



Механика деформируемого твёрдого тела

УДК 539.42

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НАКОЛЕННОЙ ЭНЕРГИИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПРИ ЧИСЛЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ РАЗРУШЕНИЯ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ СТАЛИ

А. А. Костина¹, О. А. Плехов¹, В. Venkatraman²¹ Институт механики сплошных сред УрО РАН, Россия, 614013, Пермь, ул. Акад. Королёва, 1.² Indira Gandhi Centre for Atomic Research, India, 603102, Tamil Nadu, Kalpakkam.

Аннотация

В данной работе предложена модель баланса энергии в неупруго деформируемом металле. Ее отличительной чертой является учет структурных изменений в материале при помощи введения тензорного параметра плотности дефектов, совпадающего по смыслу с деформацией, обусловленной дефектами. Введение такого параметра позволило авторам работы предложить способ расчета величины накопленной энергии и сформулировать на ее основе критерий разрушения. Рассмотрены два способа вывода определяющих соотношений, позволяющих рассчитывать эволюцию пластической и структурной деформации. Первый способ основан на применении принципов линейной неравновесной термодинамики, второй способ представляет собой аналог теории пластического течения. Предложенная модель позволяет не только описывать напряженно-деформированное состояние, но и открывает возможности для использования энергетических критериев разрушения. На основе анализа экспериментальных исследований процесса накопления скрытой энергии деформирования в металлах предполагается, что разрушение в материале происходит при достижении накопленной энергией некоторого критического значения. Применение этого подхода к описанию разрушения проиллюстрировано на двух примерах. Первый пример посвящен моделированию распространения трещины при циклическом

© 2016 Самарский государственный технический университет.

Образец для цитирования

Костина А. А., Плехов О. А., Venkatraman В. Использование накопленной энергии деформирования при численном моделировании разрушения конструкций из стали // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2016. Т. 20, № 4. С. 656–674. doi: [10.14498/vsgtu1518](http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1518).

Сведения об авторах

Анастасия Андреевна Костина (kostina@icmm.ru; автор, ведущий переписку), младший научный сотрудник.

Олег Анатольевич Плехов (д.ф.-м.н., проф.; poa@icmm.ru), заместитель директора по науке.

Balasubramaniam Venkatraman (M.Sci. (Phy) PGDCA, Ph.D.; bvenkat@igcar.gov.in), Condensed Matter Physics Division.

кручении трех цилиндрических образцов с трещинами, ориентированными к оси цилиндра под разными углами, второй пример описывает процессы зарождения и распространение трещины в опоре подшипника. При решении этих задач использовался расширенный метод конечных элементов. Полученные результаты согласуются с ранее опубликованными результатами.

Ключевые слова: накопленная энергия, численное моделирование, разрушение металлов, термодинамика неупругого деформирования, сталь 08X18H10.

Введение. Появление новых материалов, в том числе металлов и сплавов, и использование их в нестандартных условиях требует создания универсальных подходов, пригодных для описания их механического поведения широкого класса материалов. Оценка момента разрушения элементов конструкций предполагает разработку критериев прочности, которые бы позволяли достоверно описывать разрушение при различных условиях нагружения. Настоящая работа посвящена описанию феноменологического подхода к моделированию неупругого поведения металлов и развитию на его основе энергетического критерия разрушения.

В процессе пластического деформирования металлов наблюдается зарождение дефектов различных уровней, которые можно охарактеризовать введением параметра поврежденности. Впервые такой подход был предложен в работе Ю. Работнова [1] (Л. Качановым [2] был введен противоположный параметр — параметр сплошности). Параметр поврежденности определялся как отношение площади, занимаемой трещинами, к площади неповрежденного материала. В настоящее время предложены различные способы определения меры поврежденности, отличные от классического. Например, в работе [3] в качестве меры поврежденности было использовано отношение эффективного модуля Юнга к модулю Юнга материала в неповрежденном состоянии, в [4] рассматривалось отношение деформации материала в поврежденном и неповрежденном состояниях. G. Rosuelier [5, 6] в качестве такого параметра применял отношение массовой плотности поврежденного материала к начальной (неповрежденной). Некоторые исследователи предлагают вместо одной скалярной переменной, описывающей поврежденность, использовать две. Первый параметр отвечает за объемную поврежденность и определяется через эффективный модуль Юнга, а второй параметр — за сдвиговую поврежденность и определяется через модуль сдвига [7]. Обобщение скалярных мер поврежденности на более общий (тензорный) случай можно встретить в работах [8–12]. Современный обзор используемых мер поврежденности приведен в работе [13]. При использовании такого подхода часто полагают, что разрушение в материале наступает при достижении поврежденностью некоторого критического значения.

Наиболее универсальными критериями разрушения с точки зрения авторов данной работы являются энергетические. Большой вклад в развитие энергетических критериев разрушения внесли отечественные ученые [14–17]. В настоящей работе для построения критерия разрушения материала используется величина накопленной энергии. Накопленная энергия представляет собой разность работы пластической деформации и выделенного тепла. Первые попытки исследования этого явления можно встретить в [18, 19]. Ра-

боты [20–22] посвящены экспериментальному определению величины накопленной энергии. В [23] рассмотрен способ определения величины накопленной энергии с помощью результатов геометрического анализа экспериментально определяемой кривой зависимости напряжения от деформации. Однако, как показано в [24], таким способом может быть определена только часть энергии, связанная с неоднородной пластической деформацией. А. Benzerga [25] предложил способ расчета накопленной энергии с помощью модели дискретной дислокационной пластичности. В работах [26, 27] накопленная энергия определяется с помощью введения внутренней переменной, в роли которой выступает пластическая деформация. В [28, 29] в качестве таких переменных использовались параметры упрочнения.

В работе В. Федорова [30] было показано, что критическая величина накопленной энергии является универсальным параметром, определяющим разрушение материала. Он предложил связывать этот параметр с одной из термодинамических характеристик материала (например, со скрытой теплотой плавления, энтальпией материала в твердом или жидком состояниях при температуре плавления), поскольку термодинамические свойства материала являются структурно-нечувствительными и не зависят от условий эксперимента. Кроме того, в работах В. Ивановой (см., например, [31]) отмечается энергетическое подобие процессов разрушения и плавления. Использование критерия разрушения, основанного на величине накопленной энергии, можно встретить в работах [32–35].

В данной работе накопление и эволюция дефектов описываются с помощью тензора плотности дефектов [36, 37]. Этот параметр имеет смысл дополнительной деформации, вызванной зарождением и ростом дефектов, и может быть использован в качестве независимого параметра в термодинамических потенциалах. Введение такой переменной позволяет оценивать значение накопленной энергии и формулировать критерий разрушения на его основе.

1. Определение структурно-чувствительного параметра. Термодинамическое состояние системы может быть описано набором внешних (т.е. наблюдаемых) и внутренних переменных (таких переменных, которые невозможно измерить прямыми методами). Выберем в качестве внешней переменной описывающей процесс необратимого деформирования, тензор полной скорости деформации $\dot{\epsilon}$. Для определения независимой внутренней переменной, воспользуемся подходом, описанным в работе [38].

Предположим, что для рассматриваемой среды типичными дефектами будут являться микросдвиги, определяемые симметричным тензором \mathbf{s} :

$$\mathbf{s} = \frac{1}{2}S(\mathbf{n}\mathbf{l} + \mathbf{l}\mathbf{n}),$$

где S — интенсивность сдвига, \mathbf{n} — единичный вектор нормали к плоскости сдвига, \mathbf{l} — направление сдвига. На макроскопическом уровне эти дефекты будут определяться тензором плотности дефектов \mathbf{p} , определяемым осреднением тензора \mathbf{s} по рассматриваемому объему:

$$\mathbf{p} = n\langle \mathbf{s} \rangle,$$

где n — объемная концентрация дефектов. Параметр \mathbf{p} имеет физический смысл дополнительной (структурной) деформации, вызванной зарождением и ростом дефектов, и может быть рассмотрен в качестве независимой

термодинамической переменной для рассматриваемого процесса необратимой деформации. Таким образом, введение параметра \mathbf{p} позволяет разделить неупругую деформацию на две части: «чистую» пластическую (диссипативную) деформацию, обусловленную движением дефектов, и структурную (недиссипативную), связанную с зарождением и ростом дефектов.

2. Построение определяющих соотношений неупругого деформирования металлов с помощью линейной термодинамики необратимых процессов. Рассмотрим вариант построения трехмерной модели неупругого деформирования металлов с использованием принципов линейной термодинамики необратимых процессов [39].

Второй закон термодинамики с учетом уравнения баланса энергии может быть записан в виде [27]

$$-\dot{F} - \dot{T}S + \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot \nabla T \geq 0, \quad (1)$$

где F — свободная энергия, S — энтропия, $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений, T — температура, \mathbf{q} — вектор потока тепла, ∇ — оператор Гамильтона, точка над буквой обозначает производную по времени.

Предположим, что свободная энергия является функцией температуры T , упругих деформаций $\boldsymbol{\epsilon}^e$ и структурно-чувствительного параметра \mathbf{p} :

$$F = F(\boldsymbol{\epsilon}^e, T, \mathbf{p}).$$

Тогда производная свободной энергии по времени имеет вид

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^e} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}} : \dot{\mathbf{p}} + \frac{\partial F}{\partial T} \cdot \dot{T}. \quad (2)$$

Использование гипотезы аддитивности тензора полной скорости деформации $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ позволяет представить ее в виде суммы скоростей упругой $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e$, пластической $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$ и структурной $\dot{\mathbf{p}}$ деформаций:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p + \dot{\mathbf{p}}. \quad (3)$$

Подстановка соотношений (2) и (3) в (1) позволяет записать неравенство (1) в следующем виде:

$$\left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^e} \right) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e - \left(\frac{\partial F}{\partial T} + S \right) \cdot \dot{T} + \boldsymbol{\sigma} : (\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p + \dot{\mathbf{p}}) - \frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}} : \dot{\mathbf{p}} + \frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot \nabla T \geq 0. \quad (4)$$

Требование справедливости выполнения этого неравенства для любых значений упругой деформации и температуры позволяет получить классические соотношения

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^e}, \quad (5)$$

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T}. \quad (6)$$

Подстановка (5) и (6) в (4) дает диссипативное неравенство в виде

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p + \left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}} \right) : \dot{\mathbf{p}} + \frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot \nabla T \geq 0. \quad (7)$$

В диссипативном неравенстве (7) величины $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$ и $\dot{\mathbf{p}}$ представляют собой термодинамические потоки, а величины $\boldsymbol{\sigma}$ и $(\boldsymbol{\sigma} - \partial F / \partial \mathbf{p})$ — термодинамические силы. Предположение о локальном равновесии рассматриваемой среды с дефектами позволяет записать линейные связи между термодинамическими силами и потоками

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \Gamma_\sigma \boldsymbol{\sigma} + \Gamma_{\sigma p} \left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}} \right), \quad (8)$$

$$\dot{\mathbf{p}} = \Gamma_p \left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}} \right) + \Gamma_{\sigma p} \boldsymbol{\sigma}, \quad (9)$$

где Γ_σ , Γ_p , $\Gamma_{\sigma p}$ — кинетические коэффициенты, на которые накладываются следующие ограничения:

$$\Gamma_\sigma \geq 0, \quad \Gamma_{\sigma p} \geq 0, \quad \Gamma_p \geq 0, \quad \Gamma_p \Gamma_\sigma - \Gamma_{\sigma p}^2 \geq 0.$$

Одним из возможных видов записи кинетических коэффициентов в предположении независимости процессов пластического и структурного деформирования могут служить выражения

$$\Gamma_\sigma = \frac{1}{\tau_\sigma} \frac{1}{1 + \exp\left(-\frac{|\sigma| - \sigma_2}{a_2}\right)}, \quad (10)$$

$$\Gamma_p = \frac{1}{\tau_p} \frac{1}{1 + \exp\left(-\frac{H(|\sigma|, |p|, \delta) - \sigma_1}{a_1}\right)}, \quad (11)$$

$$\Gamma_{\sigma p} = 0, \quad (12)$$

где τ_σ , τ_p — характерные времена релаксации; σ_1 , σ_2 — параметры материала; a_1 , a_2 — нормирующие множители; $|\sigma| = \sqrt{\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma}}$ — интенсивность тензора напряжений; $|p| = \sqrt{\mathbf{p} : \mathbf{p}}$ — интенсивность тензора структурной деформации.

Функция $H(|\sigma|, |p|, \delta)$ характеризует степень отклонения системы от состояния равновесия и может быть определена выражением

$$H(|\sigma|, |p|, \delta) = 2G(\delta[f_1(|p|) + |p|] - |p|), \quad (13)$$

где $\delta = L_n^3 / L_c^3$ — параметр структурного скейлинга, представляющий собой куб отношения характерного размера дефекта L_n и радиуса взаимодействия между дефектами L_c [36]; G — модуль сдвига. Функция $f_1(|p|)$ характеризует степенное упрочнение и определяется, как

$$f_1(|p|) = m|p|^n, \quad (14)$$

где параметры m и n — постоянные материала.

Соотношения (10)–(14) были предложены на основании анализа поведения системы дефектов в случае одночастичного приближения [36] и с учетом

переменной концентрации дефектов [40]. Подстановка (10)–(12) в (8), (9) дает определяющие соотношения для эволюции тензоров пластической и структурной деформаций в виде

$$\dot{\epsilon}^p = \frac{\sigma}{\tau_\sigma \left(1 + \exp\left(-\frac{|\sigma| - \sigma_2}{a_2}\right)\right)}, \quad (15)$$

$$\dot{p} = \frac{1}{\tau_p \left(1 + \exp\left(-\frac{H(|\sigma|, |p|, \delta) - \sigma_1}{a_1}\right)\right)} \left(\sigma - \frac{\partial F}{\partial p}\right). \quad (16)$$

Использование гипотезы соосности тензоров σ и p позволяет записать для термодинамической силы $(\sigma - \partial F/\partial p)$ соотношение

$$\sigma - \frac{\partial F}{\partial p} = \frac{1}{\delta} \left(\frac{1}{2G} \sigma + p\right) - \left(\frac{f_1(|p|)}{|p|} + 1\right) p. \quad (17)$$

3. Модификация определяющих соотношений для описания поведения материалов, слабо чувствительных к изменению скорости деформирования. Соотношение (15) описывает вязкое поведение материалов, характеризующееся чувствительностью к изменению скорости деформирования. Однако металлы при квазистатическом нагружении слабо чувствительны к изменению скорости деформации. Для модификации соотношения (15) воспользуемся подходом, описанным в работе [41].

Предположим, что рассматриваемый процесс неупругого деформирования металлов описывается двумя внутренними переменными — тензором p и скалярным параметром r , отвечающим за изотропное упрочнение. Неравенство Клаузиуса—Дюгема в изотермическом случае принимает вид

$$\sigma : \dot{\epsilon}^p + \left(\sigma - \frac{\partial F}{\partial p}\right) : \dot{p} - \frac{\partial F}{\partial r} \dot{r} \geq 0.$$

Введем следующие обозначения:

$$R \equiv \frac{\partial F}{\partial r}, \quad P \equiv \sigma - \frac{\partial F}{\partial p}.$$

Определим вектор термодинамических сил \vec{X} и потоков \vec{J} :

$$\vec{X} = \{\sigma, P, -R\}, \quad \vec{J} = \{\dot{\epsilon}^p, \dot{p}, \dot{r}\}.$$

Постулируем существование выпуклой функции Ψ от термодинамических сил такой, что вектор термодинамических потоков определяется так:

$$\vec{J} = \dot{\Lambda} \frac{\partial \Psi}{\partial \vec{X}}, \quad (18)$$

где $\dot{\Lambda}$ — неопределенный множитель. Предположение о независимости процессов пластического и структурного деформирования позволяет записать для функции Ψ разложение

$$\Psi = \Psi(\sigma, P, R) = \Psi^{\epsilon^p} + \Psi^p, \quad (19)$$

где функция Ψ^{ϵ^p} определяет процесс пластического деформирования, а функция Ψ^p — процесс эволюции структуры материала.

Подстановка термодинамических сил \vec{X} и потоков \vec{J} , а также соотношения (19) в (18) позволяет получить определяющие соотношения для эволюции параметра изотропного упрочнения, а также пластической и структурной деформации в виде

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\Lambda}^{\epsilon^p} \frac{\partial \Psi^{\epsilon^p}}{\partial \sigma}, \quad (20)$$

$$\dot{r} = -\dot{\Lambda}^{\epsilon^p} \frac{\partial \Psi^{\epsilon^p}}{\partial R}, \quad (21)$$

$$\dot{p} = \dot{\Lambda}^p \frac{\partial \Psi^p}{\partial P}. \quad (22)$$

Соотношения (20)–(22) характеризуют тот факт, что величины $\dot{\epsilon}^p$, \dot{r} , \dot{p} определяются внешней нормалью к поверхности $\Psi = 0$, т.е. ассоциированным законом пластического течения.

Для модификации соотношения (15) построим аппроксимацию поверхности текучести Ψ^{ϵ^p} аналогично ассоциативной теории пластического течения [41] в виде выражения

$$\Psi^{\epsilon^p} = \frac{2a_2 b e^{-0.5x} \sqrt{e^y + e^x \ln(e^{0.5x} + \sqrt{e^y + e^x})}}{\sqrt{1 + e^{y-x}}} + R - 2\sqrt{\frac{b}{c}} a_2 \ln(1 + \sqrt{1 + e^y}),$$

где $x = |\sigma|/a_2$, $y = \sigma_2/a_2$, а b , c — параметры материала.

Параметр $\dot{\Lambda}^{\epsilon^p}$ определим из условия согласования, выражаемого соотношением

$$\dot{\Psi}^{\epsilon^p} = \frac{\partial \Psi^{\epsilon^p}}{\partial \sigma} : \dot{\sigma} + \frac{\partial \Psi^{\epsilon^p}}{\partial R} \dot{R} = 0.$$

Подстановка параметра $\dot{\Lambda}^{\epsilon^p}$ в соотношения (20) и (21) позволяет получить окончательный вид для определения $\dot{\epsilon}^p$ и \dot{r} :

$$\dot{\epsilon}^p = \frac{\sigma : \dot{\sigma}}{\tau_\sigma \left(1 + \exp\left(-\frac{|\sigma| - \sigma_2}{a_2}\right)\right)} \frac{\sigma}{|\sigma|} \frac{1}{2G},$$

$$\dot{r} = -\frac{\sigma : \dot{\sigma}}{\sqrt{c\tau_\sigma} \left(1 + \exp\left(-\frac{|\sigma| - \sigma_2}{a_2}\right)\right)^{1/2}} \frac{1}{|\sigma|} \frac{1}{2G},$$

где $\tau_\sigma = c/b$.

Для определения параметра $\dot{\Lambda}^p$ воспользуемся подходом к построению определяющих соотношений для материалов с механическим поведением, зависящим от скорости деформирования, описанным в работе [41]. В этом случае $\dot{\Lambda}^p$ определяется соотношением

$$\dot{\Lambda}^p = \left\langle \frac{\Psi^p}{k} \right\rangle^v,$$

где $\Psi^p = |P|$ — часть функции Ψ , связанная с изменением структуры материала. Соотношение (22) позволяет получить уравнение для определения эволюции структурного параметра:

$$\dot{\mathbf{p}} = \left\langle \frac{\Psi^p}{k} \right\rangle^v \frac{\partial \Psi^p}{\partial \mathbf{P}}. \quad (23)$$

Для получения эволюционного уравнения (16) представим v и k в виде следующих выражений:

$$v = 1, \quad k(|\sigma|, |p|, \delta) = \tau_p \left[1 + \exp\left(-\frac{H(|\sigma|, |p|, \delta) - \sigma_1}{a_1}\right) \right].$$

Подстановка выражений для определения v , $k(|\sigma|, |p|, \delta)$, $\partial \Psi^p / \partial \mathbf{P}$ и Ψ^p в (23) позволяет получить уравнение для $\dot{\mathbf{p}}$, аналогичное уравнению (16):

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{1}{\tau_p \left(1 + \exp\left(-\frac{H(|\sigma|, |p|, \delta) - \sigma_1}{a_1}\right) \right)} \left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}} \right).$$

Вклад в свободную энергию параметра r по сравнению со вкладом структурного параметра \mathbf{p} будем считать малым и в дальнейшем будем им пренебрегать.

Таким образом, использование подхода, описанного в работе [41], позволило нам переписать соотношение для определения эволюции пластической деформации, не изменяя вида уравнения для определения эволюции структурной составляющей.

4. Описание баланса энергии при неупругом деформировании металлов. Уравнение баланса энергии с учетом соотношений (2), (3) и (5), (6) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{q} + r' + \dot{Q}^e + \dot{Q}^p &= c\dot{T}, \\ c &= -T \frac{\partial^2 F}{\partial T^2}, \quad \dot{Q}^e = -T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial T} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e, \\ \dot{Q}^p &= \boldsymbol{\sigma} : (\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p + \dot{\mathbf{p}}) - \frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}} : \dot{\mathbf{p}} = \dot{W}^p - \dot{E}^s. \end{aligned}$$

Здесь r' — мощность источников тепла, c — удельная теплоемкость, \dot{Q}^e — мощность источников тепла, связанная с термоупругим эффектом, \dot{Q}^p — мощность неупругого вклада в генерацию тепла. Первое слагаемое в выражении для определения \dot{Q}^p представляет собой скорость работы неупругой деформации \dot{W}^p , второе слагаемое — скорость накопления энергии \dot{E}^s . Расчет величины накопленной энергии позволяет сформулировать критерий разрушения материала, заключающийся в достижении величины накопленной энергии некоторого критического значения. Данный критерий будет использован в дальнейшем для моделирования разрушения материала.

5. Моделирование распространения трещины при циклическом кручении цилиндрических образцов и опоры подшипника. Рассмотрим циклическое кручение трех сплошных цилиндрических образцов в режиме ультрамалоцикловой усталости, соответствующей 20 циклам нагружения, с коэффициентом асимметрии цикла $R = F_{\min}/F_{\max} = 0$ и $F_{\max} = 80$ кН. Постановка задачи аналогична постановке, приведенной в [42]. В начальный момент времени каждый из моделируемых образцов содержит поверхностную трещину длиной 10 мм и глубиной 7 мм, ориентированную к оси цилиндра под разными углами: 15° , 45° , 75° (рис. 1). В качестве граничных условий при решении этой задачи было использовано жесткое закрепление левого конца цилиндра и задание крутящего момента на правом конце, как показано на рис. 1.

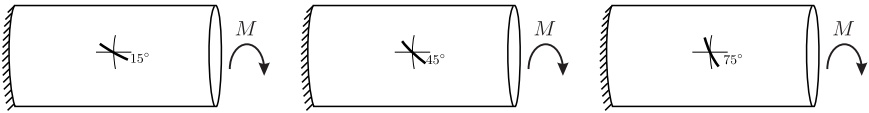


Рис. 1. Схема приложения граничных условий и расположение трещины в начальный момент времени [Figure 1. Boundary conditions and initial crack orientation]

Предполагается, что полная скорость деформации представима в виде суммы упругой, пластической и структурной составляющих, т.е. удовлетворяет соотношению (3). Тензор напряжений связан с тензором деформации законом Гука в скоростной форме

$$\dot{\sigma}_0 = K \dot{\epsilon}_0^e, \quad (24)$$

$$\dot{\sigma}_d = 2G \dot{\epsilon}_d^e, \quad (25)$$

где

$$\sigma_0 = \frac{1}{3} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{E}, \quad \sigma_d = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \boldsymbol{\sigma}, \quad \epsilon_0^e = \frac{1}{3} \boldsymbol{\epsilon}^e : \mathbf{E}, \quad \epsilon_d^e = \boldsymbol{\epsilon}^e - \frac{1}{3} \boldsymbol{\epsilon}^e : \mathbf{E},$$

\mathbf{E} — единичный тензор, K — модуль всестороннего сжатия, G — модуль сдвига. Для определения скорости пластических и структурных деформаций воспользуемся соотношениями (15) и (16). Тензор полных деформаций подчиняется геометрическому соотношению

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^\top). \quad (26)$$

Система уравнений (13)–(17), (24)–(26) дополняется уравнением равновесия

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0.$$

При расчете были использованы следующие значения материальных постоянных, соответствующих стали 08X18H10 (AISI 304 steel): $\tau_\sigma = 0.027$, $\tau_p = 3$, $\delta = 1$, $\sigma_1 = 29 \cdot 10^7$, $a_1 = 10^6$, $a_2 = 4 \cdot 10^7$, $\sigma_2 = 56 \cdot 10^7$, $m = 10$, $n = 1$. Идентификация этих параметров осуществлялась с помощью эксперимента по одноосному квазистатическому растяжению плоского образца. Более подробное описание этой процедуры можно найти в работе [43].

Начальные условия для рассматриваемой задачи имеют следующий вид:

$$\epsilon^e_0|_{t=0} = 0, \quad \epsilon^e_d|_{t=0} = 0, \quad \epsilon^p|_{t=0} = 0, \quad \mathbf{p}|_{t=0} = 0.$$

Граничные условия для рассматриваемой задачи могут быть представлены в виде

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}|_{\Gamma_F} = \mathbf{F}, \quad \mathbf{u}|_{\Gamma_U} = 0,$$

где \mathbf{n} — вектор внешней нормали к поверхности, \mathbf{u} — вектор перемещений, \mathbf{F} — вектор поверхностных сил, Γ_F — правая граница цилиндра, Γ_U — левая граница цилиндра. В рамках данной работы предполагается, что распространение трещины происходит при достижении ею в некотором объеме материала V^* критического значения:

$$E^S = E_c^S. \quad (27)$$

Здесь E_c^S — критическое значение накопленной энергии. Согласно оценке, проведенной в работе [30], для стали 08X18H10 $V^* \approx 2$ Дж/м³. Для связи этого объема с объемом конечного элемента V^{el} воспользуемся соотношением

$$V^* = kV^{el}.$$

Для рассматриваемой задачи $k = 4 \cdot 10^{-4}$. Как было отмечено выше, величина E_c^S коррелирует с величиной энтальпии материала при температуре плавления H . Для стали 08X18H10 $H \approx 5 \cdot 10^9$ Дж/м³. Тогда критерий разрушения для рассматриваемой задачи может быть выражен так:

$$E_c^S = kH.$$

Подстановка величин k и H позволяет получить критическое значение накопленной энергии, примерно равное $2 \cdot 10^6$ Дж/м³.

Численное моделирование проводилось в конечно-элементном пакете *SiMulia Abaqus* с использованием академической лицензии. Для реализации определяющих соотношений в конечно-элементном пакете была использована функция *UMAT*. Для реализации критерия разрушения (27) была использована функция *UDMGINI*. Для определения нормали к плоскости разрушения вычислялись главные значения и направления тензора плотности дефектов \mathbf{p} . Компоненты нормали совпадали с главным направлением максимального главного значения \mathbf{p} . Для моделирования зарождения и распространения трещины применялся расширенный метод конечных элементов, основная идея которого заключается в использовании дополнительных функций, в качестве которых выступают разрывные функции, описывающие скачок вектора перемещений через берега трещины, и асимптотические функции, характеризующие перемещения в вершине трещины.

Результаты расчета пути распространения трещины и распределение напряжений по Мизесу в образце на основе предложенного критерия представлены на рис. 2 и 3.

Как можно заметить, трещина, расположенная в начальный момент времени под углом 45°, остается в той же плоскости при распространении, в то

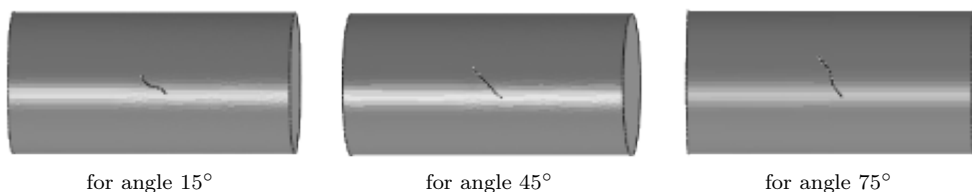


Рис. 2. Путь распространения трещины [Figure 2. Crack path in a shaft]

время как трещины, расположенные под углами 15° и 75° , поворачиваются. Эти результаты согласуются с данными, представленными в работе [44].

В качестве второго примера применения разработанной модели и критерия разрушения рассмотрим моделирование зарождения трещины в реальной конструкции, геометрия которой изображена на рис. 4. Деталь нагружалась статически одновременным действием крутящего момента и внутреннего давления. Для четырех отверстий, предназначенных для фиксации опоры, были использованы кинематические граничные условия жесткого закрепления, соответствующие нулевым перемещениям. На рис. 4, *b* представлена конечно-элементная модель рассматриваемой конструкции. При расчете использовались призматические конечные элементы.

На рис. 5 показаны результаты распределения накопленной энергии при разрушении опоры. Эти результаты указывают на то, что наиболее слабым местом конструкции при таких условиях нагружения является соединение ее корпуса с цилиндрической частью. В этом месте опоры происходит зарождение и развитие трещины.

Заключение. Данная работа посвящена применению критерия разрушения, основанного на величине накопленной энергии, для моделирования разрушения стали 08X18H10. Преимуществом критериев разрушения, основанных на энергетических принципах, является то, что они не требуют детального знания структуры и процессов, протекающих в деформируемом материале. Анализ литературы, посвященной исследованию термодинамики неупругого деформирования металлов, показывает, что наиболее универсальным и адекватным критерием разрушения является критерий достижения накопленной энергией в некотором объеме материала критического значения.

Для описания деформационного поведения материала используется оригинальная модель, основанная на статистико-термодинамическом описании среды с дефектами. Эволюция ансамблей дефектов описывается с помощью переменной, совпадающей по смыслу с деформацией, вызванной зарождением и ростом дефектов. Введение такого параметра позволяет использовать его в качестве независимой переменной в термодинамическом потенциале системы и рассчитывать величину накопленной энергии. В работе рассмотрен вывод определяющих соотношений для пластической деформации и деформации, обусловленной дефектами, с помощью методов неравновесной термодинамики и теории пластического течения. Показано, что теория пластического течения позволяет обобщить определяющее уравнение для описания поведения материалов, слабо зависящих от скорости деформации.

Кроме расчета напряженно-деформированного состояния, предложенная модель позволяет определять величину накопленной энергии. Применение

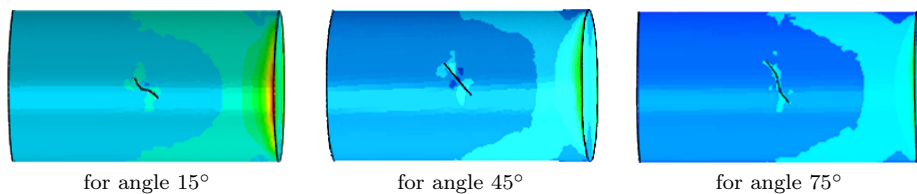


Рис. 3. Распределение напряжений по Мизесу в образце с трещиной (онлайн в цвете)
[Figure 3. Von Mises stress distribution (color online)]

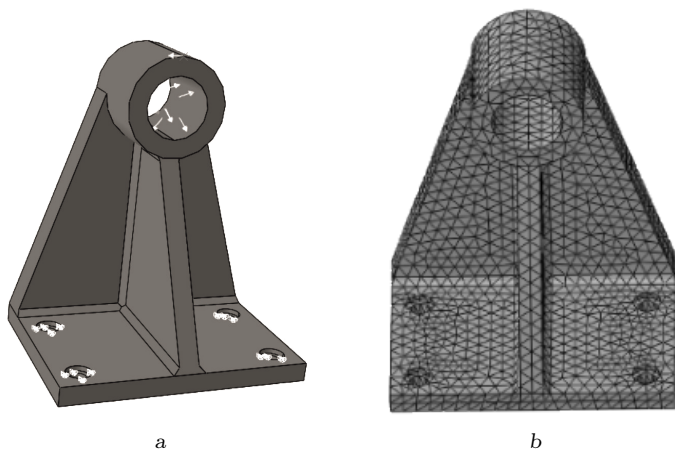


Рис. 4. Граничные условия (a), используемые при моделировании, и конечно-элементная модель опоры подшипника (b) [Figure 4. Boundary conditions (a) and finite-element model of the bearing bracket (b)]

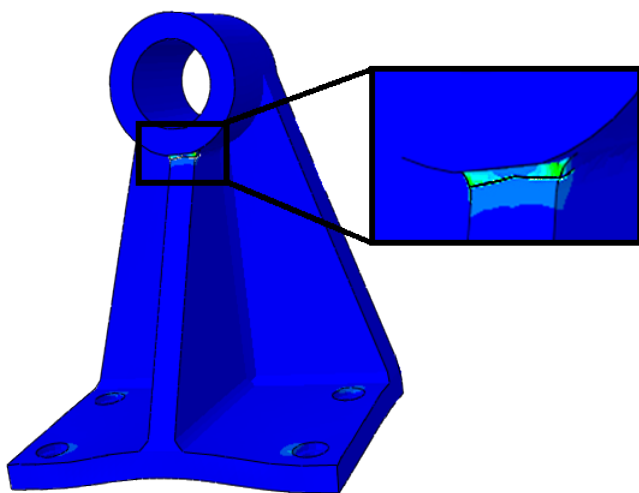


Рис. 5. Распределение накопленной энергии в опоре подшипника (онлайн в цвете)
[Figure 5. Stored energy distribution (color online)]

этого подхода для моделирования процессов разрушения проиллюстрировано на примерах зарождения и распространения трещины при сложном нагружении. Полученные соотношения могут быть применены для определения наиболее опасных мест при эксплуатации конструкций в реальных условиях.

Декларация о финансовых и других взаимоотношениях. Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 16-31-00156-мол_а и № 16-51-48003-ИНД_оми). Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами. Авторы не получали гонорар за статью.

ORCID

Анастасия Андреевна Костина: <http://orcid.org/0000-0002-5721-3301>

Олег Анатольевич Плехов: <http://orcid.org/0000-0002-0378-8249>

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Работнов Ю. Н. О механизме длительного разрушения / *Вопросы прочности материалов и конструкций*. М.: АН СССР, 1957. С. 5–7.
2. Качанов Л. М. О времени разрушения в условиях ползучести // *Изв. АН СССР. ОTH*, 1958. № 8. С. 26–31.
3. Lemaitre J., Desmorat R. *Engineering Damage Mechanics: Ductile, Creep, Fatigue and Brittle Failures*. Berlin: Springer, 2005. xxiii+380 pp. doi: [10.1007/b138882](https://doi.org/10.1007/b138882).
4. Piechnik S., Pachla H. Law of continuous damage parameter for non-ageing materials // *Engng. Fract. Mech.*, 1979. vol. 12, no. 2. pp. 199–209. doi: [10.1016/0013-7944\(79\)90113-9](https://doi.org/10.1016/0013-7944(79)90113-9).
5. Rousselier G. Finite deformation constitutive relations including ductile damage / *Proc. of the IUTAM Symposium on Three-Dimensional Constitutive Relations and Ductile Fracture*. Douran, France, 1981. pp. 331–355.
6. Rousselier G., Devaux J. C., Mottet G. Experimental validation of constitutive relations including ductile fracture damage / *Fracture 84*. vol. 2 (New Delhi, India, 4–10 December 1984), Proc. of the 6th International Conference on Fracture (ICF6). New Delhi, 1984. pp. 1205–1213. doi: [10.1016/b978-1-4832-8440-8.50105-8](https://doi.org/10.1016/b978-1-4832-8440-8.50105-8).
7. Tang C. Y., Sheng W., Peng L. H., Lee T. C. Characterization of isotropic damage using double scalar variables // *Int. J. Dam. Mech.*, 2002. vol. 11, no. 1. pp. 3–25. doi: [10.1106/105678902023194](https://doi.org/10.1106/105678902023194).
8. Вакуленко А. А., Качанов Л. М. Континуальная модель среды с трещинами // *Изв. АН СССР. МТТ*, 1971. № 4. С. 159–166.
9. Радаев Ю. Н. Тензорные меры поврежденности и гармонический анализ тонкой структуры поврежденности // *Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер.*, 1998. № 2(8). С. 79–105.
10. Lubarda V. A., Krajcinovic D. Damage tensors and the crack density distribution // *Int. J. Solids. Struct.*, 1993. vol. 30, no. 20. pp. 2859–2877. doi: [10.1016/0020-7683\(93\)90158-4](https://doi.org/10.1016/0020-7683(93)90158-4).
11. Chaboche J.-L. Development of continuum damage mechanics for elastic solids sustaining anisotropic and unilateral damage // *Int. J. Dam. Mech.*, 1993. vol. 2, no. 4. pp. 311–329. doi: [10.1177/105678959300200401](https://doi.org/10.1177/105678959300200401).
12. Murakami S. Notion of continuum damage mechanics and its application to anisotropic creep damage theory // *J. Eng. Mater. Technol.*, 1983. no. 2. pp. 99–105. doi: [10.1115/1.3225633](https://doi.org/10.1115/1.3225633).
13. Степанова Л. В., Игонин С. А. Описание рассеянного разрушения: параметр поврежденности Ю. Н. Работнова: историческая справка, фундаментальные результаты и современное состояние // *Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер.*, 2014. № 3(114). С. 97–114.
14. Новожилов В. В. К основам теории равновесных трещин в упругих телах // *ПММ*, 1969. № 5. С. 797–812.

15. Романов А. Н. Энергетический критерий разрушения при малоцикловом нагружении // *Проблемы прочности*, 1974. № 1. С. 3–10.
16. Соснин О. В. Энергетический вариант теории ползучести и длительной прочности // *Проблемы прочности*, 1973. № 5. С. 45–49.
17. Никитенко А. Ф. Кинетическая теория ползучести и расчет элементов конструкций на длительную прочность. Сообщение 2. Предельное состояние неравномерно нагретых элементов конструкций // *Проблемы прочности*, 2005. № 6. С. 5–14.
18. Farren W. S., Taylor G. I. The heat developed during plastic extension of metals // *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1925. vol. 107, no. 743. pp. 422–451. doi: [10.1098/rspa.1925.0034](https://doi.org/10.1098/rspa.1925.0034).
19. Taylor G. I., Quinney H. The latent energy remaining in a metal after cold working // *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1934. vol. 143, no. 849. pp. 307–326. doi: [10.1098/rspa.1934.0004](https://doi.org/10.1098/rspa.1934.0004).
20. Oliferuk W., Korbel A., Bochniak W. Estimation of energy storage rate during macroscopic non-homogeneous deformation of polycrystalline materials // *Journal of Theoretical and Applied Mechanics (Warsaw)*, 2004. vol. 42, no. 4. pp. 817–826.
21. Chrysochoos A., Wattrisse B., Muracciole J.-M., El Kaïm Y. Fields of stored energy associated with localized necking of steel // *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 2009. vol. 4, no. 2. pp. 245–262. doi: [10.2140/jomms.2009.4.245](https://doi.org/10.2140/jomms.2009.4.245).
22. Hodowany J., Ravichandran G., Rosakis A. J., Rosakis P. Partition of plastic work into heat and stored energy in metals // *Experimental Mechanics*, 2000. vol. 40, no. 2. pp. 113–123. doi: [10.1007/bf02325036](https://doi.org/10.1007/bf02325036).
23. Aravas N., Kim K.-S., Leckie F. A. On the calculation of the stored energy of cold work // *J. Eng. Mater. Technol.*, 1990. vol. 112, no. 4. pp. 465–470.
24. Oliferuk W., Maj M. Stress-strain curve and stored energy during uniaxial deformation of polycrystals // *European Journal of Mechanics – A/Solids*, 2009. vol. 28, no. 2. pp. 266–272. doi: [10.1016/j.euromechsol.2008.06.003](https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2008.06.003).
25. Benzerga A. A., Bréchet Y., Needleman A., Van der Giessen E. The stored energy of cold work: Predictions from discrete dislocation plasticity // *Acta Materialia*, 2005. vol. 53, no. 18. pp. 4765–4779. doi: [10.1016/j.actamat.2005.07.011](https://doi.org/10.1016/j.actamat.2005.07.011).
26. Stainier L., Ortiz M. Study and validation of a variational theory of thermo-mechanical coupling in finite visco-plasticity // *Int. J. Solids Structures*, 2010. vol. 47, no. 5. pp. 705–715. doi: [10.1016/j.ijsolstr.2009.11.012](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2009.11.012).
27. Rosakis P., Rosakis A. J., Ravichandran G., Hodowany J. A thermodynamic internal variable model for the partition of plastic work into heat and stored energy in metals // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2000. vol. 48, no. 3. pp. 581–607. doi: [10.1016/s0022-5096\(99\)00048-4](https://doi.org/10.1016/s0022-5096(99)00048-4).
28. Xiao Y., Chen J., Cao J. A generalized thermodynamic approach for modeling nonlinear hardening behaviors // *International Journal of Plasticity*, 2012. vol. 38. pp. 102–122. doi: [10.1016/j.ijplas.2012.05.004](https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2012.05.004).
29. Dumoulin S., Louche H., Hopperstad O. S., Børvik T. Heat sources, energy storage and dissipation in high-strength steels: Experiments and modelling // *European Journal of Mechanics – A/Solids*, 2010. vol. 29, no. 3. pp. 461–474. doi: [10.1016/j.euromechsol.2009.11.005](https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2009.11.005).
30. Федоров В. В. *Термодинамические аспекты прочности и разрушения твердых тел*. Ташкент: ФАН, 1979. 168 с.
31. Иванова В. С., Терентьев В. Ф. *Природа усталости металлов*. М.: Металлургия, 1975. 456 с.
32. Арутюнян А. Р., Арутюнян Р. А. Критерий усталости, основанный на результатах исследований по скрытой энергии деформации // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия*, 2010. № 3. С. 80–88.
33. Arutyunyan A., Arutyunyan R. The Fatigue Fracture Criterion Based on the Latent Energy Approach // *Engineering*, 2010. vol. 2, no. 5. pp. 318–321. doi: [10.4236/eng.2010.25041](https://doi.org/10.4236/eng.2010.25041).

34. Wan V. V., MacLachlan D. W., Dunne F. P. A stored energy criterion for fatigue crack nucleation in polycrystals // *Int. J. Fatigue*, 2014. vol. 68. pp. 90–102. doi: [10.1016/j.ijfatigue.2014.06.001](https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2014.06.001).
35. Crété J. P., Longère P., Cadou J. M. Numerical modelling of crack propagation in ductile materials combining the GTN model and X-FEM // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2014. vol. 275. pp. 204–233. doi: [10.1016/j.cma.2014.03.007](https://doi.org/10.1016/j.cma.2014.03.007).
36. Наймарк О. Б. Коллективные свойства ансамблей дефектов и некоторые нелинейные проблемы пластичности и разрушения // *Физическая мезомеханика*, 2003. Т. 6, № 4. С. 45–72.
37. Плехов О. А., Наймарк О. Б. Теоретическое и экспериментальное исследование диссипации энергии в процессе локализации деформации в железе // *ПМТФ*, 2009. Т. 50, № 1. С. 153–164.
38. Бетехтин В. И., Наймарк О. Б., Кадомцев А. Г., Гришаев С. Н. *Экспериментальное и теоретическое исследование эволюции дефектной структуры, пластической деформации и разрушения*. Пепринт ИМСС УрО РАН. Пермь, 1997. 56 с.
39. Glansdorff P., Prigogine I. *Thermodynamic Theory of Structure, Stability and Fluctuations*. New York: Wiley-Interscience, 1971. xxvi+305 pp.
40. Plekhov O. A., Naimark O. B. Statistical model of submicrocrack evolution under cyclic loading / *Proc. of the 13th International Conference on Fracture 2013 (ICF 2013)* (June 16–21, 2013, Beijing, China), 2013. pp. 1890–1899, Retrieved <http://www.gruppofrattura.it/ocs/index.php/ICF/icf13/paper/viewFile/11232/10611> (November 10, 2016).
41. Murakam S. *Continuum Damage Mechanics. A Continuum Mechanics Approach to the Analysis of Damage and Fracture*. Dordrecht: Springer, 2012.. xxx+402 pp pp.. doi: [10.1007/978-94-007-2666-6](https://doi.org/10.1007/978-94-007-2666-6).
42. Костина А. А., Плехов О. А. Математическое моделирование разрушения металлов с использованием критерия, основанного на величине накопленной энергии / *XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник докладов* (Казань, 20–24 августа 2015 г.). Казань, 2015. С. 2017–2019.
43. Костина А. А., Плехов О. А. Моделирование баланса энергии в процессе деформирования и разрушения стали 8X18H10 при квазистатическом растяжении // *Матем. моделирование*, 2015. Т. 27, № 8. С. 85–95.
44. Rabold F., Kuna M. Automated finite element simulation of fatigue crack growth in three-dimensional structures with the software system ProCrack // *Procedia Materials Science*, 2014. vol. 3. pp. 1099–1104. doi: [10.1016/j.mspro.2014.06.179](https://doi.org/10.1016/j.mspro.2014.06.179).

Поступила в редакцию 25/X/2016;
в окончательном варианте — 10/XI/2016;
принята в печать — 09/XII/2016.

MSC: 74A45, 74B05, 74R20

APPLICATION OF THE ENERGY-BASED CRITERION
TO THE SIMULATION OF THE FRACTURE
OF THE STEEL STRUCTURES

A. A. Kostina, O. A. Plekhov, B. Venkatraman

¹ Institute of Continuous Media Mechanics, Ural Branch of RAS,
1, Akad. Korolyova st., Perm, 614013, Russian Federation.² Indira Gandhi Centre for Atomic Research,
Kalpakkam, Tamil Nadu, 603102, India.

Abstract

In this work we have developed energy balance model for inelastic deformation process of metals. Changes in the material structure are taking into account with the help of tensorial variable having the physical meaning of additional strain induced by initiation of defects. Introduction of such a parameter allows one to calculate the stored energy value and develop an energy-based fracture criterion. There were considered two ways of derivation of constitutive equations for plastic and structural strain. The first method was based on the principles of linear nonequilibrium thermodynamics, the second one is the analogue of the flow plasticity theory. Developed thermomechanical model includes equilibrium equation, geometric relation for strain tensor, Hooke's law, constitutive equations for structural and plastic strain and energy balance equation. It is assumed that fracture in the material takes place when stored energy reaches critical value in some volume of the material. The application of such an approach to fracture problems of the metals is illustrated by two numerical examples. The first example is crack path simulation in the steel shaft with initial crack oriented at the certain angle to the shaft axis. The second example is simulation of the crack initiation and propagation in the steel bearing bracket. The obtained results are in agreement with the previously published results and could be used for simulation of fracture of real structures.

Keywords: stored energy, numerical simulation, fracture of solids, thermodynamics of inelastic deformation, AISI 304 steel.

© 2016 Samara State Technical University.

Please cite this article in press as:

Kostina A. A., Plekhov O. A., Venkatraman B. Application of the energy-based criterion to the simulation of the fracture of the steel structures, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2016, vol. 20, no. 4, pp. 656–674. doi: [10.14498/vsgtu1518](http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1518). (In Russian)

Authors Details:

Anastasiya A. Kostina (kostina@icmm.ru; Corresponding Author), Junior Research Scientist.

Oleg A. Plekhov (Dr. Phys. & Math. Sci.; poa@icmm.ru), Deputy Director.

Balasubramaniam Venkatraman (M.Sci. (Phy) PGDCA, Ph.D.; bvenkat@igcar.gov.in), Condensed Matter Physics Division.

Declaration of Financial and Other Relationships. This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects nos. 16–31–00156–mol_a, 16–51–48003–IND_omi). Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript. The authors have not received any fee for the article.

ORCID

Anastasiya A. Kostina: <http://orcid.org/0000-0002-5721-3301>

Oleg A. Plekhov: <http://orcid.org/0000-0002-0378-8249>

REFERENCES

1. Rabotnov Yu. N. On the mechanism of long-term fracture, In: *Voprosy prochnosti materialov i konstruksii*. Moscow, USSR Academy of Sciences, 1957, pp. 5–7 (In Russian).
2. Kachanov L. M. On time of destruction under creep conditions, *Izv. AN SSSR. Otd. tekhn. nauk*, 1958, no. 8, pp. 26–31 (In Russian).
3. Lemaitre J., Desmorat R. *Engineering Damage Mechanics: Ductile, Creep, Fatigue and Brittle Failures*. Berlin, Springer, 2005, xxiii+380 pp. doi: [10.1007/b138882](https://doi.org/10.1007/b138882).
4. Piechnik S., Pachla H. Law of continuous damage parameter for non-ageing materials, *Engng. Fract. Mech.*, 1979, vol. 12, no. 2, pp. 199–209. doi: [10.1016/0013-7944\(79\)90113-9](https://doi.org/10.1016/0013-7944(79)90113-9).
5. Rousselier G. Finite deformation constitutive relations including ductile damage, In: *Proc. of the IUTAM Symposium on Three-Dimensional Constitutive Relations and Ductile Fracture*. Douran, France, 1981, pp. 331–355.
6. Rousselier G., Devaux J. C., Mottet G. Experimental validation of constitutive relations including ductile fracture damage, In: *Fracture 84*, vol. 2 (New Delhi, India, 4–10 December 1984), Proc. of the 6th International Conference on Fracture (ICF6). New Delhi, 1984, pp. 1205–1213. doi: [10.1016/b978-1-4832-8440-8.50105-8](https://doi.org/10.1016/b978-1-4832-8440-8.50105-8).
7. Tang C. Y., Sheng W., Peng L. H., Lee T. C. Characterization of isotropic damage using double scalar variables, *Int. J. Dam. Mech.*, 2002, vol. 11, no. 1, pp. 3–25. doi: [10.1106/105678902023194](https://doi.org/10.1106/105678902023194).
8. Vakulenko A. A., Kachanov L. M. Continuum model of medium with cracks, *Izv. AN SSSR. Mekh. Tverd. Tela*, 1971, no. 4, pp. 159–166 (In Russian).
9. Radaev Yu. N. Tensor measures and harmonic analysis of three-dimensional damage state, *Vestnik SamGU. Estestvenno-Nauchnaya Ser.*, 1998, no. 2(8), pp. 79–105 (In Russian).
10. Lubarda V. A., Krajcinovic D. Damage tensors and the crack density distribution, *Int. J. Solids. Struct.*, 1993, vol. 30, no. 20, pp. 2859–2877. doi: [10.1016/0020-7683\(93\)90158-4](https://doi.org/10.1016/0020-7683(93)90158-4).
11. Chaboche J.-L. Development of continuum damage mechanics for elastic solids sustaining anisotropic and unilateral damage, *Int. J. Dam. Mech.*, 1993, vol. 2, no. 4, pp. 311–329. doi: [10.1177/105678959300200401](https://doi.org/10.1177/105678959300200401).
12. Murakami S. Notion of continuum damage mechanics and its application to anisotropic creep damage theory, *J. Eng. Mater. Technol.*, 1983, no. 2, pp. 99–105. doi: [10.1115/1.3225633](https://doi.org/10.1115/1.3225633).
13. Stepanova L. V., Igonin S. A. Description of deterioration processes: damage parameter of Y. N. Rabotnov: historical remarks, fundamental results and contemporary state, *Vestnik SamGU. Estestvenno-Nauchnaya Ser.*, 2014, no. 3(114), pp. 97–114 (In Russian).
14. Novozhilov V. V. On fundamentals of equilibrium cracks theory in elastic bodies, *PMM*, 1969, no. 5, pp. 797–812 (In Russian).
15. Romanov A. N. Energy criteria of failure under low-cycle loading. Report 1. Failure energy in the case of a small number of loading cycles, *Strength Mater.*, 1974, vol. 6, no. 1, pp. 1–8. doi: [10.1007/BF01528152](https://doi.org/10.1007/BF01528152).
16. Sosnin O. V. Energy version of the theory of creep and long-term (creep) strength. Creep and rupture of nonstrengthening materials. I, *Strength Mater.*, 1973, vol. 5, no. 5, pp. 564–568. doi: [10.1007/BF00762312](https://doi.org/10.1007/BF00762312).
17. Nikitenko A. F. Kinetic Theory of Creep and Creep-Rupture Strength Analysis of Structural Components. Part 2. Limiting State of Non-Uniformly Heated Structural Components, *Strength Mater.*, 2005, vol. 37, no. 6, pp. 551–557. doi: [10.1007/s11223-006-0001-1](https://doi.org/10.1007/s11223-006-0001-1).

18. Farren W. S., Taylor G. I. The heat developed during plastic extension of metals, *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1925, vol. 107, no. 743, pp. 422–451. doi: [10.1098/rspa.1925.0034](https://doi.org/10.1098/rspa.1925.0034).
19. Taylor G. I., Quinney H. The latent energy remaining in a metal after cold working, *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1934, vol. 143, no. 849, pp. 307–326. doi: [10.1098/rspa.1934.0004](https://doi.org/10.1098/rspa.1934.0004).
20. Oliferuk W., Korbel A., Bochniak W. Estimation of energy storage rate during macroscopic non-homogeneous deformation of polycrystalline materials, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics (Warsaw)*, 2004, vol. 42, no. 4, pp. 817–826.
21. Chrysochoos A., Wattrisse B., Muracciole J.-M., El Kaïm Y. Fields of stored energy associated with localized necking of steel, *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 2009, vol. 4, no. 2, pp. 245–262. doi: [10.2140/jomms.2009.4.245](https://doi.org/10.2140/jomms.2009.4.245).
22. Hodowany J., Ravichandran G., Rosakis A. J., Rosakis P. Partition of plastic work into heat and stored energy in metals, *Experimental Mechanics*, 2000, vol. 40, no. 2, pp. 113–123. doi: [10.1007/bf02325036](https://doi.org/10.1007/bf02325036).
23. Aravas N., Kim K.-S., Leckie F. A. On the calculation of the stored energy of cold work, *J. Eng. Mater. Technol.*, 1990, vol. 112, no. 4, pp. 465–470.
24. Oliferuk W., Maj M. Stress-strain curve and stored energy during uniaxial deformation of polycrystals, *European Journal of Mechanics – A/Solids*, 2009, vol. 28, no. 2, pp. 266–272. doi: [10.1016/j.euromechsol.2008.06.003](https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2008.06.003).
25. Benzerga A. A., Bréchet Y., Needleman A., Van der Giessen E. The stored energy of cold work: Predictions from discrete dislocation plasticity, *Acta Materialia*, 2005, vol. 53, no. 18, pp. 4765–4779. doi: [10.1016/j.actamat.2005.07.011](https://doi.org/10.1016/j.actamat.2005.07.011).
26. Stainier L., Ortiz M. Study and validation of a variational theory of thermo-mechanical coupling in finite visco-plasticity, *Int. J. Solids Structures*, 2010, vol. 47, no. 5, pp. 705–715. doi: [10.1016/j.ijsolstr.2009.11.012](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2009.11.012).
27. Rosakis P., Rosakis A. J., Ravichandran G., Hodowany J. A thermodynamic internal variable model for the partition of plastic work into heat and stored energy in metals, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2000, vol. 48, no. 3, pp. 581–607. doi: [10.1016/s0022-5096\(99\)00048-4](https://doi.org/10.1016/s0022-5096(99)00048-4).
28. Xiao Y., Chen J., Cao J. A generalized thermodynamic approach for modeling nonlinear hardening behaviors, *International Journal of Plasticity*, 2012, vol. 38, pp. 102–122. doi: [10.1016/j.ijplas.2012.05.004](https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2012.05.004).
29. Dumoulin S., Louche H., Hopperstad O. S., Børvik T. Heat sources, energy storage and dissipation in high-strength steels: Experiments and modelling, *European Journal of Mechanics – A/Solids*, 2010, vol. 29, no. 3, pp. 461–474. doi: [10.1016/j.euromechsol.2009.11.005](https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2009.11.005).
30. Fedorov V. V. *Termodinamicheskie aspekty prochnosti i razrusheniia tverdykh tel* [Thermodynamic aspects of strength and fracture of solids]. Tashkent, FAN, 1979, 168 pp. (In Russian)
31. Ivanova V. S., Terent'ev V. F. *Priroda ustalosti metallov* [Nature of metal fatigue]. Moscow, Metallurgiya, 1975, 456 pp. (In Russian)
32. Arutiunian A. R., Arutiunian R. A. Fatigue fracture criterion based on the latent energy investigations, *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika. Astronomiia*, 2010, no. 3, pp. 80–88 (In Russian).
33. Arutyunyan A., Arutyunyan R. The Fatigue Fracture Criterion Based on the Latent Energy Approach, *Engineering*, 2010, vol. 2, no. 5, pp. 318–321. doi: [10.4236/eng.2010.25041](https://doi.org/10.4236/eng.2010.25041).
34. Wan V. V., MacLachlan D. W., Dunne F. P. A stored energy criterion for fatigue crack nucleation in polycrystals, *Int. J. Fatigue*, 2014, vol. 68, pp. 90–102. doi: [10.1016/j.ijfatigue.2014.06.001](https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2014.06.001).
35. Crété J. P., Longère P., Cadou J. M. Numerical modelling of crack propagation in ductile materials combining the GTN model and X-FEM, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2014, vol. 275, pp. 204–233. doi: [10.1016/j.cma.2014.03.007](https://doi.org/10.1016/j.cma.2014.03.007).

36. Naimark O. B. Collective properties of defect ensembles and some nonlinear problems of plasticity and fracture, *Phys. Mesomech.*, 2003, vol. 6, no. 4, pp. 39–63.
37. Plekhov O. A., Naimark O. B. Theoretical and experimental study of energy dissipation in the course of strain localization in iron, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2009, vol. 50, no. 1, pp. 127–136. doi: [10.1007/s10808-009-0018-x](https://doi.org/10.1007/s10808-009-0018-x).
38. Betekhtin V. I., Naimark O. B., Kadomtsev A. G., Grishaev S. N. *Experimental and theoretical investigation of defect structure evolution, plastic deformation and fracture*, ICMM UB RAS Preprint. Perm, 1997, 56 pp. (In Russian)
39. Glansdorff P., Prigogine I. *Thermodynamic Theory of Structure, Stability and Fluctuations*. New York, Wiley-Interscience, 1971, xxvi+305 pp.
40. Plekhov O. A., Naimark O. B. Statistical model of submicrocrack evolution under cyclic loading, In: *Proc. of the 13th International Conference on Fracture 2013 (ICF 2013)* (June 16–21, 2013, Beijing, China), 2013, pp. 1890–1899, Retrieved <http://www.gruppofrattura.it/ocs/index.php/ICF/icf13/paper/viewFile/11232/10611> (November 10, 2016).
41. Murakam S. *Continuum Damage Mechanics. A Continuum Mechanics Approach to the Analysis of Damage and Fracture*. Dordrecht, Springer, 2012., xxx+402 pp pp.. doi: [10.1007/978-94-007-2666-6](https://doi.org/10.1007/978-94-007-2666-6).
42. Kostina A. A., Plekhov O. A. Mathematical modeling of the metals destruction using a criterion based on the amount of accumulated energy, In: *XI All-Russian Congress on Fundamental Problems of Theoretical and Applied Mechanics. Book of Abstracts* (Kazan, August 20–24, 2015). Kazan, 2015, pp. 2017–2019 (In Russian).
43. Kostina A. A., Plekhov O. A. Modeling of the energy balance in deformation and failure processes of AISI 304 steel under quasistatic loading, *Matem. Mod.*, 2015, vol. 27, no. 8, pp. 85–95 (In Russian).
44. Rabold F., Kuna M. Automated finite element simulation of fatigue crack growth in three-dimensional structures with the software system ProCrack, *Procedia Materials Science*, 2014, vol. 3, pp. 1099–1104. doi: [10.1016/j.mspro.2014.06.179](https://doi.org/10.1016/j.mspro.2014.06.179).

Received 25/X/2016;
received in revised form 10/XI/2016;
accepted 09/XII/2016.