Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2017. Т. 21, № 4. С. 597–610
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) http://doi.org/10.14498/vsgtu1536

Дифференциальные уравнения и математическая физика

УДК 517.956.6

Об одной нелокальной краевой задаче с постоянными коэффициентами для многомерного уравнения смешанного типа

С. З. Джамалов

Институт математики им. В. И. Романовского Академии Наук Узбекистана, Узбекистан, 100041, Ташкент, ул. Мирзо Улугбека, 81.

Аннотация

Рассматривается многомерное уравнение смешанного типа первого рода второго порядка с некоторыми условиями, накладываемыми на его коэффициенты. Для этого уравнения доказываются однозначная разрешимость и гладкость решения нелокальной краевой задачи с постоянными коэффициентами в пространствах С. Л. Соболева $W_2^l(Q)$, ($2 \leqslant l$ — целое число). Сначала изучена однозначная разрешимость обобщённого решения из пространства $W_2^2(Q)$. Единственность обобщённого решения для поставленной задачи доказывается методом априорных оценок. Для доказательства существования обобщённого решения задачи использован метод ε-регуляризации в сочетании с методом Галеркина. Использование полученных априорных оценок и применение теоремы о слабой компактности позволило с помощью предельного перехода получить решение рассматриваемого уравнения. Далее изучен вопрос гладкости обобщенного решения поставленной задачи.

Ключевые слова: многомерное уравнение смешанного типа, нелокальная краевая задача с постоянными коэффициентами, однозначная разрешимость, гладкость обобщенного решения, метод ε-регуляризации, метод Галеркина.

Получение: 22 марта 2017 г. / Исправление: 28 ноября 2017 г. / Принятие: 18 декабря 2017 г. / Публикация онлайн: 22 декабря 2017 г.

Научная статья

Образец для цитирования

Джамалов С. З. Об одной нелокальной краевой задаче с постоянными коэффициентами для многомерного уравнения смешанного типа // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2017. Т. 21, № 4. С. 597–610. doi: 10.14498/vsgtu1536.

Сведения об авторе

Сирожиддин Зухриддинович Джамалов http://orcid.org/0000-0002-3925-5129
кандидат физико-математических наук; старший научный сотрудник; отд. дифференциальных уравнений; e-mail: siroj63@mail.ru

Введение и постановки задачи. Известно [1], что задача Дирихле для уравнения смешанного типа первого рода некорректна. Естественно возникает вопрос: нельзя ли заменить условия задачи Дирихле другими условиями, которые охватывали бы всю границу и обеспечивали корректность задачи? Впервые такие краевые задачи были предложены и изучены в работах Т. Ш. Кальменова [2, 3]. Как близкие по постановке изучаемых задач отметим также работы [4–7]. Краевые задачи с нелокальными условиями впервые возникли в работе Ф. И. Франкля при изучении газодинамической задачи об обтекании профилей потоком дозвуковой скорости со сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения [8].

В настоящей работе изучается корректность одной нелокальной краевой задачи с постоянными коэффициентами для многомерного уравнения смешанного типа первого рода второго порядка.

Пусть $Q = (0,T) \times \prod_{i=1}^{n} (\alpha_i, \beta_i)$ — $(n+1)$-мерный параллелепипед Евклидова пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ точек $(t,x) = (t, x_1, \ldots, x_n)$; $0 < \alpha_i < \beta_i < +\infty$ $\forall i = 2, 3, \ldots, n$; $\alpha_1 < 0 < \beta_1$. В области Q рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$Lu = K(x)u_{tt} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)u_{x_j}\right) + \alpha(x,t)u_t + c(x,t)u = f(x,t), \tag{1}$$

где $x_1 K(x) > 0$ при $x_1 \neq 0$, где $x_1 \in (\alpha_1, \beta_1)$, $\alpha_1 < 0 < \beta_1$. Здесь и всюду ниже предполагается, что все функции вещественнозначные и достаточно гладкие.

Уравнение (1) относится к уравнениям смешанного типа первого рода, так как на знак функции $K(x)$ по переменной x_1 внутри области Q не налагается никаких ограничений [2, 9].

Предположим, что $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $a_{ij}(\alpha_k) = a_{ji}(\beta_k)$ $\forall k = 1, 2, \ldots, n$ и $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$ $|\xi|^2 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$; кроме этого, пусть выполнено одно из условий:

а) $$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant a_0|\xi|^2,$$

где $a_0 > 0$ — const;

б) $$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant a_1|\xi|^2,$$

где $a_1 < 0$ — const.

Через $W_2^l(Q)$ ($1 \leqslant l$ — натуральное число) обозначим пространство С. Л. Соболева со скалярным произведением $(\ ,\ )_l$ и нормой $\|\cdot\|_l$; $W_2^0(Q) = L_2(Q)$ — пространство квадратично-суммируемых функций.

Рассматривается следующая

Нелокальная краевая задача. *Найти обобщенное решение уравнения* (1) *из пространства С. Л. Соболева* $W_2^l(Q)$, *удовлетворяющее нелокальным краевым условиям*

$$\gamma D_t^p u\big|_{t=0} = D_t^p u\big|_{t=T}, \tag{2}$$

$$\eta_i D_{x_i}^p u\big|_{x_i=\alpha_i} = D_{x_i}^p u\big|_{x_i=\beta_i}, \tag{3}$$

где $p = 0, 1$; γ *и* η_i — *не равные нулю константы*, $i = 1, 2, \ldots, n$; $D_t^p u = \frac{\partial^p u}{\partial t^p}$, $D_t^0 u = u$.

Пусть $\nu = (\nu_t, \nu_{x_1}, \nu_{x_2}, \dots, \nu_{x_n})$ — единичный вектор внутренней нормали к границе ∂Q [10, 11], здесь

$$\nu_t = \cos(\nu, t), \quad \nu_{x_i} = \cos(\nu, x_i)\ \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

При получении различных априорных оценок мы будем использовать неравенство Юнга

$$uv \leqslant \frac{\sigma^p u^{2p}}{2p} + \frac{v^{2q}}{2q\sigma^q},$$

справедливое $\forall u > 0, v > 0, \sigma > 0$ и $p > 1$, $q > 1$ таких, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Неравенство Юнга при $p = q = 1$ переходит в неравенство Коши с σ [11].

Определение. Слабым обобщенным решением задачи (1)–(3) будем называть функцию $u(x,t)$ из $W_2^1(Q)$, удовлетворяющую следующему интегральному тождеству:

$$\Im(u, \vartheta) \equiv \int_Q \exp\Big(-\frac{1}{2}\Big(\lambda t + \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i\Big)\Big)\Big[K(x)u_t\vartheta_t - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_i}\vartheta_{x_i} -$$
$$- \Big(\frac{\lambda}{2}K(x)u_t - \frac{\mu_j}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_i} + \alpha u_t + cu\Big)\vartheta\Big]dxdt =$$
$$= -\int_Q \exp\Big(-\frac{1}{2}\Big(\lambda t + \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i\Big)\Big) f\vartheta dxdt,$$

где $\vartheta(x,t) \in W_2^1(Q)$ — любая периодическая по переменным $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и времени t функция; λ, $\mu = \mathrm{const}$ такие, что $\mu \geqslant 0$, а $\lambda > 0$ для случая а) и $\lambda < 0$ для случая б).

1. Единственность решения нелокальной краевой задачи. Сначала рассмотрим случай $l = 2$. Предположим, что коэффициенты уравнения (1) являются достаточно гладкими функциями.

Теорема 1. *Пусть выполнены вышеуказанные условия для коэффициентов уравнения* (1); *кроме этого, пусть*

$$2a + \lambda K(x) \geqslant \delta_1 > 0, \quad \lambda c - c_t \geqslant \delta_2 > 0,$$

где $\lambda = \frac{2}{T}\ln|\gamma| > 0$ *при* $|\gamma| > 1$ *в случае* а) *и* $\lambda = \frac{2}{T}\ln|\gamma| < 0$ *при* $|\gamma| < 1$ *в случае* б); $|\eta_i| \geqslant 1$, $c(x,0) \leqslant c(x,T)$. *Тогда для любой функции* $f \in L_2(Q)$, *если существует обобщенное решение задачи* (1)–(3) *из пространства* $W_2^2(Q)$, *то оно единственно.*

Доказательство. Пусть существует обобщенное решение задачи (1)–(3) $u \in W_2^2(Q)$. В силу условий теоремы 1 и неравенства Коши с σ [11] из задачи (1)–(3) интегрированием легко получить следующее неравенство:

$$2\int_Q Lu \exp\Big(-\lambda t - \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i\Big) u_t\, dx\, dt \geqslant$$

$$\geqslant \int_Q \exp\Big(-\lambda t - \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i\Big)\Big((2a+\lambda K)u_t^2 + \lambda a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} + (\lambda c - c_t)u^2\Big)dx\,dt-$$
$$- \sigma\|u_x\|_0^2 - \mu^2\sigma^{-1}\|u_t\|_0^2 +$$
$$+ \int_{\partial Q} \exp\Big(-\lambda t - \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i\Big)\Big(K(x)u_t^2\nu_t - 2a_{ij}u_{x_i}u_t\nu_{x_i} -$$
$$- a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}\nu_t + cu^2\nu_t\Big)ds, \quad (4)$$

где $0 \leqslant \mu_i = \frac{2}{\theta_i}\ln|\eta_i|$, $0 < \theta_i = (\beta_i - \alpha_i)$, σ — коэффициент из неравенства Коши с σ [11]. Условия теоремы 1 обеспечивают неотрицательность интегралов из (4) по области Q и по границе ∂Q. Так как $u \in W_2^2(Q)$ удовлетворяет краевым условиям (2), (3), для последнего интеграла из (4) имеем

$$\int_{\partial Q} \exp\Big(-\lambda t - \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i\Big)\Big(K(x)u_t^2\nu_t - 2a_{ij}u_{x_i}u_t\nu_{x_i} -$$
$$- a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}\nu_t + cu^2\nu_t\Big)ds =$$
$$= \big(\exp(-\lambda T)\gamma^2 - 1\big)\int_{\alpha_i}^{\beta_i} \exp(-\mu_i x_i)K(x)(u_t^2(x,0) + u_{x_i}^2(x,0))dx +$$
$$+ 2\big(\exp(-\mu_i\beta_i)\eta_i^2 - \exp(\mu_i\alpha_i)\big)\int_0^T \exp(-\lambda t)u_{x_i}(-\alpha_i,t)u_t(-\alpha_i,t)dt +$$
$$+ \int_{\alpha_i}^{\beta_i} \exp(-\mu_i x_i)\big(c(x,T)\exp(-\lambda T)\gamma^2 - c(x,0)\big)u^2(x,0)dx = \sum_{i=1}^{3} J_i,$$

где J_i — граничные интегралы.

Учитывая условия теоремы 1, получим, что граничные интегралы $J_1 = 0$, $J_2 = 0$, а $J_3 \geqslant 0$. Тогда из неравенства (4), отбрасывая положительный граничный интеграл, получим следующее неравенство:

$$2\int_{\partial Q} Lu \exp\Big(-\lambda t - \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i\Big)u_t\,dx\,dt \geqslant$$
$$\geqslant \int_Q \exp\Big(-\lambda t - \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i\Big)\Big(\big(2a + \lambda K(x)\big)u_t^2 + \lambda a_\tau u_{x_i}^2 + (\lambda c - c_t)u^2\Big)dxdt-$$
$$- \sigma\|u_{x_i}\|_0^2 - \mu^2\sigma^{-1}\|u_t\|_0^2, \quad (5)$$

где $a_\tau = a_0$ в случае а), $a_\tau = a_1$ в случае б). Выбирая коэффициенты

$$\lambda a_\tau - \sigma \geqslant \lambda_0 > 0, \quad \delta_1 - \mu^2\sigma^{-1} > \delta_0 > 0,$$

из неравенства (5) получим необходимую первую оценку[1]

$$\|u\|_1 \leqslant m\|f\|_0,$$

[1] Через m здесь и далее обозначены положительные, вообще говоря, разные постоянные в аналогичных неравенствах.

из которой следует единственность обобщенного решения задачи (1)–(3) из $W_2^2(Q)$ [10, 11]. □

2. Уравнения третьего порядка. Для доказательства существования решения задачи (1)–(3) из $W_2^2(Q)$ используем метод «ε-регуляризации» в сочетании с методом Галеркина [4, 5, 9–11].

Рассмотрим нелокальную задачу для уравнения третьего порядка

$$L_\varepsilon u_\varepsilon \equiv -\varepsilon \frac{\partial^3 u_\varepsilon}{\partial t^3} + L u_\varepsilon = f(x,t), \tag{6}$$

$$\gamma D_t^q u_\varepsilon\big|_{t=0} = D_t^q u_\varepsilon\big|_{t=T}, \quad q = 0,1,2, \tag{7}$$

$$\eta_i D_{x_i}^p u_\varepsilon\big|_{x_i=\alpha_i} = D_{x_i}^p u_\varepsilon\big|_{x_i=\beta_i}, \quad p = 0,1, \tag{8}$$

где $D_t^q u = \frac{\partial^q u}{\partial t^q}$, $q = 0,1,2$; $D_t^0 u = u$; ε — достаточно малое положительное число; η_i, γ — не равные нулю константы, причем $|\gamma| > 1$ в случае а), $|\gamma| < 1$ в случае б), $|\eta_i| \geqslant 1$.

Уравнение третьего порядка (6) будем использовать в качестве ε-регуляризирующего уравнения для уравнения (1) [4, 5, 9, 10].

Всюду ниже через V будем обозначать класс функций $u_\varepsilon(x,t) \in W_2^2(Q)$, $\frac{\partial^3 u_\varepsilon}{\partial t^3} \in L_2(Q)$, удовлетворяющих соответствующим условиям (7), (8).

Определение. Регулярным решением задачи (6)–(8) будем называть функцию $u_\varepsilon(x,t) \in V$, удовлетворяющую уравнению (6).

Теорема 2. *Пусть выполнены вышеуказанные условия для коэффициентов уравнения* (1), *кроме того, пусть*

$$2a + \lambda K(x) \geqslant \delta_1 > 0, \quad \lambda c - c_t \geqslant \delta_2 > 0,$$

где $\lambda = \frac{2}{T}\ln|\gamma| > 0$ *при* $|\gamma| > 1$ *в случае* а) *и* $\lambda = \frac{2}{T}\ln|\gamma| < 0$ *при* $|\gamma| < 1$ *в случае* б); $|\eta_i| \geqslant 1$, $c(x,0) = c(x,T)$, $a(x,0) = a(x,T)$. *Тогда для любой функции* f, $f_t \in L_2(Q)$, *такой, что* $\gamma f(x,0) = f(x,T)$, *существует единственное регулярное решение задачи* (6)–(8) *и для нее справедливы следующие априорные оценки:*

$$\varepsilon \left\| \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2} \right\|_0^2 + \|u_\varepsilon\|_1^2 \leqslant m \|f\|_0^2, \tag{9}$$

$$\varepsilon \left\| \frac{\partial^3 u_\varepsilon}{\partial t^3} \right\|_0^2 + \|u_\varepsilon\|_2^2 \leqslant m \left(\|f\|_0^2 + \|f_t\|_0^2 \right). \tag{10}$$

Доказательство. Доказательство теоремы 2 осуществляется поэтапно с применением метода Галеркина с выбором специальной базисной функции. Доказательство первой априорной оценки (9) проводится так же, как и доказательство теоремы 1, из которой следуют единственность регулярного решения задачи (6)–(8) и существование слабого решения задачи (1) [11].

Рассмотрим следующие спектральные задачи:

$$\begin{aligned} -\Delta_x X_j &= \nu_j^2 X_j(x); \\ D_{x_i}^p X_j\big|_{x_i=\alpha_i} &= D_{x_i}^p X_j\big|_{x_i=\beta_i}, \quad p = 0,1; \end{aligned} \tag{11}$$

$$
\begin{gathered}
-T_j''(t) = \tau_j^2 T_j(t); \\
D_t^p T_j\big|_{t=0} = D_t^p T_j\big|_{t=T}, \quad p = 0, 1.
\end{gathered} \tag{12}
$$

Через $\phi_j(x,t) = X_j(x)T_j(t)$ обозначим собственные функции, как решение задачи (11), (12). Из общей теории линейных самосопряженных эллиптических операторов [11,12] известно, что последовательность функций $\phi_j(x,t)$ — собственных функций задачи (11), (12), образует фундаментальную систему в $W_2^2(Q)$, ортогональную в $L_2(Q)$. С помощью этих функций построим решение вспомогательной задачи

$$
\exp\Big(-\frac{1}{2}\Big(\lambda t + \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i\Big)\Big)\omega_{jt} = \phi_j, \tag{13}
$$

$$
\gamma\omega_j(x,0) = \omega_j(x,T), \tag{14}
$$

где γ — не равная нулю константа такая, что $|\gamma| > 1$ в случае а) и $|\gamma| < 1$ в случае б); $0 \leqslant \mu_i = \frac{2}{\theta_i}\ln|\eta_i|$, $|\eta_i| \geqslant 1$. Очевидно, что задача (13), (14) однозначно разрешима и её решение имеет вид

$$
\begin{aligned}
\omega_j = \ell^{-1}\phi_j \equiv \exp\Big(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i\Big)\Big(\int_0^t \exp\Big(\frac{\lambda\tau}{2}\Big)\phi_j d\tau + {}\\
+ \frac{1}{\gamma - 1}\int_0^T \exp\Big(\frac{\lambda t}{2}\Big)\phi_j dt\Big).
\end{aligned}
$$

Ясно, что функции $\omega_j = \omega_j(x,t) \in W_2^2(Q)$ линейно независимы. Действительно, если для какого-нибудь набора функций ω_j линейная комбинация $\sum_{j=1}^N c_j\omega_j = 0$, то при действии оператором ℓ на эту сумму имеем

$$
\sum_{j=1}^{N} c_j \ell\omega_j = \sum_{j=1}^{N} c_j\phi_j = 0,
$$

отсюда следует, что для всех $j = 1, 2, \ldots, N$ коэффициенты $c_j = 0$.

Отметим, что из построения функции $\phi_j(x,t)$ следуют следующие условия на функции $\omega_j(x,t)$:

$$
\gamma D_t^q \omega_i\big|_{t=0} = D_t^q \omega_i\big|_{t=T}, \qquad q = 0, 1, 2; \tag{15}
$$

$$
\eta_i D_{x_i}^p \omega_i\big|_{x_i=\alpha_i} = D_{x_i}^p \omega_i\big|_{x_i=\beta_i}, \quad p = 0, 1. \tag{16}
$$

Теперь приближенное решение задачи (6)–(8) будем искать в виде $w = u_\varepsilon^N \equiv \sum_{j=1}^N c_j\omega_j$, где коэффициенты c_j для любого $j = 1, 2, \ldots, N$ определяются как решение линейной алгебраической системы

$$
\begin{aligned}
\int_Q L_\varepsilon u_\varepsilon^N \exp\Big(-\frac{1}{2}\Big(\lambda t + \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i\Big)\Big)\phi_j dxdt = {}\\
= \int_Q f \exp\Big(-\frac{1}{2}\Big(\lambda t + \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i\Big)\Big)\phi_j dxdt.
\end{aligned} \tag{17}
$$

Покажем однозначную разрешимость алгебраической системы (17). Умножая каждое уравнение из (17) на коэффициент $2c_j$ и суммируя по индексу j от 1 до N, с учетом задач (13), (14) из (17) получим следующее тождество:

$$\int_Q L_\varepsilon w \exp\Big(-\frac{1}{2}\Big(\lambda t + \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i\Big)\Big) w_t dxdt =$$
$$= \int_Q f \exp\Big(-\frac{1}{2}\Big(\lambda t + \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i\Big)\Big) w_t dxdt. \quad (18)$$

В силу условий теоремы 2, интегрируя (18), для приближенного решения задачи (6)–(8) получим первую априорную оценку (9). Отсюда вытекает разрешимость алгебраической системы (17), ибо для нее имеет место теорема единственности решения. В частности, из оценки (9) получим существование слабого обобщенного решения задачи (1)–(3) [10, 11]. Действительно, благодаря неравенству (9) по известной теореме о слабой компактности можно заключить, что из множества функций $\left\{u_\varepsilon^N\right\}$ можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность функций в $W_2^1(Q)$ такую, что $\left\{u_{\varepsilon_j}^{N_j}\right\} \to u$ при $N_j \to 0$, $\varepsilon_j \to 0$. На основании этого и в силу единственности решения нетрудно показать, что предельная функция $u \in W_2^1(Q)$ из тождества (17) удовлетворяет интегральному тождеству в смысле распределения:

$$\Im(u, \vartheta) = -\int_Q \exp\Big(-\frac{1}{2}\Big(\lambda t + \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i\Big)\Big) f \vartheta dxdt,$$

где $\vartheta(x,t) \in W_2^1(Q)$ — любая периодическая по переменным $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и времени t функция [10, 11].

Перейдем к доказательству второй априорной оценки (10). Дифференцируя уравнение (13) по переменной t два раза и учитывая условие задачи (15), (16), из тождества (17), получим

$$-\frac{1}{\tau_j^2}\int_Q L_\varepsilon w \exp\Big(-\frac{1}{2}\Big(\lambda t + \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i\Big)\Big) \frac{\partial^2 \ell \omega_j}{\partial t^2} dxdt =$$
$$= -\frac{1}{\tau_j^2}\int_Q f \exp\Big(-\frac{1}{2}\Big(\lambda t + \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i\Big)\Big) \frac{\partial^2 \ell \omega_j}{\partial t^2} dxdt. \quad (19)$$

Умножая каждое уравнение из (19) на $2\tau_j^2 c_j$ и суммируя по индексу j от 1 до N, с учетом условий (15), (16) из (19) получим следующее тождество:

$$-2\int_Q L_\varepsilon w \exp\Big(-\frac{1}{2}\Big(\lambda t + \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i\Big)\Big) \frac{\partial^2 \ell w}{\partial t^2} dxdt =$$
$$= -2\int_Q f \exp\Big(-\frac{1}{2}\Big(\lambda t + \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i\Big)\Big) \frac{\partial^2 \ell w}{\partial t^2} dxdt, \quad (20)$$

где
$$\frac{\partial^2 \ell w}{\partial t^2} = \exp\Big(-\frac{1}{2}\Big(\lambda t + \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i\Big)\Big)\Big(\frac{\partial^3 w}{\partial t^3} - \lambda w_{tt} + \frac{\lambda^2}{4} w_t\Big).$$

Учитывая условия теоремы 2 и краевые условия (15), (16), после интегрирования (20) и применения неравенства Юнга получим следующее неравенство:

$$\begin{gathered} m\big(\|f_t\|_0^2 + \|f\|_0^2\big) \geqslant \varepsilon \Big\|\frac{\partial^3 w}{\partial t^3}\Big\|_0^2 + \\ + \int_Q \exp\Big(-\lambda t - \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i\Big)\big(\big(2a + \lambda K(x)\big) w_{tt}^2 + \lambda a_\tau w_{tx_i}^2\big)\,dxdt + \\ + \int_{\partial Q} \exp\Big(-\lambda t - \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i\Big)\Big(\big(K(x) w_{tt}^2 + 2a w_t w_{tt} - 2a_\tau w_{x_i x_i} w_{tt} + 2c w w_{tt}\big)\nu_t - \\ - 2a_{ij} w_{tt} w_{x_i t} \nu_{x_i}\Big) ds - \sigma\big(\|w_{x_i t}\|_0^2 + \|w_{tt}\|_0^2\big) - c(\sigma)\|w\|_1^2 = J_1 + J_2, \quad (21) \end{gathered}$$

где σ и $c(\sigma)$ — коэффициенты неравенства Юнга; J_1 — интеграл по области Q, J_2 — интеграл по границе ∂Q. Учитывая условие теоремы 2 и краевые условия (15), (16), получим, что $J_1 > 0$ и $J_2 = 0$. Пусть $\delta_3 = \min\{\delta_1, \lambda a_\tau\}$. Выбирая $\delta_3 - \sigma > \delta_0 > 0$, из неравенства (21) получим вторую необходимую оценку:

$$\varepsilon \Big\|\frac{\partial^3 u_\varepsilon^N}{\partial t^3}\Big\|_0^2 + \big\|u_{\varepsilon\,tt}^N\big\|_0^2 + \big\|u_{\varepsilon\,x_i t}^N\big\|_0^2 \leqslant m\big(\|f\|_0^2 + \|f_t\|_0^2\big). \quad (22)$$

Следовательно, полученные оценки (9), (19)–(22) позволяют выполнить предельный переход при $N \to \infty$ и заключить, что некоторая подпоследовательность $\big\{u_\varepsilon^{N_k}\big\}$ сходится в силу единственности (теорема 1) в $L_2(Q)$ вместе с производными первого порядка и производными $u_{\varepsilon\,tt}^{N_k}$, $u_{\varepsilon\,x_i t}^{N_k}$ второго порядка к искомому регулярному решению $u_\varepsilon = u_\varepsilon(x,t)$ задачи (6)–(8), обладающему свойствами, указанными в теореме 2. В силу единственности (теорема 1) на самом деле вся последовательность $\{u_\varepsilon^N\}$ сходится к этому решению, т. е. для функции u_ε в силу (22) справедливо неравенство

$$\varepsilon \Big\|\frac{\partial^3 u_\varepsilon}{\partial t^3}\Big\|_0^2 + \|u_{\varepsilon\,tt}\|_0^2 + \|u_{\varepsilon\,x_i t}\|_0^2 \leqslant m\big(\|f\|_0^2 + \|f_t\|_0^2\big). \quad (23)$$

Далее, семейство функций $\{u_\varepsilon\}$ $(\varepsilon > 0)$ удовлетворяет эллиптическому уравнению

$$E u_\varepsilon \equiv -\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} u_{\varepsilon\,x_i})_{x_j} = f + \varepsilon \frac{\partial^3 u_\varepsilon}{\partial t^3} - K(x) u_{\varepsilon\,tt} - a u_{\varepsilon\,t} - c u_\varepsilon = F_\varepsilon$$

с условиями (7), (8). Из априорной оценки (23) следует, что семейство функций $\{F_\varepsilon\}$ $(\varepsilon > 0)$ равномерно ограничено в норме пространства $L_2(Q)$, т. е. имеет место неравенство

$$\|F_\varepsilon\|_0^2 \leqslant m\big(\|f\|_0^2 + \|f_t\|_0^2\big) \leqslant m\|f\|_1^2. \quad (24)$$

На основании априорных оценок для эллиптических уравнений [9,11] и неравенства (24) получим

$$\|u_\varepsilon\|_2^2 \leqslant m\|f\|_1^2.$$

Объединяя неравенства (23) и (24), получим необходимую вторую априорную оценку (10). Тем самым доказана теорема 2. □

3. Существование решения задачи (1)–(3). Теперь с помощью метода «ε-регуляризации» покажем разрешимость задачи (1)–(3).

Теорема 3. *Пусть выполнены все условия теоремы 2. Тогда обобщенное решение задачи (1)–(3) из пространства $W_2^2(Q)$ существует и единственно.*

Доказательство. Единственность обобщенного решения задачи (1)–(3) из $W_2^2(Q)$ доказана в теореме 1. Теперь докажем существование обобщенного решения задачи (1)–(3) из $W_2^2(Q)$. Для этого в области Q рассмотрим уравнение (6) с краевыми условиями (7), (8) при $\varepsilon > 0$. Так как выполнены все условия теоремы 2, существует единственное регулярное решение задачи (6)–(8) при $\varepsilon > 0$ и для нее справедливы априорные оценки (9) и (10). Отсюда по известной теореме о слабой компактности [11] следует, что из множества функций $\{u_\varepsilon\}$ $(\varepsilon > 0)$ можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность функций в V такую, что $\{u_{\varepsilon_i}\} \to u$ при $\varepsilon_i \to 0$. Покажем, что предельная функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1) почти всюду. В самом деле, так как последовательность $\{u_{\varepsilon_i}\}$ слабо сходится в $W_2^2(Q)$ и последовательность $\left\{\frac{\partial^3 u_{\varepsilon_i}}{\partial t^3}\right\}$ $(\varepsilon > 0)$ равномерно ограничена в $L_2(Q)$, а оператор L — линейный, имеем

$$Lu - f = Lu - Lu_{\varepsilon_i} + \varepsilon_i \frac{\partial^3 u_{\varepsilon_i}}{\partial t^3} = L(u - u_{\varepsilon_i}) + \varepsilon_i \frac{\partial^3 u_{\varepsilon_i}}{\partial t^3}. \tag{25}$$

Переходя в (25) к пределу при $\varepsilon_i \to 0$, получаем единственность обобщенного решение задачи (1)–(3) из $W_2^2(Q)$ [9,11]. Таким образом, теорема 3 доказана. □

4. Гладкость обобщенного решения. Теперь рассмотрим более общий случай, когда $l \geqslant 3$. Всюду ниже для простоты предполагаем, что коэффициенты уравнения (1) бесконечно дифференцируемы в замкнутой области $\overline{Q}$.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы 3, кроме того, пусть*

$$D_t^p a\big|_{t=0} = D_t^p a\big|_{t=T}, \quad D_t^p c\big|_{t=0} = D_t^p c\big|_{t=T}.$$

Тогда для любой функции $f(x,t)$ такой, что

$$f \in W_2^p(Q), \quad D_t^{p+1} f \in L_2(Q), \quad \gamma D_t^p f\big|_{t=0} = D_t^p f\big|_{t=T}, \quad p = 0,1,2,\ldots,m-1$$

существует, и притом единственное, обобщенное решение задачи (1)–(3) из пространства $W_2^{m+1}(Q)$, где $m = 1,2,3,\ldots$

Доказательство. Из гладкости решения задачи (11)–(14) возникает следующее условие для приближенного решения задачи (6)–(8):

$$w = u_\varepsilon^N \in C^\infty(\overline{Q});$$

$$\gamma D_t^q w\big|_{t=0} = D_t^q w\big|_{t=T}, \quad q = 0, 1, 2, \dots;$$
$$\eta_i D_{x_i}^p w\big|_{x_i=\alpha_i} = D_{x_i}^p w\big|_{x_i=\beta_i}, \quad p = 0, 1.$$

Учитывая условия теоремы 2 при $\varepsilon > 0$ и нелокальные условия при $t = 0$, $t = T$, из равенства

$$\Big[\exp\Big(-\frac{\lambda t}{2}\Big) L_\varepsilon u_\varepsilon\Big]_{t=0}^{t=T} = \\ = \Big[-\varepsilon \exp\Big(-\frac{\lambda t}{2}\Big)\frac{\partial^3 u_\varepsilon}{\partial t^3} + \exp\Big(-\frac{\lambda t}{2}\Big) L u_\varepsilon\Big]_{t=0}^{t=T} = \\ = \Big[\exp\Big(-\frac{\lambda t}{2}\Big) f(x,t)\Big]_{t=0}^{t=T}$$

получим

$$\big\|\gamma u_{\varepsilon\, ttt}(x,0) - u_{\varepsilon\, ttt}(x,T)\big\|_0 \leqslant \mathrm{const}.$$

Отсюда следует, что функция $v_\varepsilon(x,t) = u_{\varepsilon\ t}(x,t)$ принадлежит классу V и удовлетворяет следующему уравнению:

$$P_\varepsilon v_\varepsilon \equiv L_\varepsilon v_\varepsilon = f_t - a_t u_{\varepsilon\, t} - c_t u_\varepsilon = F_\varepsilon.$$

Из теоремы 2 следует, что семейство функций $\{F_\varepsilon\}$ равномерно ограничено в пространстве $L_2(Q)$, т. е.

$$\|F_\varepsilon\|_0 \leqslant m\big(\|f\|_0^2 + \|f_t\|_0^2\big).$$

Из условий теоремы 3 легко получить, что оператор P_ε ($\varepsilon > 0$) удовлетворяет условиям теоремы 4, отсюда на основании оценок (9), (10) теоремы 2 для функции v_ε получим аналогичные оценки:

$$\varepsilon\Big\|\frac{\partial^2 v_\varepsilon}{\partial t^2}\Big\|_0^2 + \|v_\varepsilon\|_1^2 \leqslant m\big(\|f\|_0^2 + \|f_t\|_0^2\big),$$
$$\varepsilon\Big\|\frac{\partial^3 v_\varepsilon}{\partial t^3}\Big\|_0^2 + \|v_\varepsilon\|_2^2 \leqslant m\big(\|f\|_1^2 + \|f_{tt}\|_0^2\big).$$

Далее, функция u_ε удовлетворяет параболическому (или обратно параболическому) уравнению

$$\Pi u_\varepsilon \equiv u_{\varepsilon\, t} - \sum_{i,j=1}^n \big(a_{ij} u_{\varepsilon\, x_i}\big)_{x_j} = \\ = f + \varepsilon\frac{\partial^3 u_\varepsilon}{\partial t^3} - K(x) u_{\varepsilon\, tt} - (a-1) u_{\varepsilon\, t} - c u_\varepsilon = \Phi_\varepsilon$$

с условиями (7), (8); причем $\Phi_\varepsilon \in L_2(Q)$, а в силу выше доказанного семейство функций $\{\Phi_\varepsilon\}$ равномерно ограничено в пространстве $W_2^2(Q)$, т. е.

$$\|\Phi_\varepsilon\|_1^2 \leqslant m\big(\|f\|_1^2 + \|f_{tt}\|_0^2\big) \leqslant m\|f\|_2^2. \tag{26}$$

На основании априорных оценок для параболических уравнений [11] и неравенства (26) получим

$$\|u_\varepsilon\|_3^2 \leqslant m\|f\|_2^2.$$

Аналогично доказываются неравенства

$$\|u_\varepsilon\|_{p+2}^2 \leqslant m\,\|f\|_{p+1}^2\,, \quad p = 1, 2, 3, \ldots$$

□

Замечание. Видно, что знак квадратичной формы в постановке задачи (1)–(3) существенной роли не играет, хотя в случае а) в класс уравнений (1) входят параболические уравнения, а в случае б) — обратно-параболические уравнения. Тем не менее для задачи (1)–(3) в обоих случаях получены аналогические результаты, которые отличаются лишь ограничением на γ: в случае а) $|\gamma| > 1$, а в случае б) $|\gamma| < 1$. Следующие примеры показывают, что ограничения на γ являются существенными и при невыполнении этих условий единственность решения задачи (1)–(3) нарушается.

Пример 1. В прямоугольнике $Q = (0, l) \times (0, T)$ рассмотрим следующую модельную задачу:

$$\begin{gathered} P_1 u \equiv u_t - u_{xx} = 0, \\ \gamma u(x, 0) = u(x, T), \\ u(0, t) = u(l, t) = 0. \end{gathered}$$

Решая эту задачу методом Фурье, найдем $\gamma_k = \exp(-\lambda_k T) < 1$, $\lambda_k = 2\pi k/l$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Нетрудно проверить, что все условия теоремы 1 выполнены, но несмотря на это функции $u_k = C_k \exp(-\lambda_k t)\sin(\lambda_k x)$ (где C_k — произвольные постоянные) — нетривиальные решения этой краевой задачи.

Пример 2. В прямоугольнике Q рассмотрим такую модельную задачу:

$$\begin{gathered} P_2 u \equiv u_t + u_{xx} = 0, \\ \gamma u(x, 0) = u(x, T), \\ u(0, t) = u(l, t) = 0. \end{gathered}$$

Решая эту задачу методом Фурье, убеждаемся, что нетривиальными решениями этой задачи являются функции $u_k = C_k \exp(\lambda_k t)\sin(\lambda_k x)$ с произвольными C_k. В этом случае $\gamma_k = \exp(\lambda_k T) > 1$.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Благодарность. Я благодарен анонимному рецензенту за тщательное прочтение статьи и ценные замечания, а также редакционной коллегии журнала за подготовку рукописи к печати.

Библиографический список

1. Бицадзе А. В. Некорректность задачи Дирихле для уравнений смешанного типа // *ДАН СССР*, 1953. Т. 122, № 2. С. 167–170.
2. Кальменов Т. Ш. О полупериодической задаче Дирихле для одного класса уравнений смешанного типа // *Дифференц. уравнения*, 1978. Т. 14, № 3. С. 546–547.
3. Кальменов Т. Ш., Садыбеков М. А. О задаче Дирихле и нелокальных краевых задачах для волнового уравнения // *Дифференц. уравнения*, 1990. Т. 26, № 1. С. 60–65.
4. Джамалов С. Об одной нелокальной краевой задачи для уравнения смешанного типа второго рода второго порядка // *Узбек. мат. ж.*, 2014. № 1. С. 5–14.
5. Джамалов С. Об одной нелокальной краевой задаче с постоянными коэффициентами для уравнения Трикоми // *Узбек. мат. ж.*, 2016. № 2. С. 51–60.
6. Сабитов К. Б. Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области // *Докл. РАН*, 2007. Т. 413, № 1. С. 23–26.
7. Цыбиков Б Н. О корректности периодической задачи для многомерного уравнения смешанного типа / *Неклассические уравнения математической физики*; ред. В. Н. Врагов. Новосибирск: СО АН СССР, 1986. С. 201–206.
8. Франкль Ф. И. О задачах С. А. Чаплыгина для смешанных до- и сверхзвуковых течений // *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1945. Т. 9, № 2. С. 121–143.
9. Врагов В. Н. *Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики.* Новосибирск: Новосиб. ун-т, 1983. 84 с.
10. Кожанов А. И. *Краевые задачи для уравнений математической физики нечетного порядка.* Новосибирск: Новосиб. ун-т, 1990. 132 с.
11. Ладыженская О. А. *Краевые задачи математической физики.* М.: Наука, 1973. 408 с.
12. Березанский Ю. М. *Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.* Киев: Наукова думка, 1965. 798 с.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 4, pp. 597–610
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) http://doi.org/10.14498/vsgtu1536

MSC: 35M10, 35M12

On a nonlocal boundary-value problem with constant coefficients for a multidimensional mixed type equation

S. Z. Dzhamalov

V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences,
81, Mirzo Ulugbek st., Tashkent, 100041, Uzbekistan.

Abstract

In this paper the unique solvability and smoothness of generalized solution of a nonlocal boundary value problem with constant coefficients for the multidimensional mixed type equation of the first kind in Sobolev spaces $W_2^l(Q)$, ($2 \leqslant l$ is integer number), have been proved. First, the unique solvability of the generalized solution from space $W_2^2(Q)$ has been studied. Further, the uniqueness of the generalized solution of nonlocal boundary value problem with constant coefficients for the multidimensional mixed type equation was proved by a priory estimates. For the proof of the existence of the generalized solution, we used method of "ε-regularization" together with Galerkin method. Precisely, first, we study regular solvability of the nonlocal boundary value problem for the multidimensional mixed type equation by functional analysis methods, i.e. we obtained necessary a priory estimates for the considered problems. Using these estimates we solve composite type equation, then by the theorem on weak compactness, we pass to the limit and deduce to the multidimensional mixed type equation of the first kind. At the end, smoothness of the generalized solution of the considered problems has been discussed.

Keywords: multidimensional mixed type equations, nonlocal boundary value problem with constants coefficients, unique solvability, smoothness of the generalized solution, ε-regularization method, Galerkin method.

Received: 22nd March, 2017 / Revised: 28th November, 2017 /
Accepted: 18th December, 2017 / First online: 22nd December, 2017

Competing interests. I have no competing interests.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. The research has not had any funding.

Research Article

Please cite this article in press as:
Dzhamalov S. Z. On a nonlocal boundary-value problem with constant coefficients for a multidimensional mixed type equation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 4, pp. 597–610. doi: 10.14498/vsgtu1536 (In Russian).

Author's Details:
Sirojiddin Z. Dzhamalov http://orcid.org/0000-0002-3925-5129
Cand. Phys. & Math. Sci., Professor; Senior Researcher; Dept. of Differential Equations;
e-mail: siroj63@mail.ru

Acknowledgments. I am grateful to the anonymous referee for careful reading of the paper and valuable comments. Finally, I would like to thank the team at journal editorial board for preparing the manuscript for publication.

References

1. Bitsadze A. V. Incorrectness of Dirichlet's problem for the mixed type of equations in mixed regions, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1958, vol. 122, no. 2, pp. 167–170 (In Russian).
2. Kal'menov T. Sh The semiperiodic Dirichlet problem for a class of equations of mixed type, *Differ. Uravn.*, 1978, vol. 14, no. 3, pp. 546–547 (In Russian).
3. Kal'menov T. Sh., Sadybekov M. A. The Dirichlet problem and nonlocal boundary value problems for the wave equation, *Differ. Equ.*, 1990, vol. 26, no. 1, pp. 55–59.
4. Dzhamalov S. On a nonlocal boundary-value problem for a second-order mixed type equation of the second kind, *Uzbek Mathematical Journal*, 2014, no. 1, pp. 5–14 (In Russian).
5. Dzhamalov S. On a nonlocal boundary-value problem with constant coefficients for the Tricomi equation, *Uzbek Mathematical Journal*, 2016, no. 2, pp. 51–60 (In Russian).
6. Sabitov K. B. The Dirichlet problem for equations of mixed type in a rectangular domain, *Dokl. Math.*, 2007, vol. 75, no. 2, pp. 193–196.
7. Tsybikov B N. Well-posedness of a periodic problem for a multidimensional equation of mixed type, In: *Nonclassical partial differential equations, Collect. Sci. Works*; ed. V. N. Vragov. Novosibirsk, 1986, pp. 201–206 (In Russian).
8. Frankl F. I. On the problems of Chaplygin for mixed sub- und supersonic flows, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.*, 1945, vol. 9, no. 2, pp. 121–143 (In Russian).
9. Vragov V. N. *Kraevye zadachi dlia neklassicheskikh uravnenii matematicheskoi fiziki* [Boundary-Value Problems for Nonclassical Equations of Mathematical Physics]. Novosibirsk, Novosibirsk State Univ., 1983, 84 pp. (In Russian)
10. Kozhanov A. I. *Kraevye zadachi dlia uravnenii matematicheskoi fiziki nechetnogo poriadka* [Boundary value problems for the equations of mathematical physics of odd order]. Novosibirsk, Novosibirsk State Univ., 1990, 132 pp. (In Russian)
11. Ladyzhenskaya O. A. *The boundary value problems of mathematical physics*, Applied Mathematical Sciences, vol. 49. New York etc., Springer Verlag, 1985, xxx+322 pp. doi: 10.1007/978-1-4757-4317-3.
12. Berezanskii Yu. M. *Expansion in eigenfunctions of self-adjoint operators*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 17. Providence RI, American Mathematical Society, 1968, ix+809 pp.