Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2016. Т. 20, № 2. С. 276–289
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1480

УДК 517.956.3

ЗАДАЧА С НЕЛОКАЛЬНЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ВТОРОГО РОДА ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Л. С. Пулькина[1], *А. Е. Савенкова*[2]

[1] Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева,
Россия, 443086, Самара, Московское ш., 34.
[2] Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

Рассмотрена задача с нелокальным интегральным условием второго рода для одномерного гиперболического уравнения в прямоугольной области. Доказаны существование и единственность обобщенного решения задачи. Для доказательства существования и единственности обобщенного решения поставленной задачи предложен новый метод исследования задач с интегральными условиями. Предложенный в работе метод позволил отказаться от некоторых условий на входные данные, обеспечивающих разрешимость поставленной задачи, а именно от требования обратимости оператора, порождаемого нелокальным условием. Суть данного метода состоит в эквивалентной замене заданного нелокального условия другим, также нелокальным, но содержащим в качестве внеинтегрального члена значения выводящей производной неизвестной функции на боковой границе. Установленная эквивалентность условий позволила перейти к задаче, для доказательства однозначной разрешимости которой применен метод компактности, зарекомендовавший себя как эффективный метод исследования разрешимости начально-краевых задач и задач с нелокальными условиями. С помощью метода Галеркина построена последовательность приближенных решений. Для продолжения исследования разрешимости задачи получены априорные оценки решения в пространстве Соболева. С помощью выведенных оценок доказано утверждение о возможности выделить из построенной методом Галеркина последовательности приближенных решений подпоследовательность, которая слабо сходится к решению задачи. В процессе доказательства разрешимости поставленной задачи обнаружилась интересная связь нелокальных интегральных условий с динамическими условиями.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, нелокальные интегральные условия, обобщенное решение, пространство Соболева, метод Галеркина.

Образец для цитирования

Пулькина Л. С., Савенкова А. Е. Задача с нелокальным интегральным условием второго рода для одномерного гиперболического уравнения // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2016. Т. 20, № 2. С. 276–289. doi: 10.14498/vsgtu1480.

Сведения об авторах

Людмила Степановна Пулькина (д.ф.-м.н., проф.; louise@samdiff.ru), профессор, каф. уравнений математической физики.
Алеся Евгеньевна Савенкова (alesya.savenkova@mail.ru; автор, ведущий переписку), ассистент, каф. высшей математики и прикладной информатики.

1. Постановка задачи. В области $Q_T = (0,l) \times (0,T)$, $l, T < \infty$, рассмотрим уравнение
$$u_{tt} - \big(a(x,t)u_x\big)_x + c(x,t)u = f(x,t) \tag{1}$$
и поставим задачу с нелокальным интегральным условием второго рода.

Задача 1. *Найти в Q_T решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным данным*
$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \tag{2}$$
а также условиям
$$u_x(0,t) = 0, \tag{3}$$
$$u(l,t) + \int_0^l K(x)u(x,t)dx = 0. \tag{4}$$

В настоящее время имеется значительное число работ, посвященных изучению нелокальных задач, в том числе задач с нелокальными интегральными условиями для гиперболических уравнений. Отметим как наиболее близкие к тематике данного исследования статьи [1–11], в которых разработаны некоторые методы исследования разрешимости задач с нелокальными интегральными условиями. Выбор конкретного метода обусловлен видом нелокальных условий. В нашем случае можно применить как метод вспомогательных задач [3], так и метод сведения к задаче с классическими краевыми условиями, но для нагруженного уравнения [4]. Мы предлагаем в этой статье другой подход, позволяющий воспользоваться идеей метода компактности [12], который зарекомендовал себя как эффективный метод обоснования разрешимости как начально-краевых задач [13], так и нелокальных [10].

Исследования задач с нелокальными интегральными условиями показали их связь с другими неклассическими задачами, в частности, с задачами с динамическими краевыми условиями. Один из вариантов такой связи демонстрируется в предлагаемой статье. Динамические граничные условия, содержащие значения вторых производных по переменной времени, возникают, например, при исследовании колебаний стержня при упругом закреплении, если к концам пружины прикреплен груз [14, 15], при изучении нестационарных внутренних волн в неоднородной или во вращающейся и стратифицированной жидкости [16, 17]. К динамическим условиям можно прийти и в результате формальных преобразований при переходе от интегральных условий первого рода к условиям второго рода [11].

2. Эквивалентность нелокальных условий. Начнем изучение поставленной задачи с доказательства утверждения, которое и обнаруживает связь условия (4) с динамическим условием.

Теорема 1. *Если $u \in C^2(\bar{Q}_T)$ удовлетворяет уравнению (1) и условиям (2), (3), $K \in C^2(0,l) \cap C^1[0,l]$, $K(l) \neq 0$, то условие (4) эквивалентно динамическому граничному условию*

$$K(l)a(l,t)u_x(l,t) - K'(l)a(l,t)u(l,t) + K'(0)a(0,t)u(0,t) + u_{tt}(l,t) + \\ + \int_0^l H(x,t)u(x,t)dx = g(t), \quad (5)$$

где обозначено

$$H(x,t) = \big(K'(x)a(x,t)\big)_x - c(x,t)K(x), \quad g(t) = -\int_0^l K(x)f(x,t)dx.$$

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы 1 и функция $u(x,t)$ удовлетворяет условию (4). Дифференцируя (4) дважды по t, получим

$$u_{tt}(l,t) + \int_0^l K(x)u_{tt}(x,t)dx = 0,$$

откуда в силу предположений о выполнении условий теоремы следует равенство

$$u_{tt}(l,t) + \int_0^l K(x)\big((au_x)_x - cu + f\big)dx = 0.$$

Интегрируя первое слагаемое интегрального члена и применяя условия теоремы 1, приходим к (5).

Предположим теперь, что выполнены условия теоремы, но функция $u(x,t)$ удовлетворяет условию (5). После интегрирования одного слагаемого интегрального члена и очевидных преобразований приходим к равенству

$$u_{tt}(l,t) + \int_0^l K(x)u_{tt}(x,t)dx = 0,$$

которое может быть записано в виде

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(u(l,t) + \int_0^l K(x)u(x,t)dx\right) = 0.$$

В силу условий (2) получаем соотношения

$$u(l,0) + \int_0^l K(x)u(x,0)dx = 0, \quad u_t(l,0) + \int_0^l K(x)u_t(x,0)dx = 0$$

и приходим к задаче Коши относительно функции

$$u(l,t) + \int_0^l K(x)u(x,t)dx,$$

которая имеет единственное решение. Стало быть,

$$u(l,t) + \int_0^l K(x)u(x,t)dx = 0,$$

что означает выполнение условия (4). $\square$

Доказанное в теореме 1 утверждение позволяет перейти от задачи 1 к задаче с динамическим граничным условием.

Задача 2. *Найти в Q_T решение уравнения* (1), *удовлетворяющее условиям* (2), (3) и (5).

Поясним смысл перехода от задачи 1 к задаче 2. Заметим, что условие (5) в отличие от условия (4) содержит в качестве внеинтегрального члена значение выводящей производной искомой функции на $x = l$, а именно $u_x(l,t)$, что и позволит нам воспользоваться основными идеями метода компактности. Это становится видно на первом шаге доказательства разрешимости задачи в процессе вывода интегрального тождества, на котором и базируется определение решения. Действительно, применяя стандартную процедуру [13], получим в результате интегрирования уравнения (1) равенство

$$\int_0^T\int_0^l\big(-u_tv_t+au_xv_x+cuv\big)dxdt-\frac{1}{K(l)}\int_0^T u_t(l,t)v_t(l,t)dt-$$
$$-\frac{1}{K(l)}\int_0^T v(l,t)\left(\gamma(l,t)u(l,t)-\gamma(0,t)u(0,t)+\int_0^l H(x,t)u(x,t)dx\right)dt=$$
$$=\int_0^T\int_0^l fvdxdt-\frac{1}{K(l)}\int_0^T v(l,t)\int_0^l Kfdxdt, \quad (6)$$

где $\gamma(x,t) = K(x)a(x,t)$.

Обозначим следующие область и классы:

$$\Gamma_l = \{(x,t):\ x = l,\ t\in[0,T]\},$$
$$W(Q_T) = \{u(x,t) : u \in W_2^1(Q_T),\ u_x(0,t) = 0,\ u_t \in L_2(\Gamma_l)\},$$
$$\hat W(Q_T) = \{v(x,t) : v(x,t) \in W_2^1(Q_T),\ v(x,T) = 0\}.$$

Определение. Обобщенным решением задачи 2 будем называть функцию $u(x,t) \in W(Q_T)$, удовлетворяющую условиям (2) и тождеству (6) для любой $v(x,t) \in \hat W(Q_T)$.

3. Разрешимость задачи 2. Разрешимость задачи 2 декларируется следующим утверждением.

Теорема 2. *Пусть выполняются следующие условия*:

(i) $a \in C(\bar Q_T)$, $a_t \in C(\bar Q_T)$, $a(x,t) > 0$, $c \in C(\bar Q_T)$, $f \in L_2(Q_T)$,

(ii) $K \in C^2(0,l) \cap C^1[0,l]$, $K(l) > 0$.

Тогда существует единственное обобщенное решение задачи 2.

Доказательство.

Единственность решения. Предположим, что существует два различных решения этой задачи: $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$. Тогда их разность $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ удовлетворяет условию $u(x,0) = 0$ и тождеству

$$\int_0^T\int_0^l\big(-u_tv_t+au_xv_x+cuv\big)dxdt-\frac{1}{K(l)}\int_0^T u_t(l,t)v_t(l,t)dt-$$
$$-\frac{1}{K(l)}\int_0^T v(l,t)\bigg(\gamma(l)u(l,t)-\gamma(0)u(0,l)+\int_0^l H(x,t)u(x,t)dx\bigg)dt=0. \quad (7)$$

Выберем в тождестве (7) функцию $v(x,t)$, положив

$$v(x,t)=\begin{cases}\displaystyle\int_\tau^t u(x,\eta)d\eta, & 0\leqslant t\leqslant\tau,\\ 0, & \tau\leqslant t\leqslant T,\end{cases}$$

где $\tau\in[0,T]$ выбирается произвольно.

Элементарные преобразования тождества (7) с выбранной указанным образом функцией $v(x,t)$ приводят к равенству

$$\frac{1}{2}\int_0^l\big(u^2(x,\tau)+a(x,0)v^2(x,0)\big)dx+\frac{1}{2K(l)}u^2(l,\tau)=$$
$$=\int_0^\tau\int_0^l cuv\,dxdt+\frac{K_x(l)a(l,0)}{2K(l)}v^2(l,0)+\frac{K'(l)}{2K(l)}\int_0^\tau a_t(l,t)v^2(l,t)dt+$$
$$+\frac{1}{K(l)}\int_0^\tau v(l,t)\int_0^l Hu\,dxdt+\frac{K'(0)}{K(l)}\int_0^\tau a(0,t)u(0,t)v(l,t)dt. \quad (8)$$

Оценим правую часть последнего равенства. Рассмотрим сначала последнее слагаемое и, прежде чем сделать оценку, проинтегрируем его, заметив при этом, что $u=v_t$, $v(x,\tau)=0$:

$$\int_0^\tau a(0,t)v_t(0,t)v(l,t)dt=-\int_0^\tau a(0,t)v(0,t)v_t(l,t)dt-$$
$$-\int_0^\tau a_t(0,t)v(0,t)v(l,t)dt-a(0,0)v(0,0)v(l,0).$$

Теперь оценим каждое из трех слагаемых, полученных в результате интегрирования. Заметим, что из условий теоремы следует существование чисел k_1, c_0, a_1, h_0 таких, что

$$\max_{\bar Q_T}|c(x,t)|\leqslant c_0,\quad \max_{\bar Q_T}|a(x,t),a_t(x,t)|\leqslant a_1,$$
$$\max_{[0,T]}|K(x),K'(x)|\leqslant k_1,\quad \max_{[0,T]}\int_0^l H^2(x,t)dx\leqslant h_0.$$

Тогда, применяя неравенство Коши, получим

$$\left|\int_0^\tau a(0,t)v(0,t)u(l,t)dt\right|\leqslant\frac{a_1}{2}\int_0^\tau\big(v^2(0,t)+u^2(l,t)\big)dt;$$
$$\left|\int_0^\tau a_t(0,t)v(0,t)v(l,t)dt\right|\leqslant\frac{a_1}{2}\int_0^\tau\big(v^2(0,t)+v^2(l,t)\big)dt;$$

$$\left|v(0,0)v(l,0)\right| \leqslant \frac{1}{2}\left(v^2(0,0)+v^2(l,0)\right).$$

Для дальнейшей оценки нам понадобятся неравенства, которые играют ту же роль, что и известное неравенство для следов [13, с. 77]

$$v^2(s_i,t) \leqslant \varepsilon \int_0^l v_x^2(x,t)dx + c(\varepsilon)\int_0^l v^2(x,t)dx,$$
$$v^2(s_i,t) \leqslant 2l \int_0^l v_x^2(x,t)dx + \frac{2}{l}\int_0^l v^2(x,t)dx,$$
$$s_1=0, \quad s_2=l, \quad t\in[0,T],$$

и в нашем частном случае прямоугольной области легко выводятся из представлений

$$v(s_i,t)=\int_x^{s_i} v_\xi(\xi,t)d\xi + v(x,t).$$

Также мы будем пользоваться неравенством, вытекающим из вида выбранной функции $v(x,t)$:

$$v^2(x,t) \leqslant \tau \int_0^\tau u^2(x,t)dt.$$

Оценив теперь каждое из слагаемых правой части (8), получим

$$\int_0^l \left(u^2(x,\tau)+a(x,0)v_x^2(x,0)\right)dx + \frac{1}{K(l)}u^2(l,\tau) \leqslant M_1\int_0^\tau\int_0^l \left(u^2+v_x^2\right)dxdt+$$
$$+M_2\int_0^\tau u^2(l,t)dt + \frac{K'(0)+K'(l)}{K(l)}a_1\varepsilon\int_0^l v_x^2(x,0)dx, \quad (9)$$

где числа M_1, M_2 зависят только от c_0, c_1, k_1, h_0.

Пусть $a(x,t)\geqslant a_0>0$. Если $K'(0)+K'(l)\neq 0$, выберем ε так, чтобы

$$a_0-\frac{K'(0)+K'(l)}{K(l)}a_1\varepsilon>0,$$

и перенесем интеграл

$$\frac{K'(0)+K'(l)}{K(l)}a_1\varepsilon\int_0^l v_x^2(x,0)dx$$

в левую часть (9). Для определенности будем считать, что

$$a_0-\frac{K'(0)+K'(l)}{K(l)}a_1\varepsilon \geqslant \frac{a_0}{2}.$$

Тогда приходим к неравенству

$$\int_0^l\left(u^2(x,\tau)+\frac{a_0}{2}v_x^2(x,0)\right)dx+\frac{1}{K(l)}u^2(l,\tau)\leqslant$$

$$\leqslant M_1 \int_0^\tau \int_0^l \big(u^2 + v_x^2\big) dx dt + M_2 \int_0^\tau u^2(l,t) dt. \quad (10)$$

Заметим, что в случае $K'(0) + K'(l) = 0$ мы придем к неравенству (10) с той лишь разницей, что в левой части его вместо $a_0/2$ будет a_0. Введем функцию

$$w(x,t) = \int_0^t u_x(x,\eta) d\eta.$$

Тогда, как нетрудно видеть,

$$v_x(x,t) = w(x,t) - w(x,\tau), \quad v_x(x,0) = -w(x,\tau).$$

Введенная таким образом функция $w(x,t)$ позволяет получить неравенство для одного из слагаемых правой части (10):

$$\int_0^\tau \int_0^l v_x^2(x,t) dx dt = \int_0^\tau \int_0^l \big(w(x,t) - w(x,\tau)\big)^2 dx dt \leqslant$$
$$\leqslant 2 \int_0^\tau \int_0^l w^2(x,t) dx dt + 2\tau \int_0^l w^2(x,\tau) dx.$$

Пользуясь произволом, выберем τ так, чтобы

$$\frac{a_0}{2} - 2M_1\tau \geqslant \frac{a_0}{4}.$$

Если $\tau \in [0, a_0/(8M_1)]$, то это неравенство выполнено и можно перенести интеграл

$$2M_1\tau \int_0^l w^2(x,\tau) dx$$

в левую часть (10). После всех сделанных оценок и преобразований из (10) получаем неравенство

$$m_0 \int_0^l \big(u^2(x,\tau) + w^2(x,\tau)\big) dx + \frac{1}{K(l)} u^2(l,\tau) \leqslant$$
$$\leqslant 2M_1 \int_0^\tau \int_0^l \big(u^2 + w^2\big) dx dt + M_2 \int_0^\tau u^2(l,t) dt,$$

где $m_0 = \min\{1, a_0/4\}$, к которому можно применить неравенство Гронуолла, что моментально влечет выполнение равенства $u(x,\tau) = 0$ для всех $\tau \in [0, a_0/(8M_1)]$.

Повторяя рассуждения для $\tau \in [a_0/(8M_1), a_0/(4M_1)]$ и продолжая этот процесс, мы за конечное число шагов убедимся в том, что $u(x,t) = 0$ $\forall t \in [0,T]$, что и приводит к противоречию с предположением о существовании более одного решения.

Существование решения. Доказательство существования обобщенного решения проведем по следующей схеме:

– построим последовательность приближенных решений;
– выведем априорную оценку;
– покажем, что полученная оценка позволяет выделить слабо сходящуюся подпоследовательность;
– убедимся в том, что предел выделенной подпоследовательности и есть искомое решение.

Перейдем к реализации нашего плана. Пусть функции $w_k(x) \in C^2[0,l]$, $w'_k(0) = 0$, образуют линейно независимую и полную в $W_2^1(0,l)$ систему. Будем искать приближенное решение задачи в виде

$$u^m(x,t) = \sum_{k=1}^{m} c_k(t)w_k(x)$$

из соотношений

$$\int_0^l (u_{tt}^m w_k + a u_x^m w'_k + c u^m w_k)dx+ \\ + \frac{w_k(l)}{K(l)}\left(u_{tt}^m(l,t) - \gamma(l)u^m(l,t) + \gamma(0)u^m(0,l) + \int_0^l H(x,t)u^m(x,t)dx\right) = \\ = \int_0^l f(x,t)w_k(x)dx - \frac{w_k(l)}{K(l)}\int_0^l K(x,t)f(x,t)dxdt. \quad (11)$$

Дополнив соотношения (11), которые представляют собой систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $c_k(t)$, начальными условиями

$$c_k(0) = 0, \quad c'_k(0) = 0,$$

приходим к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (11), разрешимость которой гарантирована условиями теоремы. Прежде всего покажем, что система (11) разрешима относительно старших производных. Запишем ее в виде

$$\sum_{r=1}^{m} A_{kj}(t)c''_k(t) + \sum_{k=1}^{m} B_{kj}(t)c_k(t) = f_j(t),$$

$$A_{kj}(t) = \int_0^l w_k(x)w_j(x)dx + \frac{1}{K(l)}w_k(l)w_j(l),$$

$$B_{kj}(t) = \int_0^l \big(a(x,t)w'_k(x)w'_j(x) + c(x,t)w_k(x)w_j(x)\big)dx+ \\ + \frac{1}{K(l)}\Bigg(K'(l)a(l,t)w_k(l)w_j(l) - K'(0)a(0,t)w_k(0)w_j(l)+ \\ + w_j(l)\int_0^l H(x,t)w_k(x)dx\Bigg).$$

Рассмотрим квадратичную форму с коэффициентами A_{kj}:

$$q = \sum_{k,l=1}^{m} A_{kl}\xi_k\xi_l = \int_0^l |z(x)|^2 dx + \frac{1}{K(l)}|z(l)|^2 \geqslant 0,$$

где

$$z = \sum_{i=1}^{m} \xi_i w_i(x),$$

причем равенство нулю возможно лишь при $z = 0$. Так как функции $w_i(x)$ линейно независимы, $z = 0$ только в том случае, когда $\xi_i = 0$ $\forall i = 1, \ldots, m$. Стало быть, квадратичная форма q, а с ней и матрица из коэффициентов при старших производных системы (11), положительно определена, что и означает разрешимость системы относительно старших производных. В силу условий теоремы коэффициенты системы ограничены, а свободные члены $f_j \in L_1(0,T)$. Таким образом, мы приходим к выводу о существовании решения задачи Коши для системы (11), причем $c_k'' \in L_1(0,T)$. Это, в свою очередь, означает, что последовательность приближенных решений построена.

Для дальнейших шагов в доказательстве существования обобщенного решения поставленной задачи нам потребуется априорная оценка, к выводу которой мы и перейдем.

Умножим каждое из равенств (11) на $c_j'(t)$, просуммируем по j от 1 до m, а затем проинтегрируем от 0 до τ, в результате чего придем к равенству

$$\begin{aligned}
&\int_0^\tau \int_0^l \big(u_{tt}^m u_t^m + a u_x^m u_{xt}^m + c u^m u_t^m\big) dxdt + \\
&\quad + \frac{1}{K(l)} \int_0^\tau u_t^m(l,t)\Big(u_{tt}^m(l,t) - \gamma(l)u^m(l,t) + \gamma(0)u^m(0,t) + \\
&\qquad + \int_0^l H(x,t)u^m(x,t)dx\Big)dt = \\
&= \int_0^\tau \int_0^l f(x,t)u_t^m(x,t)dxdt - \frac{1}{K(l)} \int_0^\tau u^m(l,t) \int_0^l K(x)f(x,t)dxdt. \qquad (12)
\end{aligned}$$

Интегрируя по частям, преобразуем равенство (12). Получим

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^l \big((u_t^m)^2 + a(u_x^m)^2\big)\big|_{t=\tau} dx + \frac{1}{2K(l)}\big(u_t^m(l,\tau)\big)^2 = \\
&\quad = -\int_0^\tau \int_0^l c u^m u_t^m dxdt + \frac{\gamma(l)}{K(l)} \int_0^\tau u^m(0,t)u_t^m(l,t)dt + \\
&\quad + \int_0^\tau \int_0^l a_t (u_x^m)^2 dxdt - \frac{1}{K(l)} \int_0^\tau u_t^m(l,t) \int_0^l H u^m dxdt + \\
&\qquad + \int_0^\tau \int_0^l f u_t^m dxdt - \frac{1}{K(l)} \int_0^\tau u_t^m(l,t) \int_0^l K f dxdt. \qquad (13)
\end{aligned}$$

Применяя неравенства Коши, Коши—Буняковского, очевидное неравенство

$$\left(u^m(x,\tau)\right)^2 \leqslant \tau \int_0^\tau \left(u_t^m(x,t)\right)^2 dt$$

и условия теоремы, с помощью той же техники, что и при доказательстве единственности решения, из (13) получим неравенство

$$\int_0^l \left((u^m)^2 + (u_t^m)^2 + (u_x^m)^2\right)\Big|_{t=\tau} dx + \frac{1}{K(l)}(u_t^m(l,\tau))^2 \leqslant$$
$$\leqslant M_3 \int_0^\tau \int_0^l \left((u^m)^2 + (u_t^m)^2 + (u_x^m)^2\right) dxdt +$$
$$+ M_4 \int_0^\tau \left(u_t^m(l,t)\right)^2 dt + M_5 \int_0^\tau \int_0^l f^2 dxdt,$$

где M_i зависят лишь от постоянных c_0, k_0, c_1, a_0, a_1, h_0 и не зависят от m. Из этого неравенства, справедливого для любого m, в силу леммы Гронуолла вытекает *априорная оценка*

$$\|u^m\|^2_{W_2^1(Q_T)} + \|u_t^m\|^2_{L_2(\Gamma_l)} \leqslant R.$$

Стало быть, из построенной последовательности $\{u^m(x,t)\}$ приближенных решений можно выделить слабо сходящуюся в $W(Q_T)$ подпоследовательность, за которой во избежание громоздкой записи сохраним прежнее обозначение.

Покажем теперь, что предел выделенной подпоследовательности $u \in W(Q_T)$ и есть искомое приближенное решение.

Умножим каждое из равенств (11) на $d_j \in C^1(0,T)$, $d_j(T) = 0$, просуммируем по l от 1 до m, а затем проинтегрируем от 0 до T. После интегрирования первого слагаемого полученного равенства по частям и введения обозначения

$$\eta(x,t) = \sum_{j=1}^m d_j(t) w_j(x)$$

получим

$$\int_0^T \int_0^l \left(-u_t^m \eta_t + a u_x^m \eta_x + c u^m \eta\right) dxdt - \frac{1}{K(l)} \int_0^T u_t(l,t)\eta_t(l,t)dt -$$
$$- \frac{1}{K(l)} \int_0^T \eta(l,t)\left(\gamma(l,t)u^m(l,t) - \gamma(0,t)u^m(0,t) + \int_0^l H(x,t)u^m(x,t)dx\right)dt =$$
$$= \int_0^T \int_0^l f\eta dxdt - \frac{1}{K(l)} \int_0^T \eta(l,t) \int_0^l K f dxdt. \quad (14)$$

Совокупность функций вида

$$\sum_{j=1}^m d_j(t) w_j(x)$$

обозначим $\mathcal{N}_m$. Зафиксируем произвольно функцию $\eta(x,t)$ из какого-либо множества $\mathcal{N}_{m_i}$. В (14) можно перейти к пределу при $m \to \infty$ в силу обоснованной выше слабой сходимости выделенной подпоследовательности. В результате мы приходим к тождеству (6) для предельной функции $u \in W(Q_T)$, справедливому для произвольной функции $\eta \in \mathcal{N}_{m_i}$. Так как

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{N}_m$$

плотно в $\hat{W}$, полученное в результате предельного перехода тождество выполняется для любой функции из $\hat{W}(Q_T)$, что и завершает доказательство существования обобщенного решения задачи 2. □

Продифференцируем соотношение (11) по t, а затем умножим на $c_k''(t)$, просуммируем по $k = 1, \ldots, m$ и проинтегрируем по $t \in (0, \tau)$. В результате получим

$$\begin{aligned}
&\int_0^\tau \int_0^l \big(u^m_{ttt}u^m_{tt} + au^m_{xt}u^m_{xtt} + cu^m_t u^m_{tt}\big)dxdt + \\
&\qquad\qquad + \int_0^\tau \int_0^l \big(a_t u^m_x u^m_{xtt} + c_t u^m u^m_{tt}\big)dxdt + \\
&\quad + \frac{1}{K(l)} \int_0^\tau u^m_{tt}(l,t)\big(u^m_{ttt}(l,t) - \gamma(l)u^m_t(l,t) + \gamma(0)u^m_t(0,t)\big)dt + \\
&\quad + \int_0^\tau u^m_{tt}(l,t) \int_0^l Hu^m_t dxdt + \int_0^\tau u^m_{tt}(l,t) \int_0^l H_t u^m dxdt = \\
&\qquad = \int_0^\tau \int_0^l fu^m_{tt} dxdt - \frac{1}{K(l)} \int_0^\tau u^m_{tt}(l,t) \int_0^l (Kf)_t dxdt.
\end{aligned}$$

Применяя ту же технику, что приведена выше, получим вторую априорную оценку:

$$\|u_{tt}\|_{L_2(Q_T)} \leqslant P_1, \quad \|u_{xt}\|_{L_2(Q_T)} \leqslant P_2, \quad \|u_{tt}\|_{L_2(0,T)} \leqslant P_3,$$

с помощью которой можно показать, следуя [13] и учитывая условия теоремы, существование производной u_{xx}, причем $u_{xx} \in L_2(Q_T)$. Таким образом, $u \in W_2^2$. Тогда уже нетрудно показать, проделав интегрирование по частям в тождестве (6), что решение задачи 2 является и решением задачи 1.

ORCIDs
Людмила Степановна Пулькина: http://orcid.org/0000-0001-7947-6121
Алеся Евгеньевна Савенкова: http://orcid.org/0000-0001-6682-684X

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гордезиани Д. Г., Авалишвили Г. А. Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды // *Матем. моделирование*, 2000. Т. 12, № 1. С. 94–103.
2. Bouziani A. On the solvability of a nonlocal problems arising in dynamics of moisture transfer // *Georgian Mathematical Journal*, 2003. vol. 10, no. 4. pp. 607–622. doi: 10.1515/GMJ.2003.607.

3. Пулькина Л. С. Нелокальная задача с интегральными условиями для гиперболического уравнения // *Диффер. уравн.*, 2004. Т. 40, № 7. С. 887–892.
4. Кожанов А. И., Пулькина Л. С. О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // *Диффер. уравн.*, 2006. Т. 42, № 9. С. 1166–1179.
5. Нахушев А. М. *Задачи со смещением для уравнений в частных производных*. М.: Наука, 2006. 288 с.
6. Дмитриев В. Б. Нелокальная задача с интегральными условиями для волнового уравнения // *Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер.*, 2006. № 2(42). С. 15–27.
7. Стригун М. В. Об одной нелокальной задаче с интегральным граничным условием для гиперболического уравнения // *Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер.*, 2009. № 8(74). С. 78–87.
8. Avalishvili G., Avalishvili M., Gordeziani D. On integral nonlocal boundary problems for some partial differential equations // *Bull. Georg. Natl. Acad. Sci.*, 2011. vol. 5, no. 1. pp. 31–37.
9. Пулькина Л. С. Краевые задачи для гиперболического уравнения с нелокальными условиями I и II рода // *Изв. вузов. Матем.*, 2012. № 4. С. 74–83.
10. Пулькина Л. С. *Задачи с неклассическими условиями для гиперболических уравнений*. Самара: Самарский университет, 2012. 194 с.
11. Pulkina L. S. Solution to nonlocal problems of pseudohyperbolic equations // *EJDE*, 2014. vol. 2014, no. 116. pp. 1–9, http://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2014/116/pulkina.pdf.
12. Lions J. L. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires* [Some Methods for Solving Nonlinear Boundary Value Problems] / Etudes mathematiques. Paris: Dunod, 1969. xx+554 pp. (In French)
13. Ладыженская О. А. *Краевые задачи математической физики*. М.: Наука, 1973. 402 с.
14. Тихонов А. Н., Самарский А. А. *Уравнения математической физики*. М.: Наука, 2004. 798 с.
15. Федотов И. А., Полянин А. Д., Шаталов М. Ю. Теория свободных и вынужденных колебаний твердого стержня, основанная на модели Рэлея // *ДАН*, 2007. Т. 417, № 1. С. 56–61.
16. Doronin G. G., Lar'kin N. A., Souza A. J. A hyperbolic problem with nonlinear second-order boundary damping // *EJDE*, 1998. vol. 1998, no. 28. pp. 1–10, http://ejde.math.txstate.edu/Volumes/1998/28/Doronin.pdf.
17. Корпусов М. О. *Разрушение в неклассических волновых уравнениях*. М.: URSS, 2010. 237 с.

Поступила в редакцию 09/III/2016;
в окончательном варианте — 22/IV/2016;
принята в печать — 27/V/2016.

Vestn. Samar. Gos. Techn. Un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2016, vol. 20, no. 2, pp. 276–289

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1480

MSC: 35A01, 35L10, 35A02

A PROBLEM WITH NONLOCAL INTEGRAL CONDITION OF THE SECOND KIND FOR ONE-DIMENSIONAL HYPERBOLIC EQUATION

***L. S. Pulkina*[1], *A. E. Savenkova*[2]**

[1] Samara National Research University,
34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.
[2] Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

In this paper, we consider a problem for a one-dimensional hyperbolic equation with nonlocal integral condition of the second kind. Uniqueness and existence of a generalized solution are proved. In order to prove this statement we suggest a new approach. The main idea of it is that given nonlocal integral condition is equivalent with a different condition, nonlocal as well but this new condition enables us to derive a priori estimates of a required solution in Sobolev space. By means of derived estimates we show that a sequence of approximate solutions constructed by Galerkin procedure is bounded in Sobolev space. This fact implies the existence of weakly convergent subsequence. Finally, we show that the limit of extracted subsequence is the required solution to the problem.

Keywords: hyperbolic equation, nonlocal integral conditions, generalized solution, Sobolev space, Galerkin procedure.

ORCIDs
Ludmila S. Pulkina: http://orcid.org/0000-0001-7947-6121
Alesya E. Savenkova: http://orcid.org/0000-0001-6682-684X

Please cite this article in press as:
P u l k i n a L. S., S a v e n k o v a A. E. A problem with nonlocal integral condition of the second kind for one-dimensional hyperbolic equation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2016, vol. 20, no. 2, pp. 276–289. doi: 10.14498/vsgtu1480. (In Russian)

Authors Details:
Ludmila S. Pulkina (Dr. Phys. & Math. Sci.; louise@samdiff.ru), Professor, Dept. of Mathematical Physics Equations.
Alesya E. Savenkova (alesya.savenkova@mail.ru; Corresponding Author), Assistant, Dept. of Mathematics and Applied Informatics.

REFERENCES

1. Gordeziani D. G., Avalishvili G. A. On the constructing of solutions of the nonlocal initial boundary value problems for one-dimensional medium oscillation equations, *Matem. Mod.*, 2000, vol. 12, no. 1, pp. 94–103 (In Russian).
2. Bouziani A. On the solvability of a nonlocal problems arising in dynamics of moisture transfer, *Georgian Mathematical Journal*, 2003, vol. 10, no. 4, pp. 607–622. doi: 10.1515/GMJ.2003.607.
3. Pulkina L. S. A nonlocal problem with integral conditions for a hyperbolic equation, *Differ. Equ.*, 2004, vol. 40, no. 7, pp. 947–953. doi: 10.1023/B:DIEQ.0000047025.64101.16.
4. Kozhanov A. I., Pulkina L. S. On the solvability of boundary value problems with a nonlocal boundary condition of integral form for multidimensional hyperbolic equations, *Differ. Equ.*, 2006, vol. 42, no. 9, pp. 1233–1246. doi: 10.1134/S0012266106090023.
5. Nakhushev A. M. *Zadachi so smeshcheniem dlia uravnenii v chastnykh proizvodnykh* [Problems with shifts for partial differential equations]. Moscow, Nauka, 2006, 288 pp. (In Russian)
6. Dmitriev V. B. A nonlocal problem with integral conditions for the wave equation, *Vestnik SamGU. Estestvenno-Nauchnaya Ser.*, 2006, no. 2(42), pp. 15–27 (In Russian).
7. Strigun M. V. On certain nonlocal problem with integral boundary condition for hyperbolic equation, *Vestnik SamGU. Estestvenno-Nauchnaya Ser.*, 2009, no. 8(74), pp. 78–87 (In Russian).
8. Avalishvili G., Avalishvili M., Gordeziani D. On integral nonlocal boundary problems for some partial differential equations, *Bull. Georg. Natl. Acad. Sci.*, 2011, vol. 5, no. 1, pp. 31–37.
9. Pul'kina L. S. Boundary-value problems for a hyperbolic equation with nonlocal conditions of the I and II kind, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2012, vol. 56, no. 4, pp. 62–69. doi: 10.3103/S1066369X12040081.
10. Pulkina L. S. *Zadachi s neklassicheskimi usloviiami dlia giperbolicheskikh uravnenii* [Problems with non-classical conditions for hyperbolic equations]. Samara, Samara University, 2012, 194 pp. (In Russian)
11. Pulkina L. S. Solution to nonlocal problems of pseudohyperbolic equations, *EJDE*, 2014, vol. 2014, no. 116, pp. 1–9, http://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2014/116/pulkina.pdf.
12. Lions J. L. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires* [Some Methods for Solving Nonlinear Boundary Value Problems], Etudes mathematiques. Paris, Dunod, 1969, xx+554 pp. (In French)
13. Ladyzhenskaya O. A. *Kraevye zadachi matematicheskoi fiziki* [Boundary Value Problems of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1973, 402 pp. (In Russian)
14. Tikhonov A. N.; Samarskii A. A. *Equations of mathematical physics*, International Series of Monographs on Pure and Applied Mathematics, vol. 39. Oxford etc., Pergamon Press., 1963, xvi+765 pp.
15. Fedotov I. A., Polyanin A. D., Shatalov M. Yu. Theory of free and forced vibrations of a rigid rod based on the Rayleigh model, *Dokl. Phys.*, 2007, vol. 52, no. 11, pp. 607–612. doi: 10.1134/S1028335807110080.
16. Doronin G. G., Lar'kin N. A., Souza A. J. A hyperbolic problem with nonlinear second-order boundary damping, *EJDE*, 1998, vol. 1998, no. 28, pp. 1–10, http://ejde.math.txstate.edu/Volumes/1998/28/Doronin.pdf.
17. Korpusov M. O. *Razrushenie v neklassicheskikh volnovykh uravneniiakh* [Blow-up in nonclassical wave equations]. Moscow, URSS, 2010, 237 pp. (In Russian)

Received 09/III/2016;
received in revised form 22/IV/2016;
accepted 27/V/2016.