Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2016. Т. 20, № 4. С. 644–655
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1502

УДК 517.968.74

ОБЫКНОВЕННОЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С ВЫРОЖДЕННЫМ ЯДРОМ И ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

Т. К. Юлдашев

Сибирский государственный аэрокосмический университет им. ак. М. Ф. Решетнева,
Россия, 660014, Красноярск, пр. имени газеты «Красноярский рабочий», 31.

Аннотация

Рассмотрены вопросы об однозначной разрешимости нелокальной краевой задачи для одного нелинейного обыкновенного интегро-дифференциального уравнения с вырожденным ядром и отражением аргумента. Развит метод вырожденного ядра для случая рассматриваемого интегро-дифференциального уравнения первого порядка. С помощью обозначения интегро-дифференциальное уравнение сведено к системе алгебраических уравнений со сложной правой частью. После некоторого преобразования получено нелинейное функционально-интегральное уравнение, однозначная разрешимость которого доказана методом последовательных приближений в сочетании его с методом сжимающих отображений. Данная работа является дальнейшим развитием теории обыкновенных нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с вырожденным ядром.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, вырожденное ядро, отражение аргумента, интегральное условие, однозначная разрешимость.

1. Постановка задачи. Математическое моделирование многих процессов, происходящих в реальном мире, часто приводит к изучению начальных и граничных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений в частных производных. Такие задачи составляют основу математической физики. Большой интерес с точки зрения физических приложений представляют интегро-дифференциальные уравнения. Изучению обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений посвящено большое количество работ (см., например, [1–10]). В случаях, когда граница области протекания физического процесса недоступна для измерений, в качестве дополнительной информации, достаточной для однозначной разрешимости задачи, могут служить нелокальные условия в интегральной форме (см. [11–15]).

Образец для цитирования
Юлдашев Т. К. Обыкновенное интегро-дифференциальное уравнение с вырожденным ядром и интегральным условием // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2016. Т. 20, № 4. С. 644–655. doi: 10.14498/vsgtu1502.

Сведения об авторе
Турсун Камалдинович Юлдашев (к.ф.-м.н., доц.; tursun.k.yuldashev@gmail.com), доцент, каф. высшей математики.

В настоящей работе предлагается методика изучения нелокальной краевой задачи для обыкновенного нелинейного интегро-дифференциального уравнения первого порядка с вырожденным ядром. Методы исследования интегро-дифференциальных уравнений в частных производных с вырожденным ядром развивались в работах [16–20].

Итак, на отрезке $[-T;T]$ рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение вида

$$u'(t) + \mu \int_{-T}^{T} K(t,s)u(-s)\,ds = \eta(t) \int_{-T}^{T} u(\theta)\,d\theta + f\left(\int_{-T}^{T} H(\theta)u(\theta)\,d\theta\right) \tag{1}$$

с интегральным условием

$$u(0) + \int_{-T}^{T} \Theta(t)u(t)\,dt = \varphi, \tag{2}$$

где $\eta(t) \in C[-T;T]$, $f(\gamma) \in C(\mathbb{R})$, $\Theta(t) \in C^1[-T;T]$, $\varphi = \mathrm{const}$,

$$0 < \int_{-T}^{T} |H(t)|\,dt < \infty,$$

$$K(t,s) = \sum_{i=1}^{m} a_i(t)b_i(s), \quad a_i(t), b_i(s) \in C^1[-T;T],$$

$0 < T < \infty$, μ — действительный спектральный параметр. Здесь предполагается, что функции $a_i(t)$ и $b_i(s)$ являются линейно независимыми.

2. Нелинейное функционально-интегральное уравнение. В уравнении (1) в интегральном слагаемом сделаем замену переменной:

$$s = -\tau, \quad ds = -d\tau.$$

Тогда уравнение (1) приобретает вид

$$u'(t) - \mu \int_{-T}^{T} \sum_{i=1}^{m} a_i(t)b_i(-\tau)u(\tau)\,d\tau = \eta(t) \int_{-T}^{T} u(\theta)\,d\theta + f(\gamma),$$

где

$$\gamma = \int_{-T}^{T} H(\theta)u(\theta)\,d\theta.$$

С помощью обозначения

$$c_i = \int_{-T}^{T} b_i(-\tau)u(\tau)\,d\tau \tag{3}$$

уравнение (11) перепишется в следующем виде:

$$u'(t) = \mu \sum_{i=1}^{m} a_i(t)c_i + \eta(t) \int_{-T}^{T} u(\theta)\,d\theta + f(\gamma). \tag{4}$$

Пусть
$$\int_{-T}^{T}\Theta(t)\,dt\neq -1.$$
Тогда интегрированием из (4) с учетом интегрального условия (2) получаем
$$u(t)=\varphi h-h\int_{-T}^{T}\Theta(t)\left[\mu\sum_{i=1}^{m}q_i(t)c_i+p(t)\int_{-T}^{T}u(\theta)\,d\theta+tf(\gamma)\right]dt+$$
$$+\mu\sum_{i=1}^{m}q_i(t)c_i+p(t)\int_{-T}^{T}u(\theta)\,d\theta+tf(\gamma),\quad (5)$$
где
$$h=\left(1+\int_{-T}^{T}\Theta(t)\,dt\right)^{-1},\quad p(t)=\int_0^t\eta(\tau)\,d\tau,\quad q_i(t)=\int_0^t a_i(\tau)\,d\tau,\quad i=\overline{1,m}.$$

Подстановка выражения (5) в (3) дает систему алгебраических уравнений (САУ)
$$c_i+\mu\sum_{j=1}^{m}A_{ij}c_j=B_i,\quad i=\overline{1,m},\quad (6)$$
где
$$A_{ij}=-\int_{-T}^{T}b_i(-\tau)q_j(\tau)\,d\tau+h\int_{-T}^{T}b_i(-\tau)\int_{-T}^{T}\Theta(\xi)q_j(\xi)\,d\xi d\tau$$
и
$$B_i=h\int_{-T}^{T}b_i(-\tau)\int_{-T}^{T}\Theta(\xi)\left[p(\xi)\int_{-T}^{T}u(\theta)\,d\theta+\xi f(\gamma)\right]d\xi d\tau-$$
$$-\int_{-T}^{T}b_i(-\tau)\left[\varphi h+p(\tau)\int_{-T}^{T}u(\theta)\,d\theta+sf(\gamma)\right]d\tau.\quad (7)$$

САУ (6) однозначно разрешима при любых конечных B_i, если выполняется следующее условие:
$$\Delta(\mu)=\begin{vmatrix}1+\mu A_{11} & \mu A_{12} & \dots & \mu A_{1m}\\ \mu A_{21} & 1+\mu A_{22} & \dots & \mu A_{2m}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mu A_{m1} & \mu A_{m2} & \dots & 1+\mu A_{mm}\end{vmatrix}\neq 0.\quad (8)$$

Определитель $\Delta(\mu)$ в (8) есть многочлен относительно μ степени не выше m. Уравнение $\Delta(\mu)=0$ имеет не более m различных корней. Эти корни являются собственными числами ядра интегро-дифференциального уравнения (1). Другие значения μ называются регулярными, при которых условие (8) выполняется. Для регулярных значений μ САУ (6) имеет единственное решение при любой конечной ненулевой правой части. В настоящей работе для таких регулярных значений параметра μ устанавливается однозначная разрешимость поставленной нелокальной задачи (1), (2). Тогда решения САУ (6) записываются в виде

$$c_i = \frac{\Delta_i(\mu)}{\Delta(\mu)}, \quad i = \overline{1,m}, \tag{9}$$

где $\Delta_i(\mu) =$

$$= \begin{vmatrix} 1+\mu A_{11} & \dots & \mu A_{1(i-1)} & B_1 & \mu A_{1(i+1)} & \dots & \mu A_{1m} \\ \mu A_{21} & \dots & \mu A_{2(i-1)} & B_2 & \mu A_{2(i+1)} & \dots & \mu A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu A_{m1} & \dots & \mu A_{m(i-1)} & B_m & \mu A_{m(i+1)} & \dots & 1+\mu A_{mm} \end{vmatrix}.$$

Среди элементов определителей $\Delta_i(\mu)$ находятся величины B_i. В их составе, в свою очередь, находится неизвестная функция $u(t)$. В самом деле, эта неизвестная функция находилась в правой части САУ (6). Чтобы вывести эту функцию из знака определителей, выражение в (7) перепишем в следующем виде:

$$B_i = B_{1i} + B_{2i} \int_{-T}^{T} u(\theta)\, d\theta + B_{3i} f(\gamma),$$

где

$$B_{1i} = \varphi h \int_{-T}^{T} b_i(-\tau)\, d\tau, \quad B_{2i} = \int_{-T}^{T} b_i(-\tau) \left[-p(\tau) + h \int_{-T}^{T} \Theta(\xi) p(\xi)\, d\xi \right] d\tau,$$

$$B_{3i} = \int_{-T}^{T} b_i(-\tau) \left[-\tau + h \int_{-T}^{T} \xi \Theta(\xi)\, d\xi \right] d\tau.$$

В этом случае, согласно свойствам определителя, имеем

$$\Delta_i(\mu) = \Delta_{1i}(\mu) + \Delta_{2i}(\mu) \int_{-T}^{T} u(\theta)\, d\theta + \Delta_{3i}(\mu) f(\gamma),$$

где $\Delta_{ki}(\mu) =$

$$= \begin{vmatrix} 1+\mu A_{11} & \dots & \mu A_{1(i-1)} & B_{k1} & \mu A_{1(i+1)} & \dots & \mu A_{1m} \\ \mu A_{21} & \dots & \mu A_{2(i-1)} & B_{k2} & \mu A_{2(i+1)} & \dots & \mu A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu A_{m1} & \dots & \mu A_{m(i-1)} & B_{km} & \mu A_{m(i+1)} & \dots & 1+\mu A_{mm} \end{vmatrix},$$

$k = 1, 2, 3$. Тогда формула (9) принимает вид

$$c_i = \frac{\Delta_{1i}(\mu)}{\Delta(\mu)} + \frac{\Delta_{2i}(\mu)}{\Delta(\mu)} \int_{-T}^{T} u(\theta)\, d\theta + \frac{\Delta_{3i}(\mu)}{\Delta(\mu)} f(\gamma), \quad i = \overline{1,m}. \tag{10}$$

Подставляя (10) в (5), получаем следующее нелинейное функционально-интегральное уравнение (НФИУ):

$$u(t) = \Im_1(t;u) \equiv Q(t) + G(t)\int_{-T}^{T} u(\theta)\,d\theta + \Phi(t) f\left(\int_{-T}^{T} H(\theta)u(\theta)d\theta\right), \tag{11}$$

где

$$Q(t) = h\varphi - \mu h\int_{-T}^{T}\Theta(t)\sum_{i=1}^{m} q_i(t)\frac{\Delta_{1i}(\mu)}{\Delta(\mu)}\,dt + \mu\sum_{i=1}^{m} q_i(t)\frac{\Delta_{1i}(\mu)}{\Delta(\mu)},$$

$$G(t) = p(t) - h\int_{-T}^{T}\Theta(t)p(t)\,dt-$$

$$-\mu h\int_{-T}^{T}\Theta(t)\sum_{i=1}^{m} q_i(t)\frac{\Delta_{2i}(\mu)}{\Delta(\mu)}\,dt + \mu\sum_{i=1}^{m} q_i(t)\frac{\Delta_{2i}(\mu)}{\Delta(\mu)},$$

$$\Phi(t) = t - h\int_{-T}^{T}\Theta(t)t\,dt-$$

$$-\mu h\int_{-T}^{T}\Theta(t)\sum_{i=1}^{m} q_i(t)\frac{\Delta_{3i}(\mu)}{\Delta(\mu)}\,dt + \mu\sum_{i=1}^{m} q_i(t)\frac{\Delta_{3i}(\mu)}{\Delta(\mu)}.$$

3. Однозначная разрешимость нелинейного функционально-интегрального уравнения. Рассмотрим множество функций

$$\big\{u(t) \mid u(t) \in C[-T;T]\big\}.$$

С введением нормы

$$\big\|u(t)\big\| = \max_{t\in[-T;T]}\big|u(t)\big|$$

оно становится банаховым пространством.

Теорема 1. *Пусть выполняется условие* (8) *и*

1) $\beta_1 = \|Q(t)\| < \infty$; $\beta_2 = \|G(t)\| < \infty$; $\beta_3 = \|\Phi(t)\| < \infty$;

2) $M = \|f(\gamma)\| < \infty$; $|f(\gamma_1) - f(\gamma_2)| \leqslant L|\gamma_1 - \gamma_2|$, $0 < M$, $L = \mathrm{const}$;

3) $\rho = 2\beta_2 T + L\delta_2\beta_3 < 1$; $\delta_2 = \displaystyle\int_{-T}^{T}|H(t)|\,dt < \infty$.

Тогда НФИУ (11) *имеет единственное решение на отрезке* $[-T;T]$. *Это решение может быть найдено из следующего итерационного процесса*:

$$\begin{cases} u^0(t) = Q(t), \\ u^{j+1}(t) = \Im_1(t;u^j), \quad j = 0,1,2,\ldots,\ t\in[-T;\,T]. \end{cases} \tag{12}$$

Доказательство. Рассмотрим шар $S(u^0;r_1)$ с радиусом

$$r_1 = \beta_1 + \frac{\beta_3 M}{1 - 2\beta_2 T}.$$

Для нулевого приближения в силу первого условия теоремы 1 из (12) имеем

$$\|u^0(t)\| \leqslant \beta_1. \tag{13}$$

В силу условий теоремы 1 и неравенства (13) из (12) для первой разности получаем оценку

$$\|u^1(t) - u^0(t)\| \leqslant 2\|Q(t)\|\beta_2 T + \beta_3\|f(\gamma)\| = 2\beta_1\beta_2 T + \beta_3 M. \tag{14}$$

В силу условий теоремы 1 и оценки (14) из (12) для разности $u^2(t) - u^0(t)$ получим

$$\|u^2(t) - u^0(t)\| \leqslant \\ \leqslant 2(2\beta_1\beta_2 T + \beta_3 M)\beta_2 T + \beta_3 M = \beta_1(2\beta_2 T)^2 + (2\beta_2 T + 1)\beta_3 M. \tag{15}$$

Далее из (12) с учетом (15) имеем

$$\|u^3(t) - u^0(t)\| \leqslant (2\beta_1\beta_2 T + \beta_3 M)(2\beta_2 T)^2 + (2\beta_2 T + 1)\beta_3 M = \\ = \beta_1(2\beta_2 T)^3 + \big((2\beta_2 T)^2 + 2\beta_2 T + 1\big)\beta_3 M. \tag{16}$$

Продолжая этот процесс, аналогично (16) получаем

$$\|u^j(t) - u^0(t)\| \leqslant \beta_1(2\beta_2 T)^j + \big((2\beta_2 T)^{j-1} + (2\beta_2 T)^{j-2} + \ldots + \\ + (2\beta_2 T)^2 + 2\beta_2 T + 1\big)\beta_3 M. \tag{17}$$

Из последнего условия теоремы 1 следует, что $2\beta_2 T < 1$. Поэтому из (17), переходя к пределу при $j \to \infty$, имеем

$$\lim_{j\to\infty} \|u^j(t) - u^0(t)\| \leqslant \\ \leqslant \lim_{j\to\infty}\Big[\beta_1(2\beta_2 T)^j + \big((2\beta_2 T)^{j-1} + (2\beta_2 T)^{j-2} + \ldots + \\ + (2\beta_2 T)^2 + 2\beta_2 T + 1\big)\beta_3 M\Big],$$

откуда получаем оценку

$$\|u^\infty(t) - u^0(t)\| < \beta_1 + \frac{\beta_3 M}{1 - 2\beta_2 T} = r_1. \tag{18}$$

Из (18) следует, что оператор в правой части (11) отображает шар $S(u^0; r_1)$ в себя. Теперь для произвольной разности $u^{j+1}(t) - u^j(t)$ получим следующую оценку:

$$\|u^{j+1}(t) - u^j(t)\| \leqslant [2\beta_2 T + L\delta_2\beta_3]\,\|u^j(t) - u^{j-1}(t)\| = \\ = \rho\|u^j(t) - u^{j-1}(t)\| < \|u^j(t) - u^{j-1}(t)\|. \tag{19}$$

В силу последнего условия теоремы 1 из оценки (19) следует, что оператор в правой части (11) является сжимающим. Из оценок (13), (18) и (19) мы заключаем, что для оператора (11) существует единственная неподвижная точка (см., напр. [21, стр. 389–401]). Следовательно, на отрезке $[-T;T]$ НФИУ (11) имеет единственное решение $u(t)$. Кроме того, для скорости сходимости справедлива оценка

$$\|u^{j+1}(t)-u(t)\| \leqslant \frac{\rho^{j+1}}{1-\rho}\big(2\beta_1\beta_2 T+\beta_3 M\big).$$

Дифференцируя НФИУ (11), имеем

$$u'(t)=\Im_2(t;u)\equiv Q'(t)+G'(t)\int_{-T}^{T}u(\theta)\,d\theta+\Phi'(t)f\left(\int_{-T}^{T}H(\theta)u(\theta)\,d\theta\right), \quad (20)$$

где $Q'(t)\in C^1[-T;T]$, $G'(t)\in C^1[-T;T]$, $\Phi'(t)\in C^1[-T;T]$. $\square$

Теорема 2. *Пусть выполняются условия теоремы 1 и*
1) $N_0=\|Q'(t)\|<\infty$;
2) $N_1=\|G'(t)\|\leqslant\beta_2$;
3) $N_2=\|\Phi'(t)\|\leqslant\beta_3$.
Тогда $u'(t)\in C[-T;T]$.

Доказательство. Рассмотрим шар $S\big((d/dt)u^0;r_2\big)$ с радиусом

$$r_2=\max\left\{N_0;N_1T\left(\beta_1+\frac{1}{1-2\beta_2T}\right)+N_2M\right\}<\infty.$$

Для оператора (20) рассмотрим следующий итерационный процесс:

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}u^0(t)=Q'(t),\\ \dfrac{d}{dt}u^{j+1}(t)=\Im_2(t;u^j), \quad j=0,1,2,\ldots.\end{cases} \quad (21)$$

Покажем, что последовательные приближения (21) не выходят из шара $S\big((d/dt)u^0;r_2\big)$. В силу первого условия теоремы 2 из (21) для нулевого приближения имеем

$$\left\|\frac{d}{dt}u^0(t)\right\|\leqslant N_0. \quad (22)$$

Для первой разности в силу условий теоремы 2 и неравенства (13) из (21) получаем оценку

$$\left\|\frac{d}{dt}u^1(t)-\frac{d}{dt}u^0(t)\right\|\leqslant 2N_1\beta_1T+N_2M.$$

Для разности $(d/dt)u^2(t)-(d/dt)u^0(t)$ в силу условий теоремы 2 и оценки (14) из (21) получим

$$\left\|\frac{d}{dt}u^2(t)-\frac{d}{dt}u^0(t)\right\|\leqslant 2(2\beta_1\beta_2T+\beta_3M)N_1T+N_2M.$$

Далее из (21) с учетом (15) имеем

$$\left\|\frac{d}{dt}u^3(t)-\frac{d}{dt}u^0(t)\right\| \leqslant N_1T\big(\beta_1(2\beta_2T)^2+(2\beta_2T+1)\beta_3M\big)+N_2M. \tag{23}$$

Продолжая этот процесс, аналогично (23) получаем

$$\begin{gathered}\left\|\frac{d}{dt}u^j(t)-\frac{d}{dt}u^0(t)\right\| \leqslant \\ \leqslant N_1T\Big[\beta_1(2\beta_2T)^j+\big((2\beta_2T)^{j-1}+(2\beta_2T)^{j-2}+\ldots+ \\ +(2\beta_2T)^2+2\beta_2T+1\big)\beta_3M\Big]+N_2M.\end{gathered} \tag{24}$$

Из последнего условия теоремы 1 следует, что $2\beta_2T<1$. Поэтому из (24) при переходе к пределу при $j\to\infty$ имеем

$$\left\|\frac{d}{dt}u^\infty(t)-\frac{d}{dt}u^0(t)\right\| < N_1T\Big(\beta_1+\frac{1}{1-2\beta_2T}\Big)+N_2M\leqslant r_2. \tag{25}$$

Из (22) и (25) заключаем, что оператор в правой части (20) отображает шар $S\big((d/dt)u^0;r_2\big)$ в себя. Аналогично (19) для произвольной разности $(d/dt)u^{j+1}(t)-(d/dt)u^j(t)$ справедлива следующая оценка:

$$\left\|\frac{d}{dt}u^{j+1}(t)-\frac{d}{dt}u^j(t)\right\| < \|u^j(t)-u^{j-1}(t)\|.$$

Кроме этого, для скорости сходимости также справедлива следующая оценка:

$$\left\|\frac{d}{dt}u^{j+1}(t)-\frac{d}{dt}u(t)\right\| \leqslant \frac{\rho^{j+1}}{1-\rho}(2\beta_1N_1T+N_2M).$$

Отсюда следует, что $u'(t)\in C[-T;T]$. $\square$

Декларация о финансовых и других взаимоотношениях. Исследование не имело спонсорской поддержки. Автор несет полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена автором. Автор не получал гонорар за статью.

ORCID
Турсун Камалдинович Юлдашев: http://orcid.org/0000-0002-9346-5362

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Банг Н. Д., Чистяков В. Ф., Чистякова Е. В. О некоторых свойствах вырожденных систем линейных интегро-дифференциальных уравнений. I // *Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика*, 2015. Т. 11. С. 13–27.
2. Быков Я. В. *О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений.* Фрунзе: Кирг. гос. ун-т, 1957. 327 с.
3. Вайнберг М. М. Интегро-дифференциальные уравнения / Итоги науки. Сер. Мат. анал. Теор. вероятн. Регулир. 1962. М.: ВИНИТИ, 1964. С. 5–37.
4. Васильев В. В. К вопросу о решении задачи Коши для одного класса линейных интегро-дифференциальных уравнений // *Изв. вузов. Матем.*, 1961. № 4. С. 8–24.

5. Виграненко Т. И. Об одном классе линейных интегро-дифференциальных уравнений // *Зап. Ленинград. горного ин-та*, 1956. Т. 33, № 3. С. 176–186.
6. Власов В. В., Перез Ортиз Р. Спектральный анализ интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в теории вязкоупругости и теплофизике // *Матем. заметки*, 2015. Т. 98, № 4. С. 630–634. doi: 10.4213/mzm10829.
7. Кривошеин Л. Е. Об одном методе решения некоторых линейных интегро-дифференциальных уравнений // *Изв. вузов. Матем.*, 1960. № 3. С. 168–172.
8. Ландо Ю. К. Краевая задача для линейных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра в случае распадающихся краевых условий // *Изв. вузов. Матем.*, 1961. № 3. С. 56–65.
9. Шишкин Г. А. Обоснование одного метода решения интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с функциональным запаздыванием / *Корректные краевые задачи для неклассических уравнений математической физики*. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1980. С. 172–178.
10. Фалалеев М. В. Интегро-дифференциальные уравнения с фредгольмовым оператором при старшей производной в банаховых пространствах и их приложения // *Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика*, 2012. Т. 5, № 2. С. 90–102.
11. Гордезиани Д. Г., Авалишвили Г. А. Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды // *Матем. моделирование*, 2000. Т. 12, № 1. С. 94–103.
12. Тихонов И. В. Теоремы единственности в линейных нелокальных задачах для абстрактных дифференциальных уравнений // *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2003. Т. 67, № 2. С. 133–166. doi: 10.4213/im429.
13. Пулькина Л. С. Нелокальная задача для гиперболического уравнения с интегральными условиями I рода с ядрами, зависящими от времени // *Изв. вузов. Матем.*, 2012. № 10. С. 32–44.
14. Сабитова Ю. К. Краевая задача с нелокальным интегральным условием для уравнений смешанного типа с вырождением на переходной линии // *Матем. заметки*, 2015. Т. 98, № 3. С. 393–406. doi: 10.4213/mzm9135.
15. Тагиев Р. К., Габибов В. М. Об одной задаче оптимального управления для уравнения теплопроводности с интегральным граничным условием // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2016. Т. 20, № 1. С. 54–64. doi: 10.14498/vsgtu1463.
16. Юлдашев Т. К. Обратная задача для одного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных третьего порядка // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2014. № 1(34). С. 56–65. doi: 10.14498/vsgtu1299.
17. Юлдашев Т. К. Двойная обратная задача для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма эллиптического типа // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2014. № 2(35). С. 39–49. doi: 10.14498/vsgtu1306.
18. Юлдашев Т. К. Об одном интегро-дифференциальном уравнении Фредгольма в частных производных третьего порядка // *Изв. вузов. Матем.*, 2015. № 9. С. 74–79.
19. Юлдашев Т. К. Обратная задача для нелинейного интегро- дифференциального уравнения Фредгольма четвертого порядка с вырожденным ядром // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2015. Т. 19, № 4. С. 736–749. doi: 10.14498/vsgtu1434.
20. Юлдашев Т. К. Обратная задача для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма третьего порядка с вырожденным ядром // *Владикавк. матем. журн.*, 2016. Т. 18, № 2. С. 76–85.
21. Треногин В. А. *Функциональный анализ*. М.: Наука, 1980. 495 с.

Поступила в редакцию 23/VII/2016;
в окончательном варианте — 15/10/2016;
принята в печать — 09/XII/2016.

Vestn. Samar. Gos. Techn. Un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2016, vol. 20, no. 4, pp. 644–655

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) **doi:** http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1502

MSC: 34K10, 34K99

AN ORDINARY INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION WITH A DEGENERATE KERNEL AND AN INTEGRAL CONDITION

T. K. Yuldashev

M. F. Reshetnev Siberian State Aerospace University,
31, pr. "Krasnoyarski Rabochiy", Krasnoyarsk, 660014, Russian Federation.

Abstract

We consider the questions of one value solvability of the nonlocal boundary value problem for a nonlinear ordinary integro-differential equation with a degenerate kernel and a reflective argument. The method of the degenerate kernel is developed for the case of considering ordinary integro-differential equation of the first order. After denoting the integro-differential equation is reduced to a system of algebraic equations with complex right-hand side. After some transformation we obtaine the nonlinear functional-integral equation, which one valued solvability is proved by the method of successive approximations combined with the method of compressing mapping. This paper advances the theory of nonlinear integro-differential equations with a degenerate kernel.

Keywords: integro-differential equation, degenerate kernel, reflective argument, integral form condition, one valued solvability.

Declaration of Financial and Other Relationships. The research has not had any sponsorship. The author is absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. The author has approved the final version of manuscript. The author has not received any fee for the article.

ORCID
Tursun K. Yuldashev: http://orcid.org/0000-0002-9346-5362

Please cite this article in press as:
Yuldashev T. K. An ordinary integro-differential equation with a degenerate kernel and an integral condition, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2016, vol. 20, no. 4, pp. 644–655. doi: 10.14498/vsgtu1502. (In Russian)

Author Details:
Tursun K. Yuldashev (Cand. Phys. & Math. Sci.; tursun.k.yuldashev@gmail.com), Associate Professor, Dept. of Higher Mathematics.

REFERENCES

1. Bang N. D., Chistyakov V. F., Chistyakova E. V. About some properties of degenerate systems of linear integro-differential equations. I, *IIGU Ser. Matematika*, 2015, vol. 11, pp. 13–27 (In Russian).
2. Bykov Ya. V. *O nekotorykh zadachakh teorii integro-differentsial'nykh uravnenii* [On some problems in the theory of integrodifferential equations]. Frunze, Kirgiz. State Univ., 1957, 327 pp. (In Russian)
3. Vainberg M. M. Integro-differential equations, Itogi Nauki. Ser. Mat. Anal. Teor. Ver. Regulir. 1962. Moscow, VINITI, 1964, pp. 5–37 (In Russian).
4. Vasil'ev V. V. On the solution of the Cauchy problem for a class of linear integro-differential equations, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1961, no. 4, pp. 8–24 (In Russian).
5. Vigranenko T. I. A boundary value problem for linear integro-differential equations, *Zap. Leningrad. gornogo in-ta*, 1956, vol. 33, no. 3, pp. 176–186 (In Russian).
6. Vlasov V. V., Perez Ortiz R. Spectral analysis of integro-differential equations in viscoelasticity and thermal physics, *Math. Notes*, 2015, vol. 98, no. 4, pp. 689–693. doi: 10.1134/S0001434615090357.
7. Krivoshein L. E. A method of solving certain linear integro-differential equations, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1960, no. 3, pp. 168–172 (In Russian).
8. Lando Yu. K. A boundary-value problem for linear integro-differential equations of Volterra type in the case of disjoint boundary conditions, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1961, no. 3, pp. 56–65 (In Russian).
9. Shishkin G. A. Justification of a method for solving integro-differential Fredholm equations with functional delay, In: *Korrektnye kraevye zadachi dlia neklassicheskikh uravnenii matematicheskoi fiziki* [Correct boundary value problems for nonclassical equations of mathematical physics]. Novosibirsk, Institute of Mathematics, Siberian Branch of the USSR Academy of Sciences, 1980, pp. 172–178 (In Russian).
10. Falaleev M. V. Integro-differential equations with Fredholm operator by the derivative of the higest order in Banach spaces and it's applications, *IIGU Ser. Matematika*, 2012, vol. 5, no. 2, pp. 90–102 (In Russian).
11. Gordeziani D. G., Avalishvili G. A. On the constructing of solutions of the nonlocal initial boundary value problems for one-dimensional medium oscillation equations, *Matem. Mod.*, 2000, vol. 12, no. 1, pp. 94–103 (In Russian).
12. Tikhonov I. V. Uniqueness theorems for linear non-local problems for abstract differential equations, *Izv. Math.*, 2003, vol. 67, no. 2, pp. 333–363. doi: 10.1070/IM2003v067n02ABEH000429.
13. Pul'kina L. S. A nonlocal problem for a hyperbolic equation with integral conditions of the 1st kind with time-dependent kernels, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2012, vol. 56, no. 10, pp. 26–37. doi: 10.3103/S1066369X12100039.
14. Sabitova Yu. K. Boundary-value problem with nonlocal integral condition for mixed-type equations with degeneracy on the transition line, *Math. Notes*, 2015, vol. 98, no. 3, pp. 454–465. doi: 10.1134/S0001434615090114.
15. Tagiyev R. K., Gabibov V. M. On optimal control problem for the heat equation with integral boundary condition, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2016, vol. 20, no. 1, pp. 54–64 (In Russian). doi: 10.14498/vsgtu1463.
16. Yuldashev T. K. Inverse Problem for a Fredholm Third Order Partial Integro-differential Equation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2014, no. 1(34), pp. 56–65 (In Russian). doi: 10.14498/vsgtu1299.
17. Yuldashev T. K. A double inverse problem for Fredholm integro-differential equation of elliptic type, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2014, no. 2(35), pp. 39–49 (In Russian). doi: 10.14498/vsgtu1306.

18. Yuldashev T. K. A certain Fredholm partial integro-differential equation of the third order, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2015, vol. 59, no. 9, pp. 62–66. doi: 10.3103/S1066369X15090091.
19. Yuldashev T. K. An inverse problem for a nonlinear Fredholm integro-differential equation of fourth order with degenerate kernel, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 4, pp. 736–749 (In Russian). doi: 10.14498/vsgtu1434.
20. Yuldashev T. K. Inverse problem for a third order Fredholm integro-differential equation with degenerate kernel, *Vladikavkaz. Mat. Zh.*, 2016, vol. 18, no. 2, pp. 76–85 (In Russian).
21. Trenogin V. A. *Funktsional'nyi analiz* [Functional analysis]. Moscow, Nauka, 1980, 495 pp. (In Russian)

Received 23/VII/2016;
received in revised form 15/10/2016;
accepted 09/XII/2016.