ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1375

УДК 539.184.26

СВЕРХТОНКАЯ СТРУКТУРА ИОНОВ МЮОННОГО ЛИТИЯ*

А. П. Мартыненко[1,2]***, А. А. Улыбин***[1]

[1] Самарский государственный университет,
Россия, 443011, Самара, ул. Академика Павлова, 1.
[2] Самарский государственный аэрокосмический университет
имени академика С. П. Королёва (национальный исследовательский университет),
443086, Россия, Самара, Московское ш., 34.

Аннотация

В рамках метода теории возмущений по постоянной тонкой структуры и отношению масс электрона и мюона вычислены поправки на отдачу порядков $\alpha^4 \frac{M_e}{M_\mu}$, $\alpha^4 (\frac{M_e}{M_\mu})^2 \ln \frac{M_e}{M_\mu}$, $\alpha^4 (\frac{M_e}{M_\mu})^2$, $\alpha^5 \frac{m_e}{m_\mu} \ln \frac{m_e}{m_\mu}$ и релятивистские поправки порядка α^6 в сверхтонкой структуре основного состояния ионов мюонного лития $(\mu\, e\, {}^6_3\mathrm{Li})^+$ и $(\mu\, e\, {}^7_3\mathrm{Li})^+$. Получены значения малых интервалов сверхтонких расщеплений:

$\Delta\nu_1 = 14153.03$ МГц и $\Delta\nu_2 = 21571.26$ МГц в $(\mu\, e\, {}^6_3\mathrm{Li})^+$,

$\Delta\nu_1 = 13991.97$ МГц и $\Delta\nu_2 = 21735.03$ МГц в $(\mu\, e\, {}^7_3\mathrm{Li})^+$,

которые можно рассматривать как надёжный ориентир при сравнении с будущими экспериментальными данными.

Ключевые слова: квантовая электродинамика, сверхтонкая структура, квазипотенциальный метод.

doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1375

Ионы мюонного лития $(\mu\, e\, {}^6_3\mathrm{Li})^+$ и $(\mu\, e\, {}^7_3\mathrm{Li})^+$ представляют собой простейшие трёхчастичные системы, состоящие из электрона, отрицательного мюона и положительного ядра ${}^6_3\mathrm{Li}$ или ${}^7_3\mathrm{Li}$. Время жизни таких атомов определяется временем жизни мюона $\tau_\mu = 2.19703(4)\cdot 10^{-6}$ с. Эти трёхчастичные связанные состояния имеют сложную сверхтонкую структуру, обусловленную взаимодействием магнитных моментов электрона, мюона и ядра. Мюонные системы представляют собой уникальную лабораторию по прецизионному определению свойств ядер, таких как их зарядовые радиусы [2, 3]. В последние годы наблюдается существенный прогресс, достигнутый коллаборацией CREMA

Образец для цитирования
Мартыненко А. П., Улыбин А. А. Сверхтонкая структура ионов мюонного лития // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2015. Т. 19, № 2. С. 270–282. doi: 10.14498/vsgtu1375.

Сведения об авторах
Алексей Петрович Мартыненко (д.ф.-м.н., проф.; a.p.martynenko@samsu.ru; автор, ведущий переписку), профессор, каф. общей и теоретической физики[1]; профессор, каф. физики[2].
Александр Александрович Улыбин (Sasha_Ulybin_20.10.2011@mail.ru), студент, каф. общей и теоретической физики.

*Настоящая статья представляет собой расширенный вариант доклада [1], сделанного авторами на Четвёртой международной конференции «Математическая физика и её приложения» (Россия, Самара, 25 августа – 1 сентября 2014).

(Charge Radius Experiment with Muonic Atoms) при исследовании спектров энергии мюонных атомов. Было выполнено измерение лэмбовского сдвига и сверхтонкой структуры в мюонном водороде и мюонном дейтерии. Планируются аналогичные эксперименты с мюонным гелием. Лёгкие мюонные атомы важны для проверки Стандартной модели, теории связанных состояний в квантовой электродинамике, для поиска экзотических частиц и взаимодействий.

Сверхтонкое расщепление основного состояния в атомах мюонного гелия ($\mu e\,{}^{3,4}_{2}\mathrm{He}$) было измерено много лет назад с достаточно высокой точностью. Это измерение является единственным экспериментальным результатом в случае трёхчастичных мюонных атомов. С другой стороны, теоретические исследования энергетического спектра мюонного гелия достигли существенно больших успехов по двум направлениям [4–13, 15]. Первый подход, использованный в [4–6, 11], был основан на методе теории возмущений для уравнения Шрёдингера. В этом случае существует аналитическое решение для трёхчастичной волновой функции в исходном приближении. На его основе было выполнено вычисление различных поправок в сверхтонком расщеплении. Другой подход в работах [7, 10, 12–15] был основан на вариационном методе в квантовой механике. Он позволил вычислить численно уровни энергии трёхчастичной системы с очень высокой точностью. Чтобы найти расположение низколежащих уровней энергии с большой точностью, необходимо учесть различные поправки в операторе взаимодействия частиц. Прежде всего эти поправки связаны с эффектами отдачи, структуры ядра и поляризации вакуума. Программа расчёта сверхтонкой структуры в мюонном гелии, включая возбуждённые состояния, была реализована в [4–7, 10–13, 16–18]. Цель данной работы состоит в распространении этого подхода на ионы мюонного лития $(\mu e\,{}^{6,7}_{3}\mathrm{Li})^{+}$, что представляет собой потенциальный интерес для экспериментального изучения.

Связанные частицы в ионах мюонного лития имеют различные массы $m_e \ll m_\mu \ll m_{\mathrm{Li}}$. В результате мюон и ядро Li образуют псевдоядро $(\mu\,{}^{6,7}_{3}\mathrm{Li})^{++}$, и в первом приближении ион мюонного лития может рассматриваться как двухчастичная система. Гамильтониан $(\mu\ e\ {}^{6,7}_{3}\mathrm{Li})^{+}$ имеет следующую общую структуру:

$$H = H_0 + \Delta H + \Delta H_{\mathrm{rec}} + \Delta H_{\mathrm{VP}} + \Delta H_{\mathrm{str}} + \Delta H_{\mathrm{vert}},$$

$$H_0 = -\frac{1}{2M_\mu}\nabla^2_\mu - \frac{1}{2M_e}\nabla^2_e - \frac{3\alpha}{x_\mu} - \frac{2\alpha}{x_e},$$

$$\Delta H = \frac{\alpha}{x_{\mu e}} - \frac{\alpha}{x_e},\ \ \Delta H_{\mathrm{rec}} = -\frac{1}{M_{\mathrm{Li}}}\boldsymbol{\nabla}_\mu \cdot \boldsymbol{\nabla}_e,$$

где $\mathbf{x}_\mu$ и $\mathbf{x}_e$ — координаты мюона и электрона по отношению к ядру лития, $M_e = m_e M_{\mathrm{Li}}/(m_e + M_{\mathrm{Li}})$ и $M_\mu = m_\mu M_{\mathrm{Li}}/(m_\mu + M_{\mathrm{Li}})$ — приведённые массы подсистем $(e\ {}^{6,7}_{3}\mathrm{Li})^{++}$ и $(\mu\ {}^{6,7}_{3}\mathrm{Li})^{++}$. Члены гамильтониана ΔH_{VP}, ΔH_{str} и ΔH_{vert} описывают поправки на поляризацию вакуума, структуру ядра и вершинную поправку. В исходном приближении волновая функция основного состояния имеет вид

$$\Psi_0(\mathbf{x}_\mu, \mathbf{x}_e) = \psi_{\mu_0}(\mathbf{x}_\mu)\psi_{e_0}(\mathbf{x}_e) = \frac{(6\alpha^2 M_\mu M_e)^{3/2}}{\pi} e^{-3\alpha M_\mu x_\mu} e^{-2\alpha M_e x_e}. \tag{1}$$

Базовый вклад в сверхтонкое взаимодействие в основном состоянии $(\mu\, e\, {}^{6,7}_{3}\mathrm{Li})^{+}$ определяется следующим гамильтонианом:

$$\Delta H_0^{hfs} = \frac{2\pi\alpha}{3}\frac{g_N g_\mu}{m_p m_\mu}(\mathbf{I}\cdot\mathbf{S}_\mu)\delta(\mathbf{x}_\mu) - \frac{2\pi\alpha}{3}\frac{g_\mu g_e}{m_\mu m_e}(\mathbf{S}_\mu\cdot\mathbf{S}_e)\delta(\mathbf{x}_\mu - \mathbf{x}_e) + \\ + \frac{2\pi\alpha}{3}\frac{g_e g_N}{m_e m_p}(\mathbf{S}_e\cdot\mathbf{I})\delta(\mathbf{x}_e), \quad (2)$$

где g_N, g_μ, g_e — гиромагнитные факторы ядра, мюона и электрона. Полный спин трёх частиц принимает значения 0, 1 и 2 для $(\mu\, e\, {}^{6}_{3}\mathrm{Li})^{+}$ и 1/2, 3/2 и 5/2 для $(\mu\, e\, {}^{7}_{3}\mathrm{Li})^{+}$.

Сверхтонкое расщепление уровней энергии в ионах мюонного лития определяется рядом матричных элементов

$$\nu = \left\langle \Delta H_0^{hfs} \right\rangle = a\left\langle \mathbf{I}\cdot\mathbf{S}_\mu\right\rangle - b\left\langle \mathbf{S}_\mu\cdot\mathbf{S}_e\right\rangle + c\left\langle \mathbf{S}_e\cdot\mathbf{I}\right\rangle, \quad (3)$$

где средние значения операторов спин-спинового взаимодействия могут быть вычислены с помощью преобразования базисных волновых функций [19, 20]:

$$\Psi_{S_{N\mu}SS_z} = \sum_{S_{Ne}} (-1)^{I+S_\mu+S_e+S}\sqrt{(2S_{N\mu}+1)(2S_{Ne}+1)}\times \\ \times \left\{ \begin{array}{ccc} S_e & S_N & S_{Ne} \\ S_\mu & S & S_{N\mu} \end{array} \right\} \Psi_{S_{Ne}SS_z},$$

где $S_{N\mu}$ — спин подсистемы ядро-мюон, S_{Ne} — спин подсистемы ядро-электрон, S — полный угловой момент. Свойства $6j$-символов можно найти в [20]. Как следует из (2), (3), основные вклады в коэффициенты a, b и c следующие:

$$a_0 = \frac{2\pi\alpha}{3}\frac{g_N g_\mu}{m_p m_\mu}\left\langle \delta(\mathbf{x}_\mu)\right\rangle,$$

$$b_0 = \frac{2\pi\alpha}{3}\frac{g_\mu g_e}{m_\mu m_e}\left\langle \delta(\mathbf{x}_\mu - \mathbf{x}_e)\right\rangle, \quad (4)$$

$$c_0 = \frac{2\pi\alpha}{3}\frac{g_e g_N}{m_e m_p}\left\langle \delta(\mathbf{x}_e)\right\rangle, \quad (5)$$

где $\langle \ldots \rangle$ означает усреднение в координатном представлении по волновым функциям (1). При расчётах мы использовали следующие значения гиромагнитных факторов:

$$g_N({}^{6}_{3}\mathrm{Li}) = 0.822047, \quad g_N({}^{7}_{3}\mathrm{Li}) = 2.170951,$$
$$g_\mu = 2(1+\kappa_\mu) = 2(1 + 1.16592069(60)\cdot 10^{-3});$$

$g_e = 2$ для коэффициента b; $g_e = 2(1+\kappa_e) = 2(1 + 1.15965218111(74)\cdot 10^{-3})$ для коэффициента c.

Среднее значение (3) есть матрица 4×4, соответствующая различным значениям полного спина и спина подсистемы мюон-ядро:

$(S=0,\ S_{N\mu}=1/2)$, $(S=1,\ S_{N\mu}=1/2)$, $(S=1,\ S_{N\mu}=3/2)$,
$(S=2,\ S_{N\mu}=3/2)$ для $(\mu\ e\ {}^6_3\mathrm{Li})^+$;
$(S=1/2,\ S_{N\mu}=1)$, $(S=3/2,\ S_{N\mu}=1)$, $(S=3/2,\ S_{N\mu}=2)$,
$(S=5/2,\ S_{N\mu}=2)$ для $(\mu\ e\ {}^7_3\mathrm{Li})^+$.

После диагонализации мы имеем четыре собственных значения энергии ν_i. В случае мюонного лития $a \gg b$ и $a \gg c$. Поэтому интервалы сверхтонкой структуры $\Delta\nu_i$ могут быть представлены с хорошей точностью в виде

$$(\mu\ e\ {}^6_3\mathrm{Li})^+:\ \Delta\nu_1^{hfs}=\frac{b+4c}{3},\qquad \Delta\nu_2^{hfs}=\frac{2(b-2c)}{3}, \tag{6}$$

$$(\mu\ e\ {}^7_3\mathrm{Li})^+:\ \Delta\nu_1^{hfs}=\frac{5(b-3c)}{8},\ \Delta\nu_2^{hfs}=\frac{3(b+5c)}{8}. \tag{7}$$

Для углового момента подсистемы мюон-ядро $S_{N\mu}=1/2$ и $S_{N\mu}=3/2$ $(\mu\, e\, {}^6_3\mathrm{Li})^+$ интервалы сверхтонких расщеплений (6) с состояниями полного углового момента $S=0,\ 1$ и $S=1,\ 2$ возникают в результате магнитного взаимодействия между электроном и псевдоядром $(\mu\, {}^6_3\mathrm{Li})^{++}$. Такая же ситуация (7) справедлива для $(\mu\, e\, {}^7_3\mathrm{Li})^+$.

В первом порядке теории возмущений (ТВ) основные вклады в коэффициенты b (4) и c (5) могут быть аналитически вычислены с помощью (1) (далее верхние и нижние значения соответствуют $(\mu\, e\, {}^6_3\mathrm{Li})^+$ и $(\mu\, e\, {}^7_3\mathrm{Li})^+$):

$$b_0=\frac{2\pi\alpha}{3}\frac{g_e g_\mu}{m_e m_\mu}\int \Psi_0^*(\mathbf{x}_e,\mathbf{x}_\mu)\delta(\mathbf{x}_e-\mathbf{x}_\mu)\Psi_0(\mathbf{x}_e,\mathbf{x}_\mu)d\mathbf{x}_e d\mathbf{x}_\mu =$$
$$=\nu_F\frac{g_e g_\mu}{4}\frac{1}{(1+\frac{2M_e}{3M_\mu})^3}=\nu_F\Big[1+\kappa_\mu+(1+\kappa_\mu)\Big(-2\frac{M_e}{M_\mu}+\frac{8}{3}\frac{M_e^2}{M_\mu^2}\Big)\Big], \tag{8}$$

$$\nu_F=\frac{64\alpha^4 M_e^3}{3m_\mu m_e}=\begin{cases}36140.290\ \text{МГц},\\ 36141.701\ \text{МГц};\end{cases}\quad \kappa_\mu\nu_F=\begin{cases}42.137\ \text{МГц},\\ 42.138\ \text{МГц};\end{cases}$$

$$c_0=\frac{2\pi\alpha}{3}\frac{g_e g_N}{m_e m_p}\int \Psi_0^*(\mathbf{x}_e,\mathbf{x}_\mu)\delta(\mathbf{x}_e)\Psi_0(\mathbf{x}_e,\mathbf{x}_\mu)d\mathbf{x}_e d\mathbf{x}_\mu =$$
$$=\nu_F\frac{m_\mu}{m_p}\frac{g_e g_N}{4}=\begin{cases}1674.700\ \text{МГц},\\ 4422.900\ \text{МГц},\end{cases}$$

где мы получили в квадратных скобках энергию Ферми ν_F, поправку на аномальный магнитный момент мюона $\kappa_\mu\nu_F$ и члены отдачи. Аналогичный вклад будет давать аномальный магнитный момент электрона:

$$\kappa_e\nu_F=\begin{cases}41.959\ \text{МГц},\\ 41.961\ \text{МГц}.\end{cases}$$

Численное значения вклада в энергетический спектр представлено с точностью до 0.001 МГц. Интервалы сверхтонких расщеплений выражены через частоту с помощью соотношения $\Delta E^{hfs}=2\pi\hbar\Delta\nu^{hfs}$. Численные значения фундаментальных физических констант взяты из работ [21, 22].

Рассмотрим расчёт поправок на отдачу порядков $\alpha^4\frac{M_e}{M_\mu}$, $\alpha^4(\frac{M_e}{M_\mu})^2\ln\frac{M_e}{M_\mu}$, $\alpha^4(\frac{M_e}{M_\mu})^2$. Часть таких поправок уже содержится в (8). Во втором порядке ТВ мы также имеем вклады в сверхтонкое расщепление необходимого порядка $\alpha^4\frac{M_e}{M_\mu}$, $\alpha^4(\frac{M_e}{M_\mu})^2\ln\frac{M_e}{M_\mu}$, $\alpha^4(\frac{M_e}{M_\mu})^2$. Поправка в коэффициент b определяется формулой

$$b_{\rm rec}=2\int\Psi_0^*(\mathbf{x}_\mu,\mathbf{x}_e)\Delta H_0^{hfs}(\mathbf{x}_\mu-\mathbf{x}_e)\tilde{G}(\mathbf{x}_\mu,\mathbf{x}_e;\mathbf{x'}_\mu,\mathbf{x'}_e)\times$$
$$\times\Delta H(\mathbf{x'}_\mu,\mathbf{x'}_e)\Psi_0(\mathbf{x'}_\mu,\mathbf{x'}_e)d\mathbf{x}_\mu d\mathbf{x}_e d\mathbf{x'}_\mu d\mathbf{x'}_e, \quad (9)$$

где редуцированная функция Грина электрона имеет вид

$$\tilde{G}(\mathbf{x}_\mu,\mathbf{x}_e;\mathbf{x'}_\mu,\mathbf{x'}_e)=\sum_{n,n'\neq0}\frac{\psi_{\mu_n}(\mathbf{x}_\mu)\psi_{e_{n'}}(\mathbf{x}_e)\psi^*_{\mu_n}(\mathbf{x'}_\mu)\psi^*_{e_{n'}}(\mathbf{x'}_e)}{E_{\mu_0}+E_{e_0}-E_{\mu_n}-E_{e_{n'}}}. \quad (10)$$

Разделим сумму по мюонным состояниям в (10) на две части:

$$b_{\rm rec}=b^g_{\rm rec}+b^e_{\rm rec},$$

где $b^g_{\rm rec}$ есть вклад в $b_{\rm rec}$ при $n=0$, что соответствует основному состоянию мюона. Для этой части получим

$$b^g_{\rm rec}=\frac{4\pi\alpha}{3}\frac{g_e g_\mu}{m_e m_\mu}\int|\psi_{\mu_0}(\mathbf{x}_3)|^2\psi^*_{e_0}(\mathbf{x}_3)\times$$
$$\times\sum_{n'\neq0}^{\infty}\frac{\psi_{e_{n'}}(\mathbf{x}_3)\psi^*_{e_{n'}}(\mathbf{x}_1)}{E_{e_0}-E_{e_{n'}}}V_\mu(\mathbf{x}_1)\psi_{e_0}(\mathbf{x}_1)d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_3, \quad (11)$$

где введено обозначение для потенциала $V_\mu(\mathbf{x})$:

$$V_\mu(\mathbf{x}_1)=\int\psi^*_{\mu_0}(\mathbf{x}_2)\left[\frac{\alpha}{|\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1|}-\frac{\alpha}{x_1}\right]\psi_{\mu_0}(\mathbf{x}_2)d\mathbf{x}_2=$$
$$=-\frac{\alpha}{x_1}(1+3\alpha M_\mu x_1)e^{-6\alpha M_\mu x_1}.$$

Для дальнейшего интегрирования (11) по координатам мы использовали компактное выражение для функции Грина электрона [23]:

$$G_e(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_3)=\sum_{n'\neq0}^{\infty}\frac{\psi_{e_{n'}}(\mathbf{x}_3)\psi^*_{e_{n'}}(\mathbf{x}_1)}{E_{e_0}-E_{e_{n'}}}=$$
$$=-\frac{2\alpha M_e^2}{\pi}e^{-2\alpha M_e(x_1+x_3)}\Big[\frac{1}{4\alpha M_e x_>}-\ln(4\alpha M_e x_>)-\ln(4\alpha M_e x_<)+$$
$$+E_i(4\alpha M_e x_<)+\frac{7}{2}-2C-2\alpha M_e(x_1+x_3)+\frac{1-e^{4\alpha M_e x_<}}{4\alpha M_e x_<}\Big],$$

где $x_< = \min(x_1, x_3)$, $x_> = \max(x_1, x_3)$, $C = 0.577216\ldots$ — постоянная Эйлера, $E_i(x)$ — интегральная экспонента. Результат интегрирования по координатам в (11) может быть записан в виде разложения по отношению масс электрона и мюона M_e/M_μ:

$$b^g_{\mathrm{rec}} = \nu_F(1+\kappa_\mu)\Big[\frac{11}{24}\frac{M_e}{M_\mu} + \frac{1}{72}\frac{M_e^2}{M_\mu^2}\Big(-64\ln\frac{M_e}{M_\mu} - 7 - 128\ln 2 + 64\ln 3\Big)\Big].$$

Часть b^e_3, соответствующая возбуждённым состояниям мюона, может быть представлена в виде

$$b^e_{\mathrm{rec}} = \frac{4\pi\alpha}{3}\frac{g_e g_\mu}{m_e m_\mu}\int \psi^*_{\mu 0}(\mathbf{x}_3)\psi^*_{e0}(\mathbf{x}_3)\sum_{n\neq 0}\psi_{\mu_n}(\mathbf{x}_3)\psi^*_{\mu_n}(\mathbf{x}_2)G_e(\mathbf{x}_3,\mathbf{x}_1,z)\times$$
$$\times\left[\frac{\alpha}{|\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1|} - \frac{\alpha}{x_1}\right]\psi_{\mu 0}(\mathbf{x}_2)\psi_{e0}(\mathbf{x}_1)d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 d\mathbf{x}_3, \quad (12)$$

где

$$G_e(\mathbf{x}_3,\mathbf{x}_1,z) = \sum_{n'=0}^{\infty}\frac{\psi_{e_{n'}}(\mathbf{x}_3)\psi^*_{e_{n'}}(\mathbf{x}_1)}{z - E_{e_{n'}}} = \sum_{n'=0}^{\infty}\frac{\psi_{e_{n'}}(\mathbf{x}_3)\psi^*_{e_{n'}}(\mathbf{x}_1)}{E_{\mu 0}+E_{e0}-E_{\mu n}-E_{e_{n'}}}$$

— функция Грина электрона. Член $(-\alpha/x_1)$ не даёт вклада из-за ортогональности волновых функций мюона. Чтобы аналитически проинтегрировать (12), мы используем замену G_e на свободную функцию Грина электрона [4]:

$$G_e(\mathbf{x}_3,\mathbf{x}_1,z) \to G^0_e(\mathbf{x}_3-\mathbf{x}_1,z) = -\frac{M_e}{2\pi}\frac{e^{-\beta|\mathbf{x}_3-\mathbf{x}_1|}}{|\mathbf{x}_3-\mathbf{x}_1|},$$

где $\beta = \sqrt{2M_e(E_{\mu_n}-E_{e0}-E_{\mu 0})} > 0$. Кроме того, мы заменяем волновые функции электрона в (12) на их значения в нуле $\psi_{e0}(0)$. Опущенные в этом приближении члены могут дать вклад порядка $(\frac{M_e}{M_\mu})^2$. Результат численного интегрирования этих вкладов представлен в работе [6] для атома мюонного гелия, в которой показано, что численные значения поправок малы. Аналитическое интегрирование по координате $\mathbf{x}_1$ даёт результат

$$\int\frac{e^{-\beta|\mathbf{x}_3-\mathbf{x}_1|}}{|\mathbf{x}_3-\mathbf{x}_1|}\frac{d\mathbf{x}_1}{|\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1|} = 4\pi\Big[\frac{1}{\beta} - \frac{1}{2}|\mathbf{x}_3-\mathbf{x}_2| + \frac{1}{6}\beta|\mathbf{x}_3-\mathbf{x}_2|^2 + \ldots\Big], \quad (13)$$

где было использовано разложение экспоненты $e^{-\beta|\mathbf{x}_3-\mathbf{x}_2|}$ по $\beta|\mathbf{x}_3-\mathbf{x}_2|$. Данное разложение эквивалентно разложению по малому параметру $\sqrt{\frac{M_e}{M_\mu}}$. Первый член β^{-1} не даёт вклада. Второй член (13) даёт результат $-\nu_F\frac{35M_e}{24M_\mu}$. Третье слагаемое (13) приводит к следующему интегралу:

$$\int\psi^*_{\mu 0}(\mathbf{x}_3)\sum_n\sqrt{2M_e(E_{\mu_n}-E_{\mu 0})}\psi_{\mu_n}(\mathbf{x}_3)\psi^*_{\mu_n}(\mathbf{x}_2)\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3\psi_{\mu 0}(\mathbf{x}_2)d\mathbf{x}_2 d\mathbf{x}_3 =$$
$$= \frac{1}{3\alpha M_e}\Big(\frac{M_e}{M_\mu}\Big)^{3/2}S_{1/2},$$

где мы определили матричный элемент

$$S_{1/2} = \sum_n \Big(\frac{E_{\mu_n} - E_{\mu_0}}{R_\mu}\Big)^{1/2} \Big|\Big\langle \mu_0 \Big| \frac{\mathbf{x}}{a_\mu} \Big| \mu_n \Big\rangle\Big|^2. \qquad (14)$$

Вклады дискретного и непрерывного спектра (14) соответственно равны [24, 25]:

$$S^d_{1/2} = \sum_n \frac{2^8 n^6 (n-1)^{2n-9/2}}{(n+1)^{2n+9/2}} = 1.90695\ldots,$$

$$S^c_{1/2} = \int_0^\infty \frac{2^8 k dk}{(k^2+1)^{9/2}(1-e^{-2\pi/k})} \Big|\Big(\frac{1+ik}{1-ik}\Big)^{i/k}\Big| = 1.03111\ldots,$$

где $R_\mu = (9/2)\alpha^2 M_\mu$, $a_\mu = (3\alpha M_\mu)^{-1}$. Суммарный вклад первого и второго порядков ТВ в коэффициент b порядка α^4 имеет вид

$$b_{\rm rec} = \nu_F(1+\kappa_\mu)\Big[-3\frac{M_e}{M_\mu} - \frac{8}{9}\Big(\frac{M_e}{M_\mu}\Big)^2 \ln\frac{M_e}{M_\mu} + \\ + \frac{4}{9}\Big(\frac{M_e}{M_\mu}\Big)^{3/2} S_{1/2} + \frac{8}{9}\Big(\frac{M_e}{M_\mu}\Big)^2\Big(\frac{185}{64} - 2\ln 2 + \ln 3\Big)\Big].$$

Существует аналогичный вклад в коэффициент c во втором порядке ТВ. Для его вычисления необходимо использовать

$$\Delta H_0^{hfs}(\mathbf{x}_e) = \frac{2\pi\alpha}{3}\frac{g_e g_N}{m_e m_p}\delta(\mathbf{x}_e)$$

в выражении (9). После очевидных упрощений поправка на отдачу в коэффициент c может быть представлена в виде

$$c_1 = \frac{4\pi\alpha}{3}\frac{g_e g_N}{m_e m_p}\int \psi^*_{e_0}(0) G_e(0,\mathbf{x}_1) V_\mu(\mathbf{x}_1)\psi_{e_0}(\mathbf{x}_1) d\mathbf{x}_1,$$

где функция Грина электрона с одним нулевым аргументом вычисляется по формуле

$$G_e(0,\mathbf{x}) = \sum_{n\neq 0}^\infty \frac{\psi_{e_n}(0)\psi^*_{e_n}(\mathbf{x})}{E_{e_0} - E_{e_n}} = \\ = -\frac{2\alpha M_e^2}{\pi} e^{-2\alpha M_e x}\Big[\frac{1}{4\alpha M_e x} - \ln(4\alpha M_e x) + \frac{5}{2} - C - 2\alpha M_e x\Big].$$

После аналитического интегрирования по координатам представим результат в виде разложения по отношению масс $\frac{M_e}{M_\mu}$:

$$c_1 = c_0\Big[\frac{M_e}{M_\mu} + \frac{8}{9}\frac{M_e^2}{M_\mu^2}\Big(\frac{1}{4} + \ln\frac{3}{2} - \ln\frac{M_e}{M_\mu}\Big)\Big] = \begin{cases} 8.467 \text{ МГц}, \\ 22.302 \text{ МГц}. \end{cases}$$

Большое значение имеет поправка на отдачу, которая связана с двухфотонными обменными амплитудами в электрон-мюонном взаимодействии. Она имеет порядок $\alpha^5 \frac{m_e}{m_\mu} \ln \frac{m_e}{m_\mu}$. Этот вклад определяется следующим выражением [26, 27]:

$$\Delta H_{\mathrm{rec},\ 2\gamma}(\mathbf{x}_{\mu e}) = -8 \frac{\alpha^2}{m_\mu^2 - m_e^2} \ln \frac{m_\mu}{m_e} (\mathbf{S}_\mu \cdot \mathbf{S}_e)\, \delta(\mathbf{x}_{\mu e}). \tag{15}$$

Усредняя (15) по кулоновским волновым функциям, получим

$$b_{\mathrm{rec},\ 2\gamma} = \nu_F \frac{3\alpha}{\pi} \frac{m_\mu m_e}{m_\mu^2 - m_e^2} \ln \frac{m_\mu}{m_e} = \begin{cases} 6.430 \text{ МГц}, \\ 6.431 \text{ МГц}. \end{cases}$$

В этой работе мы провели аналитический и численный расчёт интервалов сверхтонкого расщепления уровней энергии в ионах мюонного лития $(\mu\, e\, {}^{6,7}_{3}\mathrm{Li})^+$ на основе метода теории возмущений, который был предложен ранее для атома мюонного гелия в работах [4–6]. Перечислим ряд основных особенностей проведённых расчётов.

1. Ионы мюонного лития имеют сложную сверхтонкую структуру, которая обусловлена взаимодействием магнитных моментов всех трёх частиц. Мы исследуем малые интервалы сверхтонких расщеплений, которые могут быть важны для экспериментального исследования.
2. В этой задаче имеются два малых параметра — постоянная тонкой структуры и отношение масс электрона и мюона, которые могут быть использованы для построения операторов взаимодействия частиц и вычисления соответствующих вкладов в спектр энергии. Основные вклады определяются порядками α^4, α^5 и α^6, в том числе и эффекты отдачи в первом и втором порядках ТВ.
3. Релятивисткие поправки были получены с помощью выражений [28, 29]:

$$b_{\mathrm{rel}} = \nu_F \left(\frac{3}{2} \Big(Z_1 \alpha \Big)^2 - \frac{1}{3} \Big(Z_2 \alpha \Big)^2 \right) = \begin{cases} 5.774 \text{ МГц}, \\ 5.774 \text{ МГц}; \end{cases}$$

$$c_{\mathrm{rel}} = c_0 \left(\frac{3}{2} (Z_1 \alpha)^2 \right) = \begin{cases} 0.535 \text{ МГц}, \\ 1.413 \text{ МГц}, \end{cases}$$

где Z_1 — заряд подсистемы (Ne), Z_2 — заряд подсистемы $(N\mu)$.

Используя численные значения коэффициентов b и c, мы нашли сверхтонкие расщепления для ионов мюонного лития:
$\Delta\nu_1 = 14153.03$ МГц и $\Delta\nu_2 = 21571.26$ МГц для $(\mu\, e\, {}^{6}_{3}\mathrm{Li})^+$,
$\Delta\nu_1 = 13991.97$ МГц и $\Delta\nu_2 = 21735.03$ МГц для $(\mu\, e\, {}^{7}_{3}\mathrm{Li})^+$.
В работе [13] был выполнен расчёт сверхтонкой структуры в ионах мюонного лития с помощью вариационного метода:
$\Delta\nu_1 = 14148.68$ МГц и $\Delta\nu_2 = 21567.11$ МГц для $(\mu\, e\, {}^{6}_{3}\mathrm{Li})^+$,
$\Delta\nu_1 = 13989.19$ МГц и $\Delta\nu_2 = 21729.22$ МГц для $(\mu\, e\, {}^{7}_{3}\mathrm{Li})^+$.

Различие наших результатов и [13] составляет несколько МГц. Как следует из работы [13], в ней были вычислены только основные вклады с высокой точностью, но различные поправки к гамильтониану были опущены. Таким образом, разница между нашими результатами и работой [13] связана с релятивистскими поправками и поправками на отдачу, которые были вычислены в этой работе. Полученные численные значения вкладов в коэффициенты b и c демонстрируют этот вывод. Отметим, что также необходимо учитывать эффекты поляризации вакуума, структуры ядра, вклад вершинных поправок.

Существует несколько основных источников теоретической ошибки. Прежде всего, как мы уже упоминали выше, поправки на отдачу порядка $(\frac{M_e}{M_\mu})^2$ не учитываются точно из-за замены функции Грина электрона на свободную. Численно этот вклад может дать 0.88 МГц. Второй источник ошибки связан с поправками порядка $\alpha^2\nu_F$. В случае связанного состояния двух частиц эти поправки были вычислены в работах [26, 30–34]. Теоретическая ошибка от вклада порядка $\alpha^2\nu_F$ составляет 1.92 МГц. Другая часть ошибки определяется двухфотонными обменными амплитудами в системе трёх частиц. Они имеют пятый порядок по α и содержат параметр отдачи порядка $\frac{m_e}{m_\alpha}\ln\frac{m_e}{m_\alpha}$, так что их численное значение может быть ± 0.22 МГц. Таким образом, общая теоретическая погрешность не превышает ± 2.13 МГц.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14–02–00173-а) и при государственной поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках реализации мероприятий Программы повышения конкурентоспособности СГАУ среди ведущих мировых научно-образовательных центров на 2013–2020 годы.

ORCIDs
Алексей Петрович Мартыненко: http://orcid.org/0000-0003-3323-2177
Александр Александрович Улыбин: http://orcid.org/0000-0002-9594-6995

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Мартыненко А. П., Улыбин А. А. Сверхтонкая структура ионов мюонного лития / *Четвертая международная конференция «Математическая физика и ее приложения»*: материалы конф.; ред. чл.-корр. РАН И. В. Волович; д.ф.-м.н., проф. В. П. Радченко. Самара: СамГТУ, 2014. С. 240–241.
2. Pohl R., Antognini A., Nez F. et al. The size of the proton // *Nature*, 2010. vol. 466. pp. 213–217. doi: 10.1038/nature09250.
3. Antognini A., Kottmann F., Biraben F., Indelicato P., Nez F., Pohl R. Theory of the 2S–2P Lamb shift and 2S hyperfine splitting in muonic hydrogen // *Annals of Physics*, 2013. vol. 331. pp. 127–145, arXiv: 1208.2637 [physics.atom-ph]. doi: 10.1016/j.aop.2012.12.003.
4. Lakdawala S. D., Mohr P. J. Hyperfine structure in muonic helium // *Phys. Rev. A*, 1980. vol. 22, no. 4. pp. 1572–1575. doi: 10.1103/physreva.22.1572.
5. Lakdawala S. D., Mohr P. J. Calculation of the muonic ^{3}He hyperfine structure // *Phys. Rev. A*, 1981. vol. 24, no. 4. pp. 2224–2227. doi: 10.1103/physreva.24.2224.
6. Lakdawala S. D., Mohr P. J. Perturbation-theory calculation of hyperfinr structure in muonic helium // *Phys. Rev. A*, 1984. vol. 29, no. 3. pp. 1047–1054. doi: 10.1103/physreva.29.1047.
7. Huang K.-N., Hughes V. W. Theoretical hyperfine structure of the muonic ^{3}He and ^{4}He atoms // *Phys. Rev. A*, 1982. vol. 26, no. 5. pp. 2330–2333. doi: 10.1103/physreva.26.2330.
8. Borie E. On the hyperfine structure of neutral muonic helium // *Z. Physik A*, 1979. vol. 291, no. 2. pp. 107–112. doi: 10.1007/bf01437989.
9. Drachman R. J. Nonrelativistic hyperfine splitting in muonic helium by adiabatic perturbation theory // *Phys. Rev. A*, 1980. vol. 22, no. 4. pp. 1755–1757. doi: 10.1103/physreva.22.1755.

10. Chen M.-K. Correlated wave functions and hyperfine splittings of the $2s$ state of muonic ^{3,4}He atoms // *Phys. Rev. A*, 1992. vol. 45, no. 3. pp. 1479–1492. doi: 10.1103/physreva.45.1479.
11. Yakhontov V. L., Amusia M. Ya. Hyperfine splitting computation in the $1s^{(e)}_{1/2}2s^{(\mu)}_{1/2}$ state of the exotic $({}^4\mathrm{He}^{2+}{-}\mu^-e^-)^0$ and $({}^3\mathrm{He}^{2+}{-}\mu^-e^-)^0$ atoms // *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.*, 1994. vol. 27, no. 16. pp. 3743–3765. doi: 10.1088/0953-4075/27/16/021.
12. Frolov A. M. Properties and hyperfine structure of helium-muonic atoms // *Phys. Rev. A*, 2000. vol. 61, no. 2, 022509. doi: 10.1103/physreva.61.022509.
13. Frolov A. M. Hyperfine splitting in the ground states of the lithium-muonic ions and in the 2^3S states of the lithium-muonic atoms // *Phys. Let. A*, 2006. vol. 357, no. 4–5. pp. 334–338. doi: 10.1016/j.physleta.2006.04.059.
14. Korobov V. I. Coulomb three-body bound-state problem: Variational calculations of nonrelativistic energies // *Phys. Rev. A*, 2000. vol. 61, no. 6, 064503. doi: 10.1103/physreva.61.064503.
15. Pachucki K. Hyperfine structure of muonic helium // *Phys. Rev. A*, 2001. vol. 63, no. 3, 032508. doi: 10.1103/physreva.63.032508.
16. Krutov A. A., Martynenko A. P. Ground-state hyperfine structure of the muonic helium atom // *Phys. Rev. A*, 2008. vol. 78, no. 3, 032513. doi: 10.1103/physreva.78.032513.
17. Krutov A. A., Martynenko A. P. Hyperfine structure of the ground state muonic ^{3}He atom // *Eur. Phys. J. D*, 2011. vol. 62, no. 2. pp. 163–175, arXiv: 1007.1419 [hep-ph]. doi: 10.1140/epjd/e2011-10401-5.
18. Krutov A. A., Martynenko A. P. Hyperfine structure of the excited state $1s^{(e)}_{1/2}2s^{(\mu)}_{1/2}$ of the muonic helium atom // *Phys. Rev. A*, 2012. vol. 86, no. 5, 052501. doi: 10.1103/physreva.86.052501.
19. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Квантовая механика (нерелятивистская теория)*. М.: Наука, 1989. 768 с.
20. Собельман И. И. *Введение в теорию атомных спектров*. М.: Физматлит, 1963. 640 с.
21. Mohr P. J., Taylor B. N., Newell D. B. CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2010 // *Rev. Mod. Phys.*, 2012. vol. 84, no. 4. pp. 1527–1605. doi: 10.1103/revmodphys.84.1527.
22. Stone N. J. Table of nuclear magnetic dipole and electric quadrupole moments // *Atomic Data and Nuclear Data Tables*, 2005. vol. 90, no. 1. pp. 75–176. doi: 10.1016/j.adt.2005.04.001.
23. Hameka H. F. On the use of Green functions in atomic and molecular calculations. I. The Green function of the hydrogen atom // *J. Chem. Phys.*, 1967. vol. 47, no. 8. pp. 2728–2735. doi: 10.1063/1.1712290; doi: 10.1063/1.1668086.
24. Bethe H. A., Salpeter E. E. *Quantum mechanics of one- and two-electron atoms*. New York: A Plenum/Rosetta Edition, 1977. xii+370 pp.. doi: 10.1007/978-1-4613-4104-8
25. Фок В. А. *Начала квантовой механики*. М.: Наука, 1976. 376 с.
26. Eides M. I., Grotch H., Shelyuto V. A. Theory of light hydrogenlike atoms // *Physics Reports*, 2001. vol. 342, no. 2–3. pp. 63–261. doi: 10.1016/s0370-1573(00)00077-6.
27. Arnowitt R. The hyperfine structure of hydrogen // *Phys. Rev.*, 1953. vol. 92, no. 4. pp. 1002–1009. doi: 10.1103/physrev.92.1002.
28. Huang K.-N., Hughes V. W. Theoretical hyperfine structure of muonic helium // *Phys. Rev. A*, 1979. vol. 20, no. 3. pp. 706–717. doi: 10.1103/physreva.20.706.
29. Chen M.-K. Hyperfine splitting for the ground-state muonic ^{3}He atom-corrections up to α^2 // *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.*, 1993. vol. 26, no. 15. pp. 2263–2272. doi: 10.1088/0953-4075/26/15/013.
30. Martynenko A. P. 2S Hyperfine splitting of muonic hydrogen // *Phys. Rev. A*, 2005. vol. 71, no. 2, 022506, arXiv: hep-ph/0409107. doi: 10.1103/physreva.71.022506.
31. Мартыненко А. П. Теория изотопического сдвига мюонный водород – мюонный дейтерий // *ЖЭТФ*, 2005. Т. 128, № 6. С. 1169–1183, arXiv: hep-ph/0412250.

32. Мартыненко А. П. Сверхтонкая структура S-уровней иона мюонного гелия // *ЖЭТФ*, 2008. Т. 133, № 4. С. 794–804, arXiv: 0710.3237 [hep-ph].
33. Мартыненко А. П. Тонкая и сверхтонкая структура P-уровней мюонного водорода // *Ядерная физика*, 2008. Т. 71, № 1. С. 126–136, arXiv: hep-ph/0610226.
34. Faustov R. N., Martynenko A. P., Martynenko G. A., Sorokin V. V. Radiative nonrecoil nuclear finite size corrections of order $\alpha(Z\alpha)^5$ to the hyperfine splitting of S-states in muonic hydrogen // *Phys. Let. B*, 2014. vol. 733. pp. 354–358, arXiv: 1402.5825 [hep-ph]. doi: 10.1016/j.physletb.2014.04.056.

Поступила в редакцию 16/XII/2014;
в окончательном варианте — 29/I/2015;
принята в печать — 08/IV/2015.

Vestn. Samar. Gos. Techn. Un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 2, pp. 270–282

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) **doi:** http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1375

MSC: 74E35, 74K20

HYPERFINE STRUCTURE OF MUONIC LITHIUM IONS*

A. P. Martynenko[1,2], ***A. A. Ulybin***[2]

[1] Samara State University,
1, Academician Pavlov st., Samara, 443011, Russian Federation.
[2] Samara State Aerospace University,
34, Moskovskoye sh., Samara, 443086, Russian Federation.

Abstract

On the basis of perturbation theory in fine structure constant α and the ratio of electron to muon masses we calculate recoil corrections of order $\alpha^4(M_e/M_\mu)$, $\alpha^4(M_e/M_\mu)^2\ln(M_e/M_\mu)$, $\alpha^4(M_e/M_\mu)^2$, $\alpha^5(m_e/m_\mu)\ln(m_e/m_\mu)$ to hyperfine splitting of the ground state in muonic lithium ions $(\mu\, e\, {}^6_3\mathrm{Li})^+$ and $(\mu\, e\, {}^7_3\mathrm{Li})^+$. We obtain total results for the ground state small hyperfine splittings in $(\mu\, e\, {}^6_3\mathrm{Li})^+$ $\Delta\nu_1 = 14153.03$ MHz and $\Delta\nu_2 = 21571.26$ MHz and in $(\mu\, e\, {}^7_3\mathrm{Li})^+$ $\Delta\nu_1 = 13991.97$ MHz and $\Delta\nu_2 = 21735.03$ MHz which can be considered as a reliable estimate for a comparison with future experimental data.

Keywords: quantum electrodynamics, hyperfine splitting, quasipotential method.
doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1375

Please cite this article in press as:
M a r t y n e n k o A. P., U l y b i n A. A. Hyperfine structure of muonic lithium ions, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 2, pp. 270–282. doi: 10.14498/vsgtu1375. (In Russian)

Authors Details:
Alexei P. Martynenko (Dr. Phys. & Math. Sci. a.p.martynenko@samsu.ru; Corresponding Author), Professor, Dept. of General and Theoretical Physics[1]; Professor, Dept. of Physics[2].
Alexander A. Ulybin (Sasha_Ulybin_20.10.2011@mail.ru), Student, Dept. of General and Theoretical Physics.

*This paper is an extended version of the paper [1], presented at the Mathematical Physics and Its Applications 2014 Conference.

Acknowledgments. This work has been supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 14–02–00173-a) and by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation in the framework of the implementation of the Program of increasing the competitiveness of SSAU among the world's leading scientific and educational centers over the period from 2013 till 2020.

ORCIDs
Alexei P. Martynenko: http://orcid.org/0000-0003-3323-2177
Alexander A. Ulybin: http://orcid.org/0000-0002-9594-6995

REFERENCES

1. Martynenko A. P., Ulybin A. A. Hyperfine structure of muonic lithium ions, *The 4nd International Conference "Mathematical Physics and its Applications"*, Book of Abstracts and Conference Materials; eds. I. V. Volovich; V. P. Radchenko. Samara, Samara State Technical Univ., 2014, pp. 240–241 (In Russian).
2. Pohl R., Antognini A., Nez F. et al. The size of the proton, *Nature*, 2010, vol. 466, pp. 213–217. doi: 10.1038/nature09250.
3. Antognini A., Kottmann F., Biraben F., Indelicato P., Nez F., Pohl R. Theory of the 2S–2P Lamb shift and 2S hyperfine splitting in muonic hydrogen, *Annals of Physics*, 2013, vol. 331, pp. 127–145, arXiv: 1208.2637 [physics.atom-ph]. doi: 10.1016/j.aop.2012.12.003.
4. Lakdawala S. D., Mohr P. J. Hyperfine structure in muonic helium, *Phys. Rev. A*, 1980, vol. 22, no. 4, pp. 1572–1575. doi: 10.1103/physreva.22.1572.
5. Lakdawala S. D., Mohr P. J. Calculation of the muonic ^{3}He hyperfine structure, *Phys. Rev. A*, 1981, vol. 24, no. 4, pp. 2224–2227. doi: 10.1103/physreva.24.2224.
6. Lakdawala S. D., Mohr P. J. Perturbation-theory calculation of hyperfinr structure in muonic helium, *Phys. Rev. A*, 1984, vol. 29, no. 3, pp. 1047–1054. doi: 10.1103/physreva.29.1047.
7. Huang K.-N., Hughes V. W. Theoretical hyperfine structure of the muonic ^{3}He and ^{4}He atoms, *Phys. Rev. A*, 1982, vol. 26, no. 5, pp. 2330–2333. doi: 10.1103/physreva.26.2330.
8. Borie E. On the hyperfine structure of neutral muonic helium, *Z. Physik A*, 1979, vol. 291, no. 2, pp. 107–112. doi: 10.1007/bf01437989.
9. Drachman R. J. Nonrelativistic hyperfine splitting in muonic helium by adiabatic perturbation theory, *Phys. Rev. A*, 1980, vol. 22, no. 4, pp. 1755–1757. doi: 10.1103/physreva.22.1755.
10. Chen M.-K. Correlated wave functions and hyperfine splittings of the $2s$ state of muonic ^{3,4}He atoms, *Phys. Rev. A*, 1992, vol. 45, no. 3, pp. 1479–1492. doi: 10.1103/physreva.45.1479.
11. Yakhontov V. L., Amusia M. Ya. Hyperfine splitting computation in the $1s^{(e)}_{1/2}2s^{(\mu)}_{1/2}$ state of the exotic $(^4\mathrm{He}^{2+}{-}\mu^-e^-)^0$ and $(^3\mathrm{He}^{2+}{-}\mu^-e^-)^0$ atoms, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.*, 1994, vol. 27, no. 16, pp. 3743–3765. doi: 10.1088/0953-4075/27/16/021.
12. Frolov A. M. Properties and hyperfine structure of helium-muonic atoms, *Phys. Rev. A*, 2000, vol. 61, no. 2, 022509. doi: 10.1103/physreva.61.022509.
13. Frolov A. M. Hyperfine splitting in the ground states of the lithium-muonic ions and in the 2^3S states of the lithium-muonic atoms, *Phys. Let. A*, 2006, vol. 357, no. 4–5, pp. 334–338. doi: 10.1016/j.physleta.2006.04.059.
14. Korobov V. I. Coulomb three-body bound-state problem: Variational calculations of nonrelativistic energies, *Phys. Rev. A*, 2000, vol. 61, no. 6, 064503. doi: 10.1103/physreva.61.064503.
15. Pachucki K. Hyperfine structure of muonic helium, *Phys. Rev. A*, 2001, vol. 63, no. 3, 032508. doi: 10.1103/physreva.63.032508.
16. Krutov A. A., Martynenko A. P. Ground-state hyperfine structure of the muonic helium atom, *Phys. Rev. A*, 2008, vol. 78, no. 3, 032513. doi: 10.1103/physreva.78.032513.

17. Krutov A. A., Martynenko A. P. Hyperfine structure of the ground state muonic ^{3}He atom, *Eur. Phys. J. D*, 2011, vol. 62, no. 2, pp. 163–175, arXiv: 1007.1419 [hep-ph]. doi: 10.1140/epjd/e2011-10401-5.

18. Krutov A. A., Martynenko A. P. Hyperfine structure of the excited state $1s^{(e)}_{1/2}2s^{(\mu)}_{1/2}$ of the muonic helium atom, *Phys. Rev. A*, 2012, vol. 86, no. 5, 052501. doi: 10.1103/physreva.86.052501.

19. Landau L. D., Lifshits E. M. *Kvantovaia mekhanika (nereliativistskaia teoriia)* [Quantum Mechanics: Nonrelativistic Theory]. Moscow, Nauka, 1989, 768 pp. (In Russian)

20. Sobel'man I. I. *Introduction to the theory of atomic spectra*, International Series in Natural Philosophy, vol. 40. Oxford, Pergamon Press, 1972, xvi+609 pp.. doi: 10.1016/B978-0-08-016166-2.50002-0.

21. Mohr P. J., Taylor B. N., Newell D. B. CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2010, *Rev. Mod. Phys.*, 2012, vol. 84, no. 4, pp. 1527–1605. doi: 10.1103/revmodphys.84.1527.

22. Stone N. J. Table of nuclear magnetic dipole and electric quadrupole moments, *Atomic Data and Nuclear Data Tables*, 2005, vol. 90, no. 1, pp. 75–176. doi: 10.1016/j.adt.2005.04.001.

23. Hameka H. F. On the use of Green functions in atomic and molecular calculations. I. The Green function of the hydrogen atom, *J. Chem. Phys.*, 1967, vol. 47, no. 8, pp. 2728–2735. doi: 10.1063/1.1712290; doi: 10.1063/1.1668086.

24. Bethe H. A., Salpeter E. E. *Quantum mechanics of one- and two-electron atoms*. New York, A Plenum/Rosetta Edition, 1977, xii+370 pp.. doi: 10.1007/978-1-4613-4104-8

25. Fock V. A. *Nachala kvantovoi mekhaniki* [Principles of Quantum Mechanics]. Moscow, Nauka, 1976, 376 pp. (In Russian)

26. Eides M. I., Grotch H., Shelyuto V. A. Theory of light hydrogenlike atoms, *Physics Reports*, 2001, vol. 342, no. 2–3, pp. 63–261. doi: 10.1016/s0370-1573(00)00077-6.

27. Arnowitt R. The hyperfine structure of hydrogen, *Phys. Rev.*, 1953, vol. 92, no. 4, pp. 1002–1009. doi: 10.1103/physrev.92.1002.

28. Huang K.-N., Hughes V. W. Theoretical hyperfine structure of muonic helium, *Phys. Rev. A*, 1979, vol. 20, no. 3, pp. 706–717. doi: 10.1103/physreva.20.706.

29. Chen M.-K. Hyperfine splitting for the ground-state muonic ^{3}He atom-corrections up to α^2, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.*, 1993, vol. 26, no. 15, pp. 2263–2272. doi: 10.1088/0953-4075/26/15/013.

30. Martynenko A. P. 2S Hyperfine splitting of muonic hydrogen, *Phys. Rev. A*, 2005, vol. 71, no. 2, 022506, arXiv: hep-ph/0409107. doi: 10.1103/physreva.71.022506.

31. Martynenko A. P. Theory of the muonic hydrogen-muonic deuterium isotope shift, *J. Exp. Theor. Phys.*, 2005, vol. 101, no. 6, pp. 1021–1035, arXiv: hep-ph/0412250. doi: 10.1134/1.2163919.

32. Martynenko A. P. Hyperfine structure of the S levels of the muonic helium ion, *J. Exp. Theor. Phys.*, 2008, vol. 106, no. 4, pp. 690–699, arXiv: 0710.3237 [hep-ph]. doi: 10.1134/S1063776108040079.

33. Martynenko A. P. Fine and hyperfine structure of P-wave levels in muonic hydrogen, *Atom. Nuclei*, 2008, vol. 71, no. 1, pp. 125–135, arXiv: hep-ph/0610226. doi: 10.1134/S1063778808010146.

34. Faustov R. N., Martynenko A. P., Martynenko G. A., Sorokin V. V. Radiative nonrecoil nuclear finite size corrections of order $\alpha(Z\alpha)^5$ to the hyperfine splitting of S-states in muonic hydrogen, *Phys. Let. B*, 2014, vol. 733, pp. 354–358, arXiv: 1402.5825 [hep-ph]. doi: 10.1016/j.physletb.2014.04.056.

Received 16/XII/2014;
received in revised form 29/I/2015;
accepted 08/IV/2015.