



УДК 517.956.326

Задача с операторами Сайго для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения

О. А. Репин

Самарский государственный экономический университет,
Россия, 443090, Самара, ул. Советской Армии, 141.

Аннотация

Рассматривается вырождающееся гиперболическое уравнение

$$|y|^m u_{xx} - u_{yy} + a|y|^{\frac{m}{2}-1} u_x = 0.$$

В области, ограниченной характеристиками этого уравнения, исследована нелокальная задача, краевое условие которой содержит линейную комбинацию обобщенных операторов дробного интегро-дифференцирования с гипергеометрической функцией Гаусса в ядре. Единственность решения нелокальной задачи доказана с помощью метода Трикоми, а вопрос о существовании решения эквивалентно сведен к разрешимости сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши.

Ключевые слова: краевая задача, операторы дробного интегро-дифференцирования, функция Гаусса, сингулярное интегральное уравнение.

Получение: 13 июля 2017 г. / Исправление: 19 августа 2017 г. /
Принятие: 18 сентября 2017 г. / Публикация онлайн: 21 сентября 2017 г.

1. Постановка задачи. Рассмотрим уравнение

$$|y|^m u_{xx} - u_{yy} + a|y|^{\frac{m}{2}-1} u_x = 0, \quad (1)$$

где $m \geq 2$, $a \neq 0$ — вещественная постоянная, причем $|a| \leq m/2$, в конечной области Ω , ограниченной характеристиками уравнения (1):

$$\begin{aligned} AC : x - \frac{2}{m+2} y^{\frac{m+2}{2}} &= 0, & BC : x + \frac{2}{m+2} y^{\frac{m+2}{2}} &= 1, \\ AD : x - \frac{2}{m+2} (-y)^{\frac{m+2}{2}} &= 0, & BD : x + \frac{2}{m+2} (-y)^{\frac{m+2}{2}} &= 1. \end{aligned}$$

Краткое сообщение

© Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Репин О. А. Задача с операторами Сайго для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2017. Т. 21, № 3. С. 473–480. doi: [10.14498/vsgtu1556](https://doi.org/10.14498/vsgtu1556).

Сведения об авторе

Олег Александрович Репин <http://orcid.org/0000-0003-1522-3955>

доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой; каф. математической статистики и эконометрики; e-mail: matstat@mail.ru

Введем обозначения $\Omega_1 = \Omega \cap (y > 0)$, $\Omega_2 = \Omega \cap (y < 0)$, I — интервал $0 < x < 1$ прямой $y = 0$.

Уравнение (1), как отмечено в монографии М. М. Смирнова [1, с. 14], интересно тем, что известное условие М. Проттера [1, с. 13] для него не выполняется, но задача Коши поставлена корректно.

Для уравнения (1) изучим нелокальную краевую задачу со смещением (по терминологии А. М. Нахушева [2]).

ЗАДАЧА. *Найти решение*

$$u(x, y) = \begin{cases} u_1(x, y), & (x, y) \in \Omega_1, \\ u_2(x, y), & (x, y) \in \Omega_2 \end{cases}$$

уравнения (1) из класса $C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega_1 \cup I) \cap C^1(\Omega_2 \cup I) \cap C^2(\Omega_1 \cup \Omega_2)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$\begin{aligned} A_i(x)I_{0+}^{\alpha_1, \beta_1, \eta_1} u[\Theta_0^{(i)}(x)] + B_i(x)I_{1-}^{\alpha_2, \beta_2, \eta_2} u[\Theta_1^{(i)}(x)] + \\ + C_i(x)u(x, 0) + d_i(x)u_y(x, 0) = g_i(x), \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (2)$$

и условию сопряжения

$$\lim_{y \rightarrow 0+} u_y(x, y) = \alpha(x) \lim_{y \rightarrow 0-} u_y(x, y) + \beta(x), \quad (3)$$

где $I_{0+}^{\alpha, \beta, \eta}$ и $I_{1-}^{\alpha, \beta, \eta}$ — операторы обобщенного дробного интегро-дифференцирования с гипергеометрической функцией Гаусса $F(a, b; c; z)$, введенные М. Сайго [3], которые при действительных α, β, η , и $x > 0$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} (I_{0+}^{\alpha, \beta, \eta} f)(x) &= \begin{cases} \frac{x^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} F\left(\alpha+\beta, -\eta; \alpha; 1-\frac{t}{x}\right) f(t) dt, & \alpha > 0, \\ \frac{d^n}{dx^n} (I_{0+}^{\alpha+n, \beta-n, \eta-n} f)(x), & \alpha \leq 0, n = [-\alpha] + 1; \end{cases} \\ (I_{1-}^{\alpha, \beta, \eta} f)(x) &= \begin{cases} \frac{(1-x)^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_x^1 (t-x)^{\alpha-1} F\left(\alpha+\beta, -\eta; \alpha; \frac{t-x}{1-x}\right) f(t) dt, & \alpha > 0, \\ \left(-\frac{d}{dx}\right)^n (I_{1-}^{\alpha+n, \beta-n, \eta-n} f)(x), & \alpha \leq 0, n = [-\alpha] + 1, \end{cases} \end{aligned}$$

в частности

$$(I_{0+}^{0,0,\eta} f)(x) = f(x), \quad (I_{1-}^{0,0,\eta} f)(x) = f(x).$$

Здесь $\alpha_i, \beta_i, \eta_i$ ($i = 1, 2$) — заданные вещественные числа, $\Theta_0^{(i)}(x), \Theta_1^{(i)}(x)$ — точки пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $(x, 0) \in I$, с характеристиками AC, AD и BC, BD соответственно; $A_i(x), B_i(x), C_i(x), d_i(x), g_i(x), \alpha(x), \beta(x)$ — заданные непрерывные функции, принадлежащие классу $C^1(\bar{I}) \cap C^2(I)$, причем

$$A_i^2(x) + B_i^2(x) + C_i^2(x) + d_i^2(x) \neq 0, \quad i = 1, 2.$$

Данная работа продолжает цикл исследований [4–6 и др.] краевых задач, в которых условия содержат операторы М. Сайго [3].

2. Единственность решения задачи (1)–(3).

ТЕОРЕМА 1. В области Ω не может существовать более одного решения задачи (1)–(3), если

$$\alpha(x) \equiv 1, \quad \beta(x) \equiv 0, \quad \alpha_1 = \beta - 1, \quad \alpha_2 = \alpha - 1, \quad (4)$$

$$\beta_1 = \beta_2 = 1 - \alpha - \beta, \quad \eta_1 = \eta_2 = 0,$$

и выполняются условия

$$E_i(x) = \Gamma(2 - \alpha_i - \beta_i) \left(\frac{m+2}{4} \right)^{\frac{2}{m+2}} \left(\frac{A_i(x)}{\Gamma(1 - \alpha_i)} + \frac{B_i(x)}{\Gamma(1 - \beta_i)} \right) + d_i(x) \neq 0,$$

$$\left(\frac{A_i(x)}{E(x)} \right)' \geq 0, \quad \left(\frac{B_i(x)}{E(x)} \right)' \leq 0, \quad \frac{C_i(x)}{E(x)} \geq 0, \quad i = 1, 2,$$

$$A_i(1) = 0, \quad B_i(0) = 0, \quad \alpha_i = \frac{m-2a}{2(m+2)}, \quad \beta_i = \frac{m+2a}{2(m+2)}.$$

Доказательство. При выполнении условий (4) нетрудно получить соотношения между функциями $\tau(x)$ и $\nu_i(x)$:

$$\tau(x) = -\widehat{A}_1(x)(I_{0+}^{1-\alpha_1-\beta_1}\nu_1)(x) - \widehat{B}_1(x)(I_{1-}^{1-\alpha_1-\beta_1}\nu_1)(x) -$$

$$-\widehat{D}_1(x)\nu_1(x) + \frac{g_1(x)}{E_1(x)},$$

$$\tau(x) = \widehat{A}_2(x)(I_{0+}^{1-\alpha_2-\beta_2}\nu_2)(x) + \widehat{B}_2(x)(I_{1-}^{1-\alpha_2-\beta_2}\nu_2)(x) -$$

$$-\widehat{D}_2(x)\nu_2(x) + \frac{g_2(x)}{E_2(x)},$$

где I_{0+}^α , I_{1-}^α — операторы дробного интегрирования Римана—Лиувилля,

$$\widehat{A}_i(x) = \frac{\gamma_2 A_i(x)}{E_i(x)}, \quad \widehat{B}_i(x) = \frac{\gamma_2 B_i(x)}{E_i(x)}, \quad \widehat{D}_i(x) = \frac{d_i(x)}{E_i(x)}, \quad i = 1, 2,$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{2}(2 - 4\beta_0)^{2\beta_0} \frac{\Gamma(1 - 2\beta_0)}{\Gamma(1 - \beta_0)}, \quad \beta_0 = \frac{m+2a}{2m+4},$$

$$\tau(x) = u(x, 0), \quad \nu_1(x) = \lim_{y \rightarrow 0+} u_y(x, y), \quad \nu_2(x) = \lim_{y \rightarrow 0-} u_y(x, y).$$

Далее, проводя аналогичные [7] рассуждения и вычисления, при $g_i(x) = 0$, $i = 1, 2$, получим

$$I_1^* = \int_0^1 \tau(x)\nu_1(x)dx \leq 0, \quad I_2^* = \int_0^1 \tau(x)\nu_2(x)dx \geq 0.$$

Полученные неравенства позволяют сделать вывод, что $\nu_i(x) = 0$, $i = 1, 2$, и $\tau(x) = 0$, а следовательно, и $u_i(x, y) = 0$, $i = 1, 2$, как решения задачи Коши с нулевыми данными. $\square$

3. Существование решения задачи (1)–(3). Не нарушая общности, для упрощения изложения положим $\widehat{D}_i(x) = 0$, $i = 1, 2$.

Полагая $\widehat{A}_2(x) \neq 0$, на основании условия сопряжения (3) будем иметь

$$I_{0+}^{1-\alpha_2-\beta_2}\nu_2(x) + B_3(x)I_{1-}^{1-\alpha_2-\beta_2}\nu_2(x) + \\ + B_4(x)I_{0+}^{1-\alpha_1-\beta_1}\alpha(x)\nu_2(x) + B_5(x)I_{1-}^{1-\alpha_1-\beta_1}\alpha(x)\nu_2(x) = f(x), \quad (5)$$

где

$$\widehat{A}_2(x) \neq 0, \quad B_3(x) = \frac{\widehat{B}_2(x)}{\widehat{A}_2(x)}, \quad B_4(x) = \frac{\widehat{A}_1(x)}{\widehat{A}_2(x)}, \quad B_5(x) = \frac{\widehat{B}_1(x)}{\widehat{A}_2(x)},$$

$$f(x) = \frac{g_1(x)}{E_1(x)\widehat{A}_2(x)} - \frac{g_2(x)}{E_2(x)\widehat{A}_2(x)} - \frac{\widehat{A}_1(x)}{\widehat{A}_2(x)}I_{0+}^{1-\alpha_1-\beta_1}\beta(x) - \frac{\widehat{B}_1(x)}{\widehat{A}_2(x)}I_{1-}^{1-\alpha_2-\beta_2}\beta(x).$$

Поддействуем на обе части (5) оператором $D_{0+}^{1-\alpha_2-\beta_2}$:

$$\nu_2(x) + D_{0+}^{1-\alpha_2-\beta_2}B_3(x)I_{1-}^{1-\alpha_2-\beta_2}\nu_2(x) + \\ + D_{0+}^{1-\alpha_2-\beta_2}B_4(x)I_{0+}^{1-\alpha_1-\beta_1}\alpha(x)\nu_2(x) + \\ + D_{0+}^{1-\alpha_2-\beta_2}B_5(x)I_{1-}^{1-\alpha_1-\beta_1}\alpha(x)\nu_2(x) = D_{0+}^{1-\alpha_2-\beta_2}f(x). \quad (6)$$

Исследуем разрешимость уравнения (6). Для этого преобразуем выражения, входящие в его левую часть. Здесь, как и в работе [8], справедливо равенство

$$D_{0+}^{1-\alpha_2-\beta_2}B_3(x)I_{1-}^{1-\alpha_2-\beta_2}\nu_2(x) = \cos(\pi(\alpha_2 + \beta_2))B_3(x)\nu_2(x) + \\ + \frac{1}{\pi}\sin(\pi(\alpha_2 + \beta_2))\left(\int_0^x K_1(x, \xi)\nu_2(\xi)d\xi + \int_x^1 K_2(x, \xi)\nu_2(\xi)d\xi\right),$$

где

$$K_1(x, \xi) = \frac{d}{dx} \int_0^\xi \frac{B_3(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha_2-\beta_2}(\xi-t)^{\alpha_2+\beta_2}},$$

$$K_2(x, \xi) = \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{B_3(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha_2-\beta_2}(\xi-t)^{\alpha_2+\beta_2}};$$

$$D_{0+}^{1-\alpha_2-\beta_2}B_4(x)I_{0+}^{1-\alpha_1-\beta_1}\alpha(x)\nu_2(x) = \int_0^x K_3(x, \xi)\nu_2(\xi)d\xi + \alpha(x)\nu_2(x);$$

$$K_3(x, \xi) = \frac{\alpha(\xi)}{\Gamma(\alpha_2 + \beta_2)\Gamma(1 - \alpha_1 - \beta_1)} \times \\ \times \left(\frac{d}{dx} \int_0^x \frac{B_4(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha_2-\beta_2}(t-\xi)^{\alpha_1+\beta_1}} \frac{d}{dx} \int_0^\xi \frac{B_4(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha_2-\beta_2}(\xi-t)^{\alpha_1+\beta_1}} \right);$$

$$\begin{aligned} D_{0+}^{1-\alpha_2-\beta_2} B_5(x) I_{1-}^{1-\alpha_1-\beta_1} \alpha(x) \nu_2(x) = \\ = \frac{1}{\pi} \sin(\pi(\alpha_2 + \beta_2)) \left(\int_0^x K_4(x, \xi) \nu_2(\xi) d\xi + \int_x^1 K_5(x, \xi) \nu_2(\xi) d\xi \right) + \\ + \cos(\pi(\alpha_2 + \beta_2)) \alpha(x) B_5(x) \nu_2(x); \end{aligned}$$

$$K_4(x, \xi) = \alpha(\xi) \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{B_5(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha_2-\beta_2} (\xi-t)^{\alpha_1+\beta_1}},$$

$$K_5(x, \xi) = \alpha(\xi) \frac{d}{dx} \int_0^\xi \frac{B_5(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha_2-\beta_2} (\xi-t)^{\alpha_1+\beta_1}}.$$

Установим свойства ядер $K_i(x, \xi)$, $i = 1, 2, \dots, 5$.

Запишем $K_1(x, \xi)$ в виде

$$\begin{aligned} K_1(x, \xi) = B_3(\xi) \frac{d}{dx} \int_0^\xi \frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha_2-\beta_2} (\xi-t)^{\alpha_2+\beta_2}} - \\ - \frac{d}{dx} \int_0^\xi \frac{(B_3(\xi) - B_3(t)) dt}{(x-t)^{1-\alpha_2-\beta_2} (\xi-t)^{\alpha_2+\beta_2}}. \end{aligned}$$

Очевидно, что гладкость ядра $K_1(x, \xi)$ определяется гладкостью первого слагаемого правой части этого равенства. Поэтому ограничимся изучением свойств интеграла

$$\begin{aligned} I_1(x, \xi) = B_3(\xi) \frac{d}{dx} \int_0^\xi \frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha_2-\beta_2} (\xi-t)^{\alpha_2+\beta_2}} = \\ = \frac{B_3(\xi)}{1-\alpha_2-\beta_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\xi}{x} \right)^{1-\alpha_2-\beta_2} F\left(1-\alpha_2-\beta_2, 1; 2-\alpha_2-\beta_2; \frac{\xi}{x}\right) = \\ = - \left(\frac{\xi}{x} \right)^{1-\alpha_2-\beta_2} \frac{B_3(\xi)}{x-\xi}. \end{aligned}$$

Аналогично исследуется ядро $K_2(x, \xi)$. Таким образом, ядра $K_1(x, \xi)$ и $K_2(x, \xi)$ допускают оценки

$$K_1(x, \xi) = O(1)(x-\xi)^{-1}, \quad K_2(x, \xi) = O(1)(\xi-x)^{-1},$$

где $O(1)$ означает ограниченную в $\bar{I} \times \bar{I}$ величину.

После несложных вычислений для остальных ядер получим оценки

$$K_3(x, \xi) = O(1)|x-\xi|^{(\alpha_2-\alpha_1)+(\beta_2-\beta_1)-1},$$

$$K_4(x, \xi) = O(1)(\xi-x)^{(\alpha_2-\alpha_1)+(\beta_2-\beta_1)-1},$$

$$K_5(x, \xi) = O(1)(x-\xi)^{(\alpha_2-\alpha_1)+(\beta_2-\beta_1)-1}.$$

Таким образом, уравнение (6) принимает вид уравнения, которое исследовано в работе [9]:

$$A(x) \nu_2(x) + \int_0^1 \frac{K(x, \xi) \nu_2(\xi) d\xi}{\xi-x} = F(x), \quad (7)$$

где

$$K(x, \xi) = K_6(x, \xi)(\xi - x),$$

$K_6(x, \xi)$ и $A(x)$ — известные функции, $F(x) = D_{0+}^{1-\alpha_2-\beta_2} f(x)$.

Уравнение (7) при $A(x) \neq 0$ является сингулярным интегральным уравнением с ядром Коши, решение которого строится согласно общей теории интегральных уравнений [10]. Отсюда и из единственности искомого решения следует существование решения поставленной задачи.

Конкурирующие интересы. У меня нет конкурирующих интересов.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без грантовой поддержки.

Библиографический список

1. Смирнов М. М. *Вырождающиеся гиперболические уравнения*. Минск: Высш. шк., 1977.
2. Нахушев А. М. *Задача со смещением для уравнений в частных производных*. М.: Наука, 2006.
3. Saigo M. A remark on integral operators involving the Gauss hypergeometric function // *Math. Rep. College General Educ., Kyushu Univ.*, 1978. vol. 11, no. 2. pp. 135–143.
4. Репин О. А., Кумыкова С. К. Нелокальная задача для уравнения смешанного типа, порядок которого вырождается вдоль линии изменения типа // *Изв. вузов. Матем.*, 2013. № 8. С. 57–65.
5. Репин О. А., Кумыкова С. К. Внутреннекраевая задача с операторами Сайго для уравнения Геллерстедта // *Дифференц. уравнения*, 2013. Т. 49, № 10. С. 1340–1349.
6. Репин О. А. Об одной краевой задаче с операторами Сайго для уравнения смешанного типа // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2017. Т. 21, № 2. С. 271–277. doi: [10.14498/vsgtu1540](https://doi.org/10.14498/vsgtu1540).
7. Репин О. А., Кумыкова С. К. Нелокальная задача для уравнения смешанного типа третьего порядка с обобщенными операторами дробного интегро-дифференцирования произвольного порядка // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2011. № 4(25). С. 25–36. doi: [10.14498/vsgtu1014](https://doi.org/10.14498/vsgtu1014).
8. Кумыкова С. К. Краевая задача со смещением для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения // *Дифференц. уравнения*, 1980. Т. 16, № 1. С. 93–104.
9. Репин О. А., Кумыкова С. К. Об одной задаче с обобщенными операторами дробного дифференцирования для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения // *Дифференц. уравнения*, 2017. Т. 53, № 8. С. 1074–1082. doi: [10.1134/S037406411708009X](https://doi.org/10.1134/S037406411708009X).
10. Мусхелишвили Н. И. *Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике*. М.: Наука, 1968. 511 с.

MSC: 35M12

The problem with Saigo operators for a hyperbolic equation that degenerates inside the domain

O. A. Repin

Samara State Economic University,

141, Sovetskoy Armii st., Samara, 443090, Russian Federation.

Abstract

A nonlocal problem is investigated for a degenerate hyperbolic equation

$$|y|^m u_{xx} - u_{yy} + a|y|^{\frac{m}{2}-1} u_x = 0$$

in a domain bounded by the characteristics of this equation. The boundary condition for this problem contains a linear combination of generalized fractional integro-differentiation operators with a hypergeometric Gauss function in the kernel. The uniqueness of the solution is proved using the Tricomi method. The existence of a solution is equivalent to the solvability of a singular integral equation with a Cauchy kernel.

Keywords: boundary-value problem, fractional integro-differentiation operators, Gauss function, singular integral equation.

Received: 13th July, 2017 / Revised: 19th August, 2017 /

Accepted: 18th September, 2017 / First online: 21st September, 2017

Competing interests. I have no competing interests.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. The research has not had any funding.

References

1. Smirnov M. M. *Vyrozhdaiushchiesia giperbolicheskie uravneniia* [Degenerate hyperbolic equations]. Minsk, Vyssh. shk., 1977 (In Russian).
2. Nakhushev A. M. *Zadacha so smeshcheniem dlia uravnenii v chastnykh proizvodnykh* [Problems with Displacement for Partial Differential Equation]. Moscow, Nauka, 2006 (In Russian).

Short Communication

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Repin O. A. The problem with Saigo operators for a hyperbolic equation that degenerates inside the domain, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 3, pp. 473–480. doi: [10.14498/vsgtu1556](http://doi.org/10.14498/vsgtu1556) (In Russian).

Author's Details:

Oleg A. Repin  <http://orcid.org/0000-0003-1522-3955>

Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Head of Department; Dept. of Mathematical Statistics and Econometrics; e-mail: matstat@mail.ru

3. Saigo M. A remark on integral operators involving the Gauss hypergeometric function, *Math. Rep. College General Educ., Kyushu Univ.*, 1978, vol. 11, no. 2, pp. 135–143.
4. Repin O. A., Kumykova S. K. A nonlocal problem for a mixed-type equation whose order degenerates along the line of change of type, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2013, vol. 57, no. 8, pp. 49–56. doi: [10.3103/S1066369X13080069](https://doi.org/10.3103/S1066369X13080069).
5. Repin O. A., Kumykova S. K. Interior-boundary value problem with Saigo operators for the gellerstedt equation, *Differ. Equ.*, 2013, vol. 49, no. 10, pp. 1307–1316. doi: [10.1134/S0012266113100121](https://doi.org/10.1134/S0012266113100121).
6. Repin O. A. On a boundary-value problem with Saigo operators for a mixed-type equation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 2, pp. 271–277 (In Russian). doi: [10.14498/vsgtu1540](https://doi.org/10.14498/vsgtu1540).
7. Repin O. A., Kumykova S. K. Nonlocal problem for a equation of mixed type of third order with generalized operators of fractional integro-differentiation of arbitrary order, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2011, no. 4(25), pp. 25–36 (In Russian). doi: [10.14498/vsgtu1014](https://doi.org/10.14498/vsgtu1014).
8. Kumykova S. K. A boundary value problem with shift for a hyperbolic equation that is degenerate inside the domain, *Differ. Uravn.*, 1980, vol. 16, no. 1, pp. 93–104 (In Russian).
9. Repin O. A., Kumykova S. K. Problem with generalized fractional differentiation operators for a hyperbolic equation degenerating in the interior of the domain, *Differ. Equ.*, 2017, vol. 53, no. 8, pp. 1045–1053. doi: [10.1134/S0012266117080092](https://doi.org/10.1134/S0012266117080092).
10. Muskhelishvili N. I. *Singular integral equations. Boundary problems of function theory and their application to mathematical physics*. New York, Dover Publ., Inc., 1992, 447 pp.