Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2015. Т. 19, № 4. С. 613–623
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1396

УДК 517.968.2

О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ СВЕРТКИ С СУММАРНО-РАЗНОСТНЫМ ЯДРОМ

А. Г. Барсегян

Институт математики НАН Республики Армения,
Армения, 0019, Ереван, пр-т Маршала Баграмяна, 24/5.

Аннотация

В работе рассматриваются интегральные уравнения второго рода с суммарно-разностным ядром. Такими уравнениями описывается ряд физических процессов, происходящих в среде с отражающей границей. Отмечаются трудности, возникающие при их приближенном решении методами гармонического анализа, механических квадратур и др. Для численно-аналитического решения рассматриваемого уравнения в неособом случае развивается метод усреднения ядра. Метод усреднения ядра, имеющий некоторую общность с методом полос, ранее был применен в одной (совместной) работе автора для решения интегрального уравнения Винера–Хопфа. Этот метод сводит исходное уравнение к линейной алгебраической системе с теплиц-плюс-ганкелевой матрицей. Получена оценка для погрешности в различных функциональных пространствах. В случае большой размерности полученной алгебраической системы его решение известными методами линейной алгебры может оказаться весьма затруднительным. В предлагаемом методе решения данной системы существенным образом используется сверточная структура этой системы. При этом сочетаются метод нелинейных уравнений факторизации и дискретный аналог одного специального факторизационного метода, развитого ранее автором для интегральных уравнений.

Ключевые слова: интегральное уравнение с суммарно-разностным ядром, среда с отражающей границей, метод усреднения ядра, факторизация.

doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1396

Введение. Рассмотрим следующее интегральное уравнение с симметричным суммарно-разностным ядром $K(x,t) = K_1(x-t) + K_2(x+t)$:

$$f(x) = g(x) + \int_0^r K_1(x-t) f(t) dt + \int_0^r K_2(x+t) f(t) dt, \tag{1}$$

где $r \leqslant \infty$, $K_1 \in L_1$, $(-r,r)$ $K_1(-x) = K_1(x)$, $K_2 \in L_1(0,2r)$.

Образец для цитирования
Барсегян А. Г. О решении уравнения свертки с суммарно-разностным ядром // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2015. Т. 19, № 4. С. 613–623. doi: 10.14498/vsgtu1396.

Сведения об авторе
Ани Гарниковна Барсегян (к.ф.-м.н., доц.; anibarseghyan@mail.ru), научный сотрудник, отдел методов математической физики.

Ряд задач математической физики сводится к уравнению (1), ядро которого удовлетворяет следующим условиям субстохастичности:

$$K_{1,2} \geqslant 0; \quad \lambda_1 = 2\int_0^r K_1(t)dt \leqslant 1, \quad \int_0^r K(x,t)dx \leqslant \lambda \leqslant 1.$$

В приложениях по теории переноса излучения и кинетической теории газов в плоском слое с отражающей границей вид функции K_2 обусловлен принятым законом отражения из границы (см. [1–4]). К простейшим формам таких законов относятся зеркальное, изотропное, ламбертово отражения.

Уравнение вида (1) возникает также в случае «неплоской геометрии»: в задачах переноса в однородном шаре и др. (см. [5]).

Если $K_2 = 0$ и $r < \infty$, то (1) обращается в известное уравнение свертки на конечном промежутке:

$$f(x) = g(x) + \int_0^r K_1(x-t)f(t)dt, \quad r < \infty. \tag{2}$$

Если же $K_2 = 0$ и $r = \infty$, то (1) представляет собой уравнение Винера-Хопфа:

$$f(x) = g(x) + \int_0^\infty K_1(x-t)f(t)dt. \tag{3}$$

Чтобы дать наглядное представление о степени сложности решения уравнения (1) на конечном промежутке аналитическими методами, приведем одно сравнение. Применение метода Винера–Хопфа к уравнению (3) требует построения одной скалярной факторизации. В случае уравнения (2) вопрос сводится к факторизации унимодулярной матрицы-функции размера 2×2 (см. [6–9]). В этом случае задача существенно усложняется из-за наличия ядра K_2.

В ряде приложений возникает уравнение (1), в котором ядерные функции $K_{1,2}$ представлены в следующем виде суперпозиций экспонент:

$$\begin{aligned} K_1(x) &= \int_a^b e^{-|x|s}G_1(s)ds \quad -\infty < x < +\infty, \\ K_2(x) &= \int_a^b e^{-xs}G_2(s)ds, \quad x > 0, \quad 0 \leqslant a < b \leqslant +\infty. \end{aligned} \tag{4}$$

В работах [10–12 и др.] развиты методы решения уравнения (1) на конечном промежутке с применением нелинейного уравнения Амбарцумяна, ассоциированного с ядром K_1

$$\varphi(s) = 1 + \varphi(s)\int_a^b \frac{1}{s+p}\varphi(p)G_1(p)dp.$$

Численно-аналитическое решение этих уравнений опирается на аппроксимацию ядерных функций $K_{1,2}$ конечными линейными агрегатами экспонент.

1. Применение метода усреднения ядра к уравнению (1). Уравнение (1) возникает в математической физике также в случаях, когда хотя бы одна из функций $K_{1,2}$ не представлена в виде (4). Так, например, в случае задач переноса излучения при сложных формах отражения из границы функция K_2 не имеет представления (4), а в случае задач переноса в расширяющейся среде функция K_1 не представлена в виде (4). При решении таких задач приходится прибегнуть к прямой дискретизации уравнения по переменной интегрирования.

К уравнениям вида (2) ранее применялся метод Нюстрема и другие методы механических квадратур (ММК). ММК налагает жесткие требования на гладкость функций K_1 и g. В случае неограниченной, или кусочно непрерывной функции K_1, ММК вовсе не работает. Применение ММК нарушает сверточную структуру уравнения, то есть задача сводится к алгебраической системе, матрица которой не является зависящей (только) от разности индексов. Отсутствуют количественные оценки погрешности. ММК не приспособлены к решению задач переноса излучения и кинетической теории газов, поскольку ядра соответствующих интегральных уравнений неограничены.

В работе [13] развит метод усреднения ядра (МУЯ) численно-аналитического решения неособых интегральных уравнений Винера—Хопфа. МУЯ имеет определенное сходство с методом полос Г. Н. Положего [14]. В работе [15] МУЯ был применен к задаче переноса в расширяющейся среде.

Ниже будет описан вкратце способ применения МУЯ к уравнению (1) при выполнении условия сжатия

$$\lambda < 1. \tag{5}$$

Будем считать, что функция g задается, а f ищется в пространстве $L(0, r) \equiv L_1(0, r)$.

Введем равномерную таблицу узлов $\{2hm\}$, $0 \leqslant m \leqslant n$ на интервале $[0, r]$ с шагом $2h$, при этом $r = 2hn$. Когда $r = \infty$, будем считать $n = \infty$. Дискретизация в рамках МУЯ сводит уравнение (1) к следующей линейной алгебраической системе с теплиц-плюс-ганкелевой матрицей:

$$s_j = g_j + \sum_{m=1}^{n} a_{j-m} s_m + \sum_{m=1}^{n} b_{j+m-1} s_m, \quad n \leqslant \infty, \tag{6}$$

где

$$a_j = \int_{(2j-1)h}^{(2j+1)h} K_1(x)dx, \quad -n < j < n;$$
$$b_j = \int_{(2j-1)h}^{(2j+1)h} K_2(x)dx, \quad 0 < j < 2n,$$
$$g_j = \int_{2(j-1)h}^{2jh} g(t)dt.$$

Здесь схема изменения индекса j соответствует методу усреднения ядра [13].

Имеем

$$a_m, b_m \geqslant 0, \qquad \sum_{m=-(n-1)}^{n-1} a_m + \sum_{m=1}^{2n-1} b_m \leqslant \lambda.$$

Условие (5) обеспечивает существование и единственность решения системы (6). Приближенное решение уравнения (1) определяется по формуле

$$\tilde{f}(x) = g(x) + \sum_{j=1}^{n} K_1(x-\eta_j)\, s_j + \sum_{j=1}^{n} K_2(x+\eta_j)\, s_j.$$

Справедлива следующая оценка для погрешности $\|f-\tilde{f}\|_{L(0,r)}$:

$$\|f-\tilde{f}\|_L \leqslant 2\lambda(1-\lambda)^{-2}\left[\omega(h,K_1)+\omega(h,K_2)\right]\|g\|_L\,,$$

получаемая аналогично работе [13]. Здесь через $\omega(h,f)$ обозначен интегральный модуль непрерывности функции f:

$$\omega(h,f) = \sup_{|t|\leqslant h}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)-f(x-t)|\,dx.$$

2. Факторизационный метод решения системы (6) при $n<\infty$.

`2.1. Запись в виде бесконечной системы.` Тёплицевы и ганкелевы матрицы порядка $n<\infty$ определяются набором из $(2n-1)$ чисел и n чисел соответственно. Благодаря этому количество арифметических операций, необходимых для решения линейных алгебраических уравнений с такими матрицами, значительно меньше, чем в случае матриц общего вида (см. [16]). Тем не менее прямое решение системы (6) при больших значениях n может быть весьма затруднительным, особенно при значениях λ, близких к 1. В таких ситуациях может быть применен дискретный аналог метода работы автора [11] решения уравнения (1), который будет вкратце изложен ниже.

Рассмотрим одно из следующих банаховых пространств: l_p, $p\geqslant 1$. Норма в пространствах l_p задается следующим образом:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{1/p}, \quad 1\leqslant p<\infty; \quad \|x\|_\infty = \sup_i |x_i|\,.$$

Обозначим через $\mathbb{R}_n$ — n-мерное арифметическое пространство векторов $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ с обычными операциями сложения и умножения на число.

Мы будем отождествлять пространство $\mathbb{R}_n$ с теми подпространствами из l_p, которые состоят из финитных последовательностей вида $(x_i)_{i=1}^{\infty}$, таких что $x_i=0$ при $i>n$.

Обозначим через $h^+=\left(h_i^+\right)_{i=1}^{\infty}$ и $h^-=\left(h_i^-\right)_{i=1}^{\infty}$ бесконечные последовательности чисел, удовлетворяющих следующим условиям:

$$h_i^+ = \begin{cases} 1, & \text{при } 0\leqslant i\leqslant n,\\ 0, & \text{при } i>n,\end{cases} \qquad h_i^- = \begin{cases} 0, & \text{при } 0\leqslant i\leqslant n,\\ 1, & \text{при } i>n.\end{cases}$$

Имеем

$$h^+ + h^- = I,$$

где $I=(1,1,\ldots)$ — последовательность с элементами, равными единице, или бесконечная единичная матрица.

Рассмотрим уравнение

$$f_k = g_k + \sum_{m=1}^{\infty} a_{k-m}h_m^+ f_m + \sum_{m=1}^{\infty} b_{k+m-1}h_m^+ f_m, \quad k=1,2,\ldots \tag{7}$$

Системы (6) и (7) эквивалентны в следующем смысле. Пусть (6) обладает решением $s \in \mathbb{R}_n$. Тогда дополненная нулями бесконечная последовательность $s \in l_p$ является решением системы (7). С другой стороны, если уравнение (7) при $g \in l_p$ обладает решением $f \in l_p$, то вектор $s = (f_k)_{k=1}^n$ удовлетворяет системе (6).

`2.2 Факторизация теплицевых матриц.` На систему (6) будет распространен метод одностороннего продолжения (МОП) (см. [11]) решения интегрального уравнения типа свертки на конечном промежутке с симметричным ядром. Метод основан на связи между решениями уравнения (6) и ассоциированной с ним бесконечной системы алгебраических уравнений с теплицевой матрицей $I - A$, $A = (a_{k-m})$, $k, m = 1,\ 2,\ \ldots$.

Построение факторизации для уравнения (7) основано на треугольной факторизации матрицы $I - A$. Из условия (5) следует полная регулярность матрицы A в пространствах l_p:

$$\|A\| = \mu \leqslant |a_0| + 2\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \leqslant \lambda < 1.$$

Поэтому матрица $I - A$ допускает факторизацию (см. [17]):

$$I - A = (I - Y)(I - X). \tag{8}$$

Здесь $X = (x_{km})$, $x_{km} = x_{k-m}$, $Y = (y_{km})$, $y_{km} = y_{m-k}$, $k, m = 1, 2, \ldots$ — нижняя и верхняя треугольные матрицы, $y_k = x_k = 0$ при $k < 0$. Матрицы $I - X$ и $I - Y$ обратимы в пространствах l_p.

Факторизация (8) в силу симметричности матрицы $A = A^*$ эквивалентна следующей нелинейной системе относительно $x_k = y_k = u_k$ (см. [18]):

$$(1 + \delta_{0k})u_k = a_k + \sum_{m=0}^{\infty} u_m u_{k+m}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{9}$$

$$u = (u_k)_{k=0}^{\infty} \in l_1.$$

Поскольку матрицы $I - X$ и $I - Y$ обратимы,

$$(I - X)^{-1} = I + \Gamma^+, \quad (I - Y)^{-1} = I + \Gamma^-. \tag{10}$$

Здесь $\Gamma^+ = (\gamma_{k-m})$ и $\Gamma^- = (\gamma_{m-k})$ — нижняя и верхняя треугольные теплицевы матрицы. Числа γ_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$ определяются рекуррентным образом из соотношений

$$\gamma_k = u_k + \sum_{m=0}^{k} u_{k-m}\gamma_m. \tag{11}$$

`2.3. Факторизация уравнения (7).` Перепишем уравнение (7) в векторно-матричной форме:

$$\left(I - AH^+ - BH^+\right) f = g.$$

Здесь $H^+ = \operatorname{diag}(h_1^+, h_2^+, \ldots, h_n^+, \ldots)$ — бесконечная диагональная матрица с элементами h_m^+, $m = 1, 2, \ldots$; $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots)^\top$ — искомый, а $g = (g_1, g_2, \ldots g_n, 0, 0, 0, \ldots)^\top$ — заданный векторы-столбцы.

Запишем уравнение (6) в аналогичной форме:

$$(I - A_n - B_n)\, s = g,$$

где

$$A_n = (a_{k-m})_{k,m=1}^n\,, \quad B_n = (b_{k+m-1})_{k,m=1}^n\,,$$

$$f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)^\top\,, \quad g = (g_1, g_2, \ldots, g_n)^\top.$$

Из эквивалентности уравнений (6) и (7) (в отмеченном выше смысле) следует, что матрица $I - AH^+ - BH^+$ обратима. Ниже мы построим факторизацию для матрицы $I - AH^+ - BH^+$:

$$\begin{aligned} I - AH^+ - BH^+ &= I - A + AH^- - BH^+ = \\ &= (I - Y)\left[I - X + (I-Y)^{-1} AH^- - (I-Y)^{-1} BH^+\right], \end{aligned} \tag{12}$$

где $H^- = \operatorname{diag}\left(h_1^-, h_2^-, \ldots, h_n^-, \ldots\right)$. Из (8) и (10) получаем

$$(I - Y)^{-1} A = X + \Gamma^-. \tag{13}$$

Из (12) и (13) приходим к разложению

$$I - AH^+ - BH^+ = (I - Y)\big[I - XH^+ + \Gamma^- H^- - \tilde{B} H^+\big], \tag{14}$$

где $\tilde{B} = (I - Y)^{-1} B = (I + \Gamma^-)\, B$ — ганкелева матрица.

Теорема. *Имеет место факторизация* (14), *матрица*

$$I - XH^+ + \Gamma^- H^- - \tilde{B} H^+$$

обратима.

3. Применение факторизации (14). В силу обратимости матрицы $I - Y$ факторизация (14) сводит уравнение (7) к следующему уравнению:

$$\big(I - XH^+ + \Gamma^- H^- - \tilde{B} H^+\big) f = \tilde{g}, \tag{15}$$

где $\tilde{g} = (\tilde{g}_1, \tilde{g}_2, \ldots, \tilde{g}_n, \ldots)^\top$ — вектор-столбец, причём

$$\tilde{g} = (I - Y)^{-1}\, g = \big(I + \Gamma^-\big)\, g.$$

Элементы $\tilde{g}$ определяются по формулам

$$\tilde{g}_k = g_k + \sum_{i=k}^{n} \gamma_{i-k} g_i, \quad \text{при} \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \text{и} \quad \tilde{g}_k = 0 \quad \text{при} \quad k > n. \tag{16}$$

Перепишем уравнение (15) поэлементно:

$$f_k = \tilde{g}_k + \sum_{j=1}^{k} u_{k-j} h_j^+ f_j - \sum_{j=k}^{\infty} \gamma_{j-k} h_j^- f_j + \sum_{j=1}^{n} \tilde{b}_{j+k-1} s_j, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{17}$$

где $s = (s_k)_{k=1}^n$, $s_k = h_k^+ f_k$. Для номеров $k \leqslant n$ из (17) имеем

$$s_k = \tilde{g}_k + \sum_{j=1}^{k} u_{k-j} s_j - \sum_{j=n+1}^{\infty} \gamma_{j-k} \eta_j + \sum_{j=1}^{n} \tilde{b}_{j+k-1} s_j, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{18}$$

где $\eta_k = h_k^- f_k$. Рассмотрим теперь систему (17) при $k > n$. Тогда будем иметь

$$\eta_k = \sum_{j=1}^{n} u_{k-j} s_j - \sum_{j=k}^{\infty} \gamma_{j-k} \eta_j + \sum_{j=1}^{n} \tilde{b}_{j+k-1} s_j, \quad k = n+1, n+2, \ldots \tag{19}$$

Нами получена система линейных уравнений (18), (19) относительно двух наборов чисел $s = (s_k)_{k=1}^n$ и $\eta = (\eta_k)_{k=n+1}^\infty$. Она эквивалентна системе (17) и, следовательно, уравнению (6).

Уравнения (19) могут быть заменены следующими более простыми уравнениями, которые можно получить из исходного уравнения (6), полагая в нем $k > n$:

$$\eta_k = \sum_{j=1}^{n} a_{k-j} s_j + \sum_{j=1}^{n} b_{k+j-1} s_j, \quad k = n+1,\ n+2,\ \ldots \tag{20}$$

Аналогично континуальному случаю (см. [11]) доказывается следующая

Лемма. *Системы (18), (19) и (18), (20) эквивалентны. Числа (s_k) и (η_k) однозначно определяются из системы (18), (20).*

3.1. Случай $n = \infty$. В случае $n = \infty$ нам нужно определить только числа $s = (s_k)_{k=1}^\infty$ из бесконечномерного аналога системы (18):

$$s_k = \tilde{g}_k + \sum_{j=1}^{k} u_{k-j} s_j + \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{b}_{j+k-1} s_j, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots.$$

Обозначим

$$v_k = s_k - \sum_{j=1}^{k} u_{k-j} s_j.$$

Используя формулу (10) и свойства произведения теплицевых и ганелевых матриц, приходим к следующему уравнению с ганкелевой матрицей относительно (v_k):

$$v_k = \tilde{g}_k + \sum_{j=1}^{\infty} c_{k+j} v_j,$$

где

$$c_k = \tilde{b}_k + \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{b}_{k+j} \gamma_j.$$

Численная реализация изложенного подхода предполагает замену НУФ (9) конечной редуцированной системой (см. [10, 18]):

$$(1+\delta_{0k})\tilde{u}_k = a_k + \sum_{m=0}^{n-k} \tilde{u}_m \tilde{u}_{k+m}, \quad k = 0, 1, 2, \dots n. \tag{21}$$

`3.2. О решении уравнения (6) при n` $< \infty$. При $n < \infty$ имеем $u_k = \tilde{u}_k$, где $\tilde{u}_k$ определяется из системы (21), которая разрешается простыми итерациями. Далее определяются резольвентные матрицы $\Gamma^{\pm}$ в виде представления (10). Элементы γ_k определяются из рекуррентных соотношений (11).

Из системы уравнений (18), (20) определяются числа s_k и η_k, где числа $\tilde{g}_k$ определяются по формулам (16). Тем самым строится решение $s = (s_k)_{k=1}^{n}$ исходного уравнения (6).

Не вникая в подробности отметим, что предлагаемая схема численно реализуется значительно проще по сравнению с прямым решением линейной алгебраической системы (6). Сказанное особенно относится к случаям больших значений n и значений λ близких к единице. В известных нам приложениях числа (η_k) достаточно быстро стремятся к нулю и на практике можно ограничиться их небольшим количеством.

Благодарности. Автор выражает благодарность проф. Н. Б. Енгибаряну за внимание к работе. Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта № SCS 13–1A271.

ORCID
Ани Гарниковна Барсегян: http://orcid.org/0000-0002-2927-9055

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Нагирнер Д. И. *Лекции по теории переноса излучения*. СПб.: СПб. ун-т, 2001. 231 с.
2. Соболев В. В. *Курс теоретической астрофизики*. М.: Наука, 1985. 503 с.
3. Иванов В. В. *Перенос излучения и спектры небесных тел*. М.: Наука, 1969. 472 с.
4. Chandrasekhar S. *Radiative transfer*. London: Oxford University Press, 1950. 393 pp.
5. Барсегян А. Г., Тер-Аветисян В. В. Точечный источник света в центре однородного шара и в бесконечной среде // *Астрофизика*, 2012. Т. 55, № 2. С. 307–320, http://astro.asj-oa.am/id/eprint/31.
6. Новокшенов В. Ю. Уравнения в свертках на конечном отрезке и факторизация эллиптических матриц // *Матем. заметки*, 1980. Т. 27, № 6. С. 935–946.
7. Gohberg I., Goldberg S., Kaashoek M. *Classes of Linear Operators Vol. I*. Basel, Boston, Berlin: Birkhauser Verlag, 1990, xiii+468 pp. doi: 10.1007/978-3-0348-7509-7.
8. Пальцев Б. В. Асимптотика спектра интегральных операторов свертки на конечном интервале с однородными полярными ядрами // *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2003. Т. 67, № 4. С. 67–154. doi: 10.4213/im443.
9. Ганин М. П. Об интегральном уравнении Фредгольма с ядром, зависящим от разности аргументов // *Изв. вузов. Матем.*, 1963. № 2. С. 31–43.
10. Енгибарян Н. Б., Мнацаканян М. А. Линейные алгебраические системы с теплицевыми матрицами // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1977. Т. 17, № 5. С. 1102–1116.
11. Барсегян А. Г. Интегральное уравнение с суммарно-разностным ядром на конечном промежутке // *Известия НАН Армении. Математика*, 2005. Т. 40, № 3. С. 22–32, http://mathematics.asj-oa.am/id/eprint/602.
12. Афян А. Н., Хачатрян А. Х. Об аналитическом и численном решении задачи переноса излучения при наличии отражающей поверхности // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2001. Т. 41, № 8. С. 1217–1228.

13. Барсегян А. Г., Енгибарян Н. Б. Приближенное решение интегральных и дискретных уравнений Винера–Хопфа // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2015. Т. 55, № 5. С. 836–845. doi: 10.7868/S0044466915050063.
14. Положий Г. Н., Чаленко П. И. Решение интегральных уравнений методом полос / *Вопросы математической физики и теории функций*. Киев: Киев. ун-т, 1964. С. 124–145.
15. Барсегян А. Г., Тер-Аветисян В. В. О решении уравнения переноса в движущейся среде // *Астрономический журнал*, 2013. Т. 90, № 9. С. 747–753. doi: 10.7868/S0004629913090016.
16. Пустыльников Л. Д., Локоть Т. В. Алгебраические структуры, связанные с теплицевыми и ганкелевыми матрицами и тензорами // *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*, 2010, 060. 26 с., http://www.keldysh.ru/papers/2010/source/prep2010_60.pdf.
17. Крейн М. Г. Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов // *УМН*, 1958. Т. 13, № 5(83). С. 3–120.
18. Арабаджян Л. Г., Енгибарян Н. Б. Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения / Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал., Т. 22. М.: ВИНИТИ, 1984. С. 175–244.

Поступила в редакцию 19/XII/2014;
в окончательном варианте — 12/V/2015;
принята в печать — 08/IV/2015.

Vestn. Samar. Gos. Techn. Un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 4, pp. 613–623

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) **doi:** http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1396

MSC: 45E10

ON THE SOLUTION OF THE CONVOLUTION EQUATION WITH A SUM-DIFFERENCE KERNEL

A. G. Barseghyan

Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Armenia,
24/5, Marshal Baghramian ave., Yerevan, 0019, Republic of Armenia.

Abstract

The paper deals with the integral equations of the second kind with a sum-difference kernel. These equations describe a series of physical processes in a medium with a reflective boundary. It has noted some difficulties at applying the methods of harmonic analysis, mechanical quadrature, and other approaches to approximate solution of such equations. The kernel average method is developed for numerical-analytical solution of considered equation in non singular case. The kernel average method has some similarity with known strip method. It was applied for solution of Wiener-Hopf integral

Please cite this article in press as:
B a r s e g h y a n A. G. On the solution of the convolution equation with a sum-difference kernel, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 4, pp. 613–623. doi: 10.14498/vsgtu1396. (In Russian)

Author Details:
Ani G. Barseghyan (Cand. Phys. & Math. Sci.; anibarseghyan@mail.ru), Research Fellow, Division of Methods of Mathematical Physics.

equation in earlier work of the author. The kernel average method reduces the initial equation to the linear algebraic system with Toeplitz-plus-Hankel matrix. An estimate for accuracy is obtained in the various functional spaces. In the case of large dimension of the obtained algebraic system the known methods of linear algebra are not efficient. The proposed method for solving this system essentially uses convolution structure of the system. It combines the method of non-linear factorization equations and discrete analogue of the special factorization method developed earlier by the author to the integral equations.

Keywords: integral equation with a sum-difference kernel, medium with a reflective boundary, kernel average method, factorization.

doi: `http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1396`

Acknowledgements. The author wishes to express gratitude to Professor Norayr B. Engibaryan for showing active interest in the author's work on the paper. This work was supported by the State Committee of Science of the Ministry of Education and Science of Republic Armenia, project no. SCS 13–1A271.

ORCID
Ani G. Barseghyan: `http://orcid.org/0000-0002-2927-9055`

REFERENCES

1. Nagirner D. I. *Lektsii po teorii perenosa izlucheniia* [Lectures on Radiative Transfer Theory]. St. Petersburg, St. Petersburg Univ., 2001, 231 pp. (In Russian)
2. Sobolev V. V. *Kurs teoreticheskoi astrofiziki* [Course of Theoretical Astrophysics]. Moscow, Nauka, 1985, 503 pp. (In Russian)
3. Ivanov V. V. *Perenos izlucheniia i spektry nebesnykh tel* [Radiative transfer and the spectra of celestial bodies]. M., Nauka, 1969, 472 pp. (In Russian)
4. Chandrasekhar S. *Radiative transfer*. London, Oxford University Press, 1950, 393 pp.
5. Barseghyan A. G., Ter-Avetisyan V. V. Point source of light in the center of a homogeneous sphere and in an infinite medium, *Astrophysics*, 2012, vol. 55, no. 2, pp. 275–291. `doi:` `10.1007/s10511-012-9235-8`.
6. Novokshenov V. Yu. Convolution equations on a finite segment and factorization of elliptic matrices, *Math. Notes*, 1980, vol. 27, no. 6, pp. 449–455. `doi:` `10.1007/BF01145434`.
7. Gohberg I., Goldberg S., Kaashoek M. *Classes of Linear Operators Vol. I*. Basel, Boston, Berlin, Birkhauser Verlag, 1990, xiii+468 pp. `doi:` `10.1007/978-3-0348-7509-7`.
8. Pal'tsev B. V. Asymptotic behaviour of the spectra of integral convolution operators on a finite interval with homogeneous polar kernels, *Izv. Math.*, 2003, vol. 67, no. 4, pp. 695–779. `doi:` `10.1070/IM2003v067n04ABEH000443`.
9. Ganin M. P. On a Fredholm integral equation whose kernel depends on the difference of the arguments, *Izv. vuzov. Matem.*, 1963, no. 2, pp. 31–43 (In Russian).
10. Engibaryan N. B., Mnatsakanyan M. A. Linear algebraic systems with toeplitz matrices, *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, 1977, vol. 17, no. 5, pp. 3–17. `doi:` `10.1016/0041-5553(77)90002-7`.
11. Barsegyan A. G. Integral equatioan with additive-subtractive kernel on a finite interval, *Proceedings of the NAS Armenia. Mathematics*, 2005, vol. 40, no. 3, pp. 22–32 (In Russian), `http://mathematics.asj-oa.am/id/eprint/602`.
12. Afyan A. N., Khachatryan A. Kh. On analytical and numerical solutions to the radiative transfer problem with a reflecting surface, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2001, vol. 41, no. 8, pp. 1158–1168.
13. Barseghyan A. G., Engibaryan N. B. Approximate solution of Wiener-Hopf integral equations and its discrete counterparts, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2015, vol. 55, no. 5, pp. 834–843. `doi:` `10.1134/S0965542515050061`.

14. Polozhiy G. N., Chalenko P. I. Solution of integral equations by the band method, *Vopr. Mat. Fiz. Teor. Funkts.*. Kiev, Kiev Univ., 1964, pp. 124–145 (In Russian).
15. Barseghyan A. G., Ter-Avetisyan V. V. Solution of the transfer equation in a moving medium, *Astronomy Reports*, 2013, vol. 57, no. 9, pp. 686–691. doi: 10.1134/S1063772913090011.
16. Pustyl'nikov L. D., Lokot' T. V. Algebraic structures related to Toeplitz and Hankel matrices and tensors, *Keldysh Institute preprints*, 2010, 060, 26 pp. (In Russian), http://www.keldysh.ru/papers/2010/source/prep2010_60.pdf.
17. Kreyn M. G. Integral equations on the half-line with a kernel depending on the difference of the arguments, *Uspehi Mat. Nauk*, 1958, vol. 13, no. 5(83), pp. 3–120 (In Russian).
18. Arabadzhyan L. G., Engibaryan N. B. Convolution equations and nonlinear functional equations, *J. Soviet Math.*, 1987, vol. 36, no. 6, pp. 745–791. doi: 10.1007/BF01085507.

Received 19/XII/2014;
received in revised form 12/V/2015;
accepted 08/IV/2015.