдоимпульса поля $\mathscr{P}_\lambda$, вектор Умова—Пойнтинга Γ^μ и тензор напряжений Эшелби $P^{\mu\cdot}_{\cdot\lambda}$.

Так, компонента (29) тензора энергии-импульса представляет собой взятую с отрицательным знаком плотность гамильтониана:

$$\mathscr{H} = \dot{x}^l P_l + \underset{\mathfrak{a}}{\dot{d}}{}^l\overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{Q}}_l + s\dot{\vartheta} - \mathscr{L}.$$

Компоненты (28) определяют ковариантный вектор псевдоимпульса поля согласно формуле

$$\mathscr{P}_\lambda = -(\partial_\lambda x^l)P_l - (\partial_\lambda \underset{\mathfrak{a}}{d}{}^l)\overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{Q}}_l - s(\partial_\lambda\vartheta).$$

Из компонент (27) формируется контравариантный вектор Умова—Пойнтинга

$$\Gamma^\mu = S^{\mu\cdot}_{\cdot l}\dot{x}^l + \overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{M}}{}^{\mu\cdot}_{\cdot l}\underset{\mathfrak{a}}{\dot{d}}{}^l - j^{\mu}_{\mathrm{R}}\dot{\vartheta}.$$

Компоненты (26) тензора энергии—импульса, взятые с противоположным знаком, дают возможность вычислить компоненты тензора напряжений

Эшелби

$$-P^{\mu\cdot}_{\cdot\lambda} = \mathscr{L}\delta^{\mu}_{\lambda} + S^{\mu\cdot}_{\cdot l}(\partial_\lambda x^l) + \overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{M}}{}^{\mu\cdot}_{\cdot l}(\partial_\lambda \underset{\mathfrak{a}}{d}{}^l) - j^{\mu}_{\mathrm{R}}(\partial_\lambda \vartheta).$$

Приведём также уравнения сохранения энергии и канонического импульса гиперболического микрополярного термоупругого поля:

$$-\dot{\mathscr{H}} + \partial_\mu \Gamma^\mu = 0, \tag{30}$$

$$-\dot{\mathscr{P}}_\lambda + \partial_\mu P^{\mu\cdot}_{\cdot\lambda} = 0. \tag{31}$$

Эти уравнения выступают в роли «первых интегралов» дифференциальных уравнений поля (25) и выполняются в силу уравнений поля. Ещё раз следует подчеркнуть, что уравнения (30) и (31) появляются в теоретико-полевых формулировках термоупругости только в том случае, когда интегральный функционал действия инвариантен при независимых трансляциях всех четырёх пространственно-временных координат; подобная инвариантность заведомо имеет место, когда пространство-время является плоским.

Благодарности. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 13–01–00139-а «Гиперболические тепловые волны в твердых телах с микроструктурой») и Министерства образования и науки РФ в рамках проектной части государственного задания ФГБОУ ВПО «СамГТУ» (проект № 16.2518.2014/(К)).

ORCID
Юрий Николаевич Радаев: http://orcid.org/0000-0002-0866-2151
Владимир Александрович Ковалев: http://orcid.org/0000-0003-2991-9531

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Радаев Ю. Н., Ковалев В. А. Гиперболические теории и задачи механики континуума / *Четвертая международная конференция «Математическая физика и ее приложения»*: материалы конф.; ред. чл.-корр. РАН И. В. Волович; д.ф.-м.н., проф. В. П. Радченко. Самара: СамГТУ, 2014. С. 289–290.
2. Радаев Ю. Н. Гиперболические теории и задачи механики деформируемого твердого тела / *Современные проблемы механики*: Тезисы докладов международной конференции, посвящённой 100-летию Л. А. Галина (20–21 сентября 2012 г., г. Москва, Россия). М., 2012. С. 75–76.
3. Ивлев Д. Д. *Теория идеальной пластичности*. М.: Наука, 1966. 232 с.
4. Радаев Ю. Н. *Пространственная задача математической теории пластичности*: 2-е изд., перераб. и доп.. Самара: Самарский гос. университет, 2006. 340 с.
5. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. *Волновые задачи теории поля и термомеханика*. Саратов: Саратовский гос. университет, 2010. 328 с.
6. Ишлинский А. Ю. Об уравнениях деформирования тел за пределом упругости // *Уч. зап. МГУ. Механика*, 1946. № 117. С. 90–108.
7. Радаев Ю. Н. О соотношениях перестановочности Ишлинского в математической теории пластичности // *Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер.*, 2007. № 6(56). С. 102–114.
8. Радаев Ю. Н. Кинематика пространственного идеально пластического течения на поверхностях скольжения // *Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер.*, 2006. № 9(49). С. 30–41.
9. Радаев Ю. Н. Траектории нарушений сплошности в идеально пластических телах // *Изв. РАН. МТТ*, 2011. № 4. С. 85–103.
10. Cosserat E. et F. *Théorie des corps déformables*. Paris: Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909. 226 pp.
11. Truesdell C., Toupin R. A. The Classical Field Theories / *Principles of Classical Mechanics and Field Theory*: Encyclopedia of Physics. vol. III/1; ed. S. Flugge. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer, 1960. pp. 226–858. doi: 10.1007/978-3-642-45943-6_2.

12. Toupin R. A. Theories of elasticity with couple-stress // *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1964. vol. 17, no. 2. pp. 85–112. doi: 10.1007/BF00253050.
13. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. *Элементы теории поля: вариационные симметрии и геометрические инварианты.* М.: Физматлит, 2009. 156 с.

Поступила в редакцию 15/I/2015;
в окончательном варианте — 25/II/2015;
принята в печать — 10/III/2015.

Vestn. Samar. Gos. Techn. Un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 1, pp. 186–202

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) **doi:** http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1412

MSC: 74A60, 74F05

HYPERBOLIC THEORIES AND PROBLEMS OF CONTINUUM MECHANICS*

***Yu. N. Radayev*[1], *V. A. Kovalev*[2]**

[1] A. Ishlinsky Instititе for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, 101, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.
[2] Moscow City Government University of Management, 28, Sretenka st., Moscow, 107045, Russian Federation.

Abstract

Theories and problems of that part of continuum thermomechanics which can not be properly formulated without partial differential equations of hyperbolic analytical type are considered. Special attention is paid to comparatively new hyperbolic continuum theories: the theory of three-dimensional perfect plasticity and the theory of micropolar thermoelasticity. The latter is accepted as type-II thermoelasticity. Three-dimensional statical and kinematical equations of the perfect plasticity theory by Ishlinskii and Ivlev are studied in order to elucidate their analytical type and opportunity to obtain integrable equations along some special lines. A new approach to hyperbolic formulations of thermoelasticity presumes consideration of referential gradients of thermodynamic state variables and extra field variables (rapid variables) as independent functional arguments in the action density. New hyperbolic thermomechanics of micropolar thermoelastic media is developed within the framework of classical field theory by the variational action integral and the least action principle.

How to cite Reference
R a d a y e v Yu. N., K o v a l e v V. A. Hyperbolic theories and problems of continuum mechanics, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 1, pp. 186–202. doi: 10.14498/vsgtu1412. (In Russian)

Authors Details
Yuri N. Radayev, Dr. Phys. & Math. Sci.; radayev@ipmnet.ru; Corresponding Author, Leader Researcher, Lab. of Modeling in Solid Michanics.
Vladimir A. Kovalev (Dr. Phys. & Math. Sci.; vlad_koval@mail.ru), Professor, Dept. of Applied Mathematics and Analytical Support of Making Decisions.

*This paper is an extended version of the paper [1], presented at the Mathematical Physics and Its Applications 2014 Conference.

Keywords: continuum, hyperbolicity, perfect plasticity, thermoelasticity, action, least action principle.

doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1412

Acknowledgments. This work has been partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 13–01–00139-a "Hyperbolic Thermal Waves in Solid Bodies with Microstructure") and by the Russian Ministry of Education and Science within the design basis portion of the state task to Samara State Technical University (project no. 16.2518.2014/(K)).

ORCID
Yuri N. Radayev: http://orcid.org/0000-0002-0866-2151
Vladimir A. Kovalev: http://orcid.org/0000-0003-2991-9531

REFERENCES

1. Radayev Yu. N., Kovalev V. A. Hyperbolic theories and problems of continuum mechanics, *The 4nd International Conference "Mathematical Physics and its Applications"*, Book of Abstracts and Conference Materials; eds. I. V. Volovich; V. P. Radchenko. Samara, Samara State Technical Univ., 2014, pp. 289–290 (In Russian).
2. Radayev Yu. N. Hyperbolic theories and problems of solid mechanics, *Sovremennye problemy mekhaniki* [Modern Problems of Mechanics], Abstracts of the International Conference. Moscow, 2012, pp. 75–76 (In Russian).
3. Ivlev D. D. *Teoriia ideal'noi plastichnosti* [Theory of Ideal Plasticity]. Moscow, Nauka, 1966, 232 pp. (In Russian)
4. Radayev Yu. N. *Prostranstvennaia zadacha matematicheskoi teorii plastichnosti* [Three-dimensional problem of the mathematical theory of the perfect plasticity]. Samara, Samara State Univ., 2006, 340 pp. (In Russian)
5. Kovalev V. A., Radayev Yu. N. *Volnovye zadachi teorii polia i termomekhanika* [Wave problems of the field theory and thermomechanic]. Saratov, Saratov State Univ., 2010, 328 pp. (In Russian)
6. Ishlinskiy A. Yu. On the equation of deformation of bodies beyond the elastic limit, *Uch. zap. MGU. Mekhanika*, 1946, no. 117, pp. 90–108 (In Russian).
7. Radayev Yu. N. On the Ishlinsky commutative equations in the mathematical theory of plasticity, *Vestn. SamGU. Estestvennonauchn. ser.*, 2007, no. 6(56), pp. 102–114 (In Russian).
8. Radayev Yu. N. On slip kinematic of the perfectly plastic flow along a maximum shear strain rate surface, *Vestn. SamGU. Estestvennonauchn. ser.*, 2006, no. 9(49), pp. 30–41 (In Russian).
9. Radaev Yu. N. Continuity violation trajectories in perfectly plastic bodies, *Mechanics of Solids*, 2011, vol. 46, no. 4, pp. 563–578. doi: 10.3103/S0025654411040078.
10. Cosserat E. et F. *Théorie des corps déformables.* Paris, Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909, 226 pp.
11. Truesdell C., Toupin R. A. The Classical Field Theories, *Principles of Classical Mechanics and Field Theory*, Encyclopedia of Physics, vol. III/1; ed. S. Flugge. Berlin, Göttingen, Heidelberg, Springer, 1960, pp. 226–858. doi: 10.1007/978-3-642-45943-6_2.
12. Toupin R. A. Theories of elasticity with couple-stress, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1964, vol. 17, no. 2, pp. 85–112. doi: 10.1007/BF00253050.
13. Kovalev V. A., Radayev Yu. N. *Elementy teorii polia: variatsionnye simmetrii i geometricheskie invarianty* [Field Theory Elements: Variational Symmetries and Geometric Invariants]. Moscow, Fizmatlit, 2009, 156 pp.

Received 15/I/2015;
received in revised form 25/II/2015;
accepted 10/III/2015.