Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2018. Т. 22, № 2. С. 225–235
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) http://doi.org/10.14498/vsgtu1585

УДК 517.955.2:517.956

Критерий однозначной разрешимости спектральной задачи Дирихле для одного класса многомерных гиперболо-параболических уравнений

С. А. Алдашев

Казахский национальный педагогический университет им. Абая,
Казахстан, 480100, Алматы, ул. Толе Би, 86.

Аннотация

В цилиндрической области евклидова пространства для одного класса многомерного гиперболо-параболических уравнений рассматривается спектральная задача Дирихле с однородными краевыми условиями. Решение ищется в виде разложения по многомерным сферическим функциям. Доказаны теоремы существования и единственности решения. Получены условия однозначной разрешимости поставленной задачи, которые существенно зависят от высоты цилиндра.

Ключевые слова: многомерное гиперболо-параболическое уравнение, спектральная задача Дирихле, многомерная цилиндрическая область.

Получение: 5 декабря 2017 г. / Исправление: 8 апреля 2018 г. / Принятие: 11 июня 2018 г. / Публикация онлайн: 1 июля 2018 г.

Введение. Двумерные спектральные задачи для гиперболических уравнений интенсивно изучаются, а их многомерные аналоги, насколько известно автору, исследованы мало. Это связано с тем, что в случае трех и более независимых переменных возникают трудности принципиального характера, так как весьма привлекательный и удобный метод сингулярных интегральных уравнений, применяемый для двумерных задач, здесь не может быть использован из-за отсутствия сколько-нибудь полной теории многомерных сингулярных интегральных уравнений. Теория многомерных сферических функций, напротив, достаточно полно изучена. Эти функции имеют важные приложения в математической физике, в теоретической физике и в теории многомерных сингулярных интегральных уравнений. Автор предлагает при решении спектральных задач Дирихле для многомерных гиперболо-параболических уравнений использовать разложения по сферическим функциям.

Научная статья

Образец для цитирования

Алдашев С. А. Критерий однозначной разрешимости спектральной задачи Дирихле для одного класса многомерных гиперболо-параболических уравнений // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2018. Т. 22, № 2. С. 225–235. doi: 10.14498/vsgtu1585.

Сведения об авторе

Серик Аймурзаевич Алдашев http://orcid.org/0000-0002-8223-6900
доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой; каф. фундаментальной и прикладной математики; e-mail: aldash51@mail.ru

1. Постановка задачи и основной результат. Краевые задачи для гиперболо-параболических уравнений на плоскости хорошо изучены [1]. По мнению автора, их многомерные аналоги [2–4] исследованы недостаточно полно.

Пусть $\Omega_{\alpha\beta}$ — цилиндрическая область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, \ldots, x_m, t)$, ограниченная цилиндром $\Gamma = \{(x,t) : |x| = 1\}$, плоскостями $t = \alpha > 0$ и $t = \beta < 0$, где $|x|$ — длина вектора $x = (x_1, \ldots, x_m)$.

Обозначим через Ω_α и Ω_β части области $\Omega_{\alpha\beta}$, а через Γ_α, Γ_β — части поверхности Γ, лежащие в полупространствах $t > 0$ и $t < 0$; σ_α — верхнее, а σ_β — нижнее основание области $\Omega_{\alpha\beta}$.

Пусть далее S — общая часть границ областей Ω_α, Ω_β представляющая множество $\{t = 0,\ 0 < |x| < 1\}$ в E_m.

В области $\Omega_{\alpha\beta}$ рассмотрим многомерные смешанные гиперболо-параболические уравнения со спектральным действительным параметром γ:

$$\gamma u = \begin{cases} \Delta_x u - u_{tt} + \sum\limits_{i=1}^{m} a_i(x,t) u_{x_i} + b(x,t) u_t + c(x,t) u, & t > 0, \\ \Delta_x u - u_t + \sum\limits_{i=1}^{m} d_i(x,t) u_{x_i} + e(x,t) u, & t < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где Δ_x — оператор Лапласа по переменным $x_1, \ldots, x_m$, $m \geqslant 2$.

В качестве многомерной спектральной задачи Дирихле рассмотрим следующую задачу.

Задача D. *Найти решение уравнения* (1) *в области* $\Omega_{\alpha\beta}$ *при* $t \neq 0$ *из класса* $C(\overline{\Omega}_{\alpha\beta}) \cap C^2(\Omega_\alpha \cup \Omega_\beta)$, *удовлетворяющее краевым условиям*

$$u\big|_{\sigma_\alpha} = 0, \quad u\big|_{\Gamma_\alpha} = 0, \tag{2}$$

$$u\big|_{\Gamma_\beta} = 0, \quad u\big|_{\sigma_\beta} = 0. \tag{3}$$

Для удобства перейдем от декартовых координат $x_1, \ldots, x_m, t$ к сферическим $r, \theta_1, \ldots, \theta_{m-1}, t$, $r \geqslant 0$, $0 \leqslant \theta_1 < 2\pi$, $0 \leqslant \theta_i \leqslant \pi$, $i = 2, 3, \ldots, m-1$, $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_{m-1})$.

Пусть $\left\{Y_{n,m}^k(\theta)\right\}$ — система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \leqslant k \leqslant k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $W_2^l(S)$, $l = 0, 1, \ldots$ — пространства Соболева.

Через $\widetilde{d}_{in}^k(r,t)$, $d_{in}^k(r,t)$, $\widetilde{e}_n^k(r,t)$, $\widetilde{d}_n^k(r,t)$, ρ_n^k обозначим коэффициенты разложения рядов по сферическим функциям $Y_{n,m}^k(\theta)$ соответственно функций $d_i(r,\theta,t)\rho$, $d_i \frac{x_i}{r}\rho$, $e(r,\theta,t)\rho$, $d(r,\theta,t)\rho$, $\rho(\theta)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, причем $\rho(\theta) \in C^\infty(H)$, H — единичная сфера в E_m.

Пусть $a_i(x,t)$, $b(x,t)$, $c(x,t) \in W_2^l(\Omega_\alpha) \subset C(\bar{\Omega}_\alpha)$, $d_i(x,t)$, $e(x,t) \in W_2^l(\Omega_\beta)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $l \geqslant m+1$, $e(x,t) - \gamma \leqslant 0$, $\forall (x,t) \in \Omega_\beta$.

Теорема 1. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Если* $\gamma \leqslant -\mu^2_{s,n}$, *то задача* D *имеет только тривиальное (нулевое) решение.*
2. *При* $\gamma > -\mu^2_{s,n}$ *задача* D *имеет только тривиальное решение тогда и только тогда, когда*

$$\sin \alpha \sqrt{\gamma + \mu^2_{s,n}} \neq 0, \quad s = 1, 2, \ldots,$$

где $\mu_{s,n}$ — *нули функций Бесселя первого рода* $J_{n+(m-2)/2}(z)$.

Отметим, что эта теорема при $a_i(x,t) = b(x,t) = c(x,t) = d_i(x,t) = e(x,t) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, сформулирована в [5].

2. Разрешимость задачи D. В сферических координатах уравнение (1) в области Ω_β имеет вид

$$L_1 u \equiv u_{rr} + \frac{m-1}{r} u_r - \frac{1}{r^2}\delta u - u_t + \sum_{i=1}^{m} d_i(r,\theta,t) u_{x_i} + e(r,\theta,t)u = \gamma u, \tag{4}$$

где

$$\delta \equiv -\sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j \sin^{m-j-1}\theta_j} \frac{\partial}{\partial \theta_j}\Big(\sin^{m-j-1}\theta_j \frac{\partial}{\partial \theta_j}\Big),$$

$$g_1 = 1, \quad g_j = (\sin\theta_1 \cdots \sin\theta_{j-1})^2, \quad j > 1.$$

Известно [6], что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n+m-2)$, $n = 0, 1, \ldots$, каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y^k_{n,m}(\theta)$.

Искомое решение задачи (1), (3) в области Ω_β будем искать в виде ряда

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}^k_n(r,t) Y^k_{n,m}(\theta), \tag{5}$$

где $\bar{u}^k_n(r,t)$ — функции, подлежащие определению.

Подставив (5) в (4), умножив полученное выражение на $\rho(\theta) \neq 0$ и проинтегрировав по единичной сфере H для $\bar{u}^k_n$, получим [4]

$$\rho^1_0 \bar{u}^1_{0rr} - \rho^1_0 \bar{u}^1_{0t} + \Big(\frac{m-1}{r}\rho^1_0 + \sum_{i=1}^{m} d^1_{i0}\Big)\bar{u}^1_{0r} + \tilde{e}^1_0 \bar{u}^1_0 - \gamma \rho^1_0 \bar{u}^1_0 +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\Big\{\rho^k_n \bar{u}^k_{nrr} - \rho^k_n \bar{u}^k_{nt} + \Big(\frac{m-1}{r}\rho^k_n + \sum_{i=1}^{m} d^k_{in}\Big)\bar{u}^k_{nr} +$$
$$+ \Big[\tilde{e}^k_n - \lambda_n \frac{\rho^k_n}{r^2} + \sum_{i=1}^{m}(\tilde{d}^k_{in-1} - n d^k_n)\Big]\bar{u}^k_n - \gamma \rho^k_n \bar{u}^k_n\Big\} = 0. \tag{6}$$

Теперь рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений:

$$\rho_0^1 \bar{u}_{0rr}^1 - \rho_0^1 \bar{u}_{0t}^1 + \frac{m-1}{r} \rho_0^1 \bar{u}_{0r}^1 = \gamma \rho_0^1 \bar{u}_0^1, \tag{7}$$

$$\rho_1^k \bar{u}_{1rr}^k - \rho_1^k \bar{u}_{1t}^k + \frac{m-1}{r} \rho_1^k \bar{u}_{1r}^k - \frac{\lambda_1}{r^2} \rho_1^k \bar{u}_1^k =$$
$$= \gamma \rho_0^1 \bar{u}_1^k - \frac{1}{k_1} \Big(\sum_{i=1}^m d_{i0}^1 \bar{u}_{0r}^1 + \tilde{e}_0^1 \bar{u}_0^1 \Big), \quad n = 1,\ k = 1, 2, \ldots, k_1, \tag{8}$$

$$\rho_n^k \bar{u}_{nrr}^k - \rho_n^k \bar{u}_{nt}^k + \frac{m-1}{r} \rho_n^k \bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} \rho_n^k \bar{u}_n^k =$$
$$= \gamma \rho_n^k \bar{u}_n^k - \frac{1}{k_n} \sum_{k=1}^{k_{n-1}} \Big\{ \sum_{i=1}^m d_{in-1}^k \bar{u}_{n-1r}^k + \Big[\tilde{e}_{n-1}^k + \sum_{i=1}^m (\tilde{d}_{in-2}^k - (n-1) d_{n-1}^k) \Big] \bar{u}_n^k \Big\},$$
$$k = 1, 2, \ldots k_n,\ n = 2, 3, \ldots. \tag{9}$$

Суммируя уравнения (8) от 1 до k_1, а уравнения (9) — от 1 до k_n, а затем складывая полученные выражения вместе с (7), приходим к уравнению (6).

Отсюда следует, что если система функций $\{\bar{u}_n^k\}$, $k = 1, 2, \ldots, k_n$, $n = 0, 1, \ldots,$ — решение системы уравнений (7)–(9), то она является и решением уравнения (6).

Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (7)–(9) можно представить в виде

$$\bar{u}_{nrr}^k - \bar{u}_{nt}^k + \frac{m-1}{r} \bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} \bar{u}_n^k - \gamma \bar{u}_n^k = \bar{f}_n^k(r, t), \tag{10}$$

где $\bar{f}_n^k(r, t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, причем $\bar{f}_0^1(r, t) \equiv 0$. Далее из краевого условия (3) в силу (5) будем иметь

$$\bar{u}_n^k(r, \beta) = 0, \quad \bar{u}_n^k(1, t) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots k_n,\ n = 0, 1, \ldots. \tag{11}$$

Произведя в (10), (11) замену $\bar{u}_n^k(r, t) = r^{\frac{1-m}{2}} u_n^k(r, t)$, получим задачу

$$L u_n^k \equiv \bar{u}_{nrr}^k - u_{nt}^k - \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} u_n^k - \gamma u_n^k = f_n^k(r, t), \tag{12}$$

$$u_n^k(r, \beta) = 0, \quad u_n^k(1, t) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, k_n,\ n = 0, 1, \ldots, \tag{13}$$

где

$$\bar{\lambda}_n = \frac{(m-1)(3-m)}{4} - \lambda_n, \quad f_n^k(r, t) = r^{\frac{m-1}{2}} \bar{f}_n^k(r, t).$$

Решение задачи (12), (13) будем искать в виде

$$u_n^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} R_s(r) T_s(t), \tag{14}$$

при этом пусть

$$f_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{s,n}^k(t) R_s(r). \tag{15}$$

Подставляя (14) в (12), (13) и учитывая (15), получим

$$R_{srr} + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} R_s + (\mu - \gamma) R_s = 0, \quad 0 < r < 1, \tag{16}$$

$$R_s(1) = 0, \quad |R_s(0)| < \infty, \tag{17}$$

$$T_{st} + \mu T_s(t) = -a_{s,n}^k(t), \quad \beta < t < 0, \tag{18}$$

$$T_s(\beta) = 0, \tag{19}$$

где $\mu = \gamma + \mu_{s,n}^2$.

Ограниченным решением задачи (16), (17) является функция [7, с. 401, формула (1a)]

$$R_s(r) = \sqrt{r} J_\nu(\mu_{s,n} r), \quad \nu = n + \frac{m-2}{2}. \tag{20}$$

Решением задачи (18), (19) является функция [7, с. 35, п. 4.3]

$$T_{s,n}(t) = \big(\exp(-\gamma - \mu_{s,n}^2)t\big) \int_t^\beta a_{s,n}^k(\xi) \big(\exp(\gamma + \mu_{s,n}^2)\xi\big) d\xi. \tag{21}$$

Подставляя (20) в (15), будем иметь

$$r^{-\frac{1}{2}} f_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{s,n}^k(t) J_\nu(\mu_{s,n} r), \quad 0 < r < 1. \tag{22}$$

Ряд (22) — разложение в ряд Фурье—Бесселя [8], если

$$a_{s,n}^k(t) = \frac{1}{[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^2} \int_0^1 \sqrt{\xi} f_n^k(\xi,t) J_\nu(\mu_{s,n}\xi) d\xi, \tag{23}$$

где $\mu_{s,n}$, $s = 1, 2, \ldots$ — положительные нули функций Бесселя $J_\nu(z)$, расположенные в порядке возрастания их величины.

Из (20), (21) получим решение задачи (12), (13):

$$u_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} T_{s,n}(r) J_\nu(\mu_{s,n} r), \tag{24}$$

где $a_{s,n}(t)$ находятся из (23). Следовательно, сначала решив задачу (7), (11) ($n = 0$), а затем задачу (8), (11) ($n = 1$) и т. д., найдем последовательно все $u_n^k(r,t)$ из (24), $k = 1, 2, \ldots, k_n$, $n = 0, 1, \ldots$.

Итак, в области Ω_β имеет место равенство

$$\int_H \rho(\theta)(L_1 - \gamma) u dH = 0. \tag{25}$$

Пусть $f(r,\theta,t) = R(r)\rho(\theta)T(t)$, причем $R(r) \in V_0$, V_0 плотно в $L_2((0,1))$; $\rho(\theta) \in C^\infty(H)$ плотно в $L_2(H)$, а $T(t) \in V_1$, V_1 плотно в $L_2((\beta,0))$. Тогда $f(r,\theta,t) \in V$, $V = V_0 \otimes H \otimes V_1$ плотно в $L_2(\Omega_\beta)$ [9].

Отсюда и из (25) следует

$$\int_{\Omega_\beta} f(r,\theta,t)(L_1 - \gamma)ud\Omega_\beta = 0$$

и

$$L_1 u = \gamma u \quad \forall (r,\theta,t) \in \Omega_\beta.$$

Таким образом, решением задачи (1), (3) в области Ω_β является функция

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\sum_{n=0}^{\infty} r^{\frac{(2-m)}{2}} T_{s,n}(t) J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_{s,n} r) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{26}$$

где $T_{s,n}(t)$ определяются из (21).

Из (23), (21), (24) следует, что $a_{s,n}(t) = T_{s,n}(t) = 0$ и $u_n^k(r,t) = 0$, $s = 1, 2, \ldots$, $k = 1, 2, \ldots, k_n$, $n = 0, 1, \ldots$.

В свою очередь, из (26) получим, что $u(r,\theta,t) = 0$ в Ω_β.

Отсюда при $t \to -0$ получим

$$u(r,\theta,0) = 0. \tag{27}$$

Таким образом, учитывая краевые условия (2), (27), в области Ω_α получим спектральную задачу Дирихле для уравнения

$$\Delta_x u - u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(x,t) u_{x_i} + b(x,t) u_t + c(x,t)u, = \gamma u \tag{28}$$

с условиями

$$u\big|_{S \cup \Gamma_\alpha \cup \sigma_\alpha} = 0. \tag{29}$$

В работе [10] доказана справедливость теоремы 1 для задачи (28), (29). Следовательно, разрешимость задачи D установлена.

3. Единственность решения задачи D. Сначала рассмотрим задачу (1), (3) в области Ω_β и докажем единственность ее решения. Для этого сначала построим решение первой краевой задачи для уравнения

$$L_1^* \upsilon \equiv \Delta_x \upsilon - \upsilon_t - \sum_{i=1}^{m} d_i \upsilon_{x_i} + d\upsilon = \gamma \upsilon \tag{4*}$$

с краевыми условиями

$$\upsilon\big|_S = \tau(r,\theta) = \bar{\tau}_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \quad \upsilon\big|_{\Gamma_\beta} = 0, \tag{30}$$

где

$$d(x,t) = e - \sum_{i=1}^{m} d_{ix_i},$$

$\bar{\tau}_n^k(r) \in G$, G — множество функций $\tau(r)$ из класса $C([0,1]) \cap C^1((0,1))$. Множество G плотно всюду в $L_2((0,1))$ [9].

Решение задачи (4*), (30) будем искать в виде (5), где функции $\bar{\upsilon}_n^k(r,t)$ будут определены ниже. Тогда, аналогично п. 2, функции $\bar{\upsilon}_n^k(r,t)$ удовлетворяют системе уравнений (7)–(9), где $\tilde{d}_{in}^k$, d_{in}^k заменены на $-\tilde{d}_{in}^k$, $-d_{in}^k$, а $\tilde{e}_n^k$ на $\tilde{d}_n^k$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $k = 1, 2, \ldots, k_n$, $n = 0, 1, \ldots$.

Далее в силу (5) из краевых условий (30) получим

$$\bar{\upsilon}_n^k(r,0) = \bar{\tau}_n^k(r), \quad \bar{\upsilon}_n^k(1,t) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, k_n, \quad n = 0, 1, \ldots. \tag{31}$$

Как ранее замечено, каждое уравнение системы (7)–(9) представимо в виде (10). Задачу (10), (31) сведем к следующей:

$$L\upsilon_n^k \equiv \upsilon_{nrr}^k - \upsilon_{nt}^k + \frac{\overline{\lambda}_n}{r^2}\upsilon_n^k - \gamma\upsilon_n^k = f_n^k(r,t), \tag{32}$$

$$\upsilon_n^k(r,0) = \tau_n^k(r), \quad \upsilon_n^k(1,t) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, k_n, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{33}$$

$$\upsilon_n^k(r,t) = r^{\frac{(m-1)}{2}}\bar{\upsilon}_n^k(r,t), \quad \tau_n^k(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}}\bar{\tau}_n^k(r).$$

Решение задачи (32), (33) будем искать в виде

$$\upsilon_n^k(r,t) = \upsilon_{1n}^k(r,t) + \upsilon_{2n}^k(r,t),$$

где $\upsilon_{1n}^k(r,t)$ — решение задачи для (32) с условиями

$$\upsilon_{1n}^k(r,0) = 0, \quad \upsilon_{1n}^k(1,t) = 0, \tag{34}$$

а $\upsilon_{2n}^k(r,t)$ — решение задачи для уравнения

$$L\upsilon_{2n}^k = 0 \tag{35}$$

с условиями

$$\upsilon_{2n}^k(r,0) = \tau_n^k(r), \ \upsilon_{2n}^k(1,t) = 0. \tag{36}$$

Как показано в [4], решениями задач (32), (34) и (35), (36) являются, соответственно, функции

$$\upsilon_{1n}^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty}\sqrt{r}\big(\exp(-\gamma - \mu_{s,n}^2)t\big) \times \\ \times \left(\int_t^0 a_{s,n}(\xi)(\exp(\gamma + \mu_{s,n}^2)d\xi\right) J_{n+(m-2)/2}(\mu_{s,n}r),$$

$$\upsilon_{2n}^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty}\tau_s\sqrt{r}\big(\exp(-\gamma - \mu_{s,n}^2)t\big)J_{n+(m-2)/2}(\mu_{s,n}r),$$

где

$$\tau_s = 2[J_{n+(m-2)/2}(\mu_{s,n})]^{-2}\int_0^1 \sqrt{\xi}\tau_n^k(\xi)J_{n+(m-2)/2}(\mu_{s,n}\xi)d\xi.$$

Таким образом, решение задачи(4*), (30) построено в виде ряда

$$\upsilon(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} r^{\frac{(1-m)}{2}}\big(\upsilon_{1n}^k(r,t)+\upsilon_{2n}^k(r,t)\big)Y_{n,m}^k(\theta).$$

При этом оно принадлежит классу $C(\overline{\Omega_\beta})\cap C^2(\Omega_\beta)$ [4].

Из определения сопряженных операторов L_1, L_1^* [11] имеем

$$\upsilon L_1 u-uL_1^*\upsilon=-\upsilon P(u)+uP(\upsilon)-u\upsilon Q,$$

где

$$P(u)=\sum_{i=1}^{m}u_{x_i}\cos\big(N^{\perp},x_i\big),\quad Q=\cos\big(N^{\perp},t\big)-\sum_{i=1}^{m}d_i\cos\big(N^{\perp},x_i\big),$$

а $N^{\perp}$ — внутренняя нормаль к границе $\partial\Omega_\beta$.

Отсюда по формуле Грина получим

$$\int_S \tau(r,\theta)u(r,\theta,0)ds=0. \tag{37}$$

Поскольку линейная оболочка системы функций $\{\bar\tau_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta)\}$ плотна в $L_2(S)$ [11], из (37) заключаем, что $u(r,\theta,0)=0\ \ \forall(r,\theta)\in S$. Стало быть, по принципу экстремума для уравнений (4) [12] $u\equiv 0$ в $\overline{\Omega}_\beta$.

В области Ω_α получаем задачу (28), (29), для которой имеет место теорема 1 [10]. Теорема 1 доказана полностью.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторский вклад и ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Нахушев А. М. *Задачи со смещением для уравнения в частных производных.* М.: Наука, 2006. 287 с.
2. Врагов В. Н. *Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики.* Новосибирск: НГУ, 1983. 84 с.
3. Алдашев С. А, Кожамкулов Б. А, Акитай Б. Е, Джумадиллаев К. Н. Задачи Дирихле, возникающие при моделировании процессов деформации и разрушении композитов и их корректность // *Вестник КазНПУ. Сер. Физ.-мат. науки*, 2014. №2(46). С. 128–133.
4. Алдашев С. А. Корректность задачи Дирихле для одного класса многомерных гиперболо-параболических уравнений // *Укр. матем. вестник*, 2013. Т. 10, №2. С. 147–157.
5. Алдашев С. А. Критерий однозначной разрешимости спектральной задачи Дирихле для многомерного гиперболо-параболического уравнения / *Уравнения смешанного типа, родственные проблемы анализа и информатики*: Второй Международный Российско-Узбекский симпозиум. Нальчик: НИИ ПМА КБНЦ РАН, 2012. С. 24–27.

6. Михлин С. Г. *Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения.* М.: Физматгиз, 1962. 254 с.
7. Камке Э. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.* М.: Наука, 1965. 703 с.
8. Erdélyi A. (ed.) *Higher transcendental functions.* vol. II / Bateman Manuscript Project, California Institute of Technology. Malabar, Florida: Robert E. Krieger Publ., 1981. xviii+396 pp.
9. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* М.: Наука, 1976. 543 с.
10. Алдашев С. А. Критерий однозначной разрешимости спектральной задачи Дирихле в цилиндрической области для многомерных гиперболических уравнений с волновым оператором // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2014. № 3(36). С. 21–30. doi: 10.14498/vsgtu1300.
11. Смирнов В. И. *Курс высшей математики.* Т. 4, часть 2. М.: Наука, 1981. 550 с.
12. Friedman A. *Partial differential equations of parabolic type.* Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1964. xiv+347 pp.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 2, pp. 225–235
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) http://doi.org/10.14498/vsgtu1585

MSC: 35M12, 35A02

A criterion for the unique solvability of the spectral Dirichlet problem for a class of multidimensional hyperbolic-parabolic equations

S. A. Aldashev

Kazakh National Pedagogical University named after Abay,
86, Tole-bi st., Almaty, 480100, Kazakhstan.

Abstract

In the cylindrical domain of Euclidean space for one class of multidimensional hyperbolic parabolic equations the spectral Dirichlet problem with homogeneous boundary conditions is considered. The solution is sought in the form of an expansion in multidimensional spherical functions. The existence and uniqueness theorems of the solution are proved. Conditions for the unique solvability of the problem are obtained, which essentially depend on the height of the cylinder.

Keywords: multidimensional hyperbolic-parabolic equation, Dirichlet spectral problem, multidimensional cylindrical domain.

Received: 5th December, 2017 / Revised: 8th April, 2018 /
Accepted: 11th June, 2018 / First online: 1st July, 2018

Competing interests. I declare that I have no competing interests.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. The research has not had any funding.

Research Article

Please cite this article in press as:
Aldashev S. A. A criterion for the unique solvability of the spectral Dirichlet problem for a class of multidimensional hyperbolic-parabolic equations, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 2, pp. 225–235. doi: 10.14498/vsgtu1585 (In Russian).

Author's Details:
Serik A. Aldashev http://orcid.org/0000-0002-8223-6900
Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Head of Dept.; Dept. of Fundamental and Applied Mathematics; e-mail: aldash51@mail.ru

References

1. Nakhushev A. M. *Zadachi so smeshcheniem dlia uravneniia v chastnykh proizvodnykh* [Problems with Shifts for Partial Differential Equations]. Moscow, Nauka, 2006, 287 pp. (In Russian)
2. Vragov V. N. *Kraevye zadachi dlia neklassicheskikh uravnenii matematicheskoi fiziki* [Boundary-Value Problems for Nonclassical Equations of Mathematical Physics]. Novosibirsk, Novosibirsk State Univ., 1983, 84 pp. (In Russian)
3. Aldashev S. A, Kozhamkulov B. A, Akitai B. E, Dzhumadillaev K. N. Dirichlet problems arising in the modeling of deformation and fracture processes of composites and their correctness, *Vestnik KazNPU. Ser. Fiz.-mat. nauki*, 2014, no. 2(46), pp. 128–133 (In Russian).
4. Aldashev S. A. Well-posedness of Dirichlet problem for one class of multi-dimensional hyperbolic-parabolic equations, *Ukr. Matem. Vestnik*, 2013, vol. 10, no. 2, pp. 147–157 (In Russian).
5. Aldashev S. A. A criterion for the unique solvability of the spectral Dirichlet problem for a multidimensional hyperbolic-parabolic equation, In: *Equations of Mixed Type, Related Problems of Analysis and Informatics.* Nal'chik, Research Institute of PMA KBSC RAS, 2012, pp. 24–27 (In Russian).
6. Mikhlin S. G. *Multidimensional Singular Integrals and Integral Equations*, International Series of Monographs on Pure and Applied Mathematics, vol. 83. Oxford, London, etc., Pergamon Press, 1965, xii+255 pp. doi: 10.1016/C2013-0-01835-X.
7. Kamke E. *Spravochnik po obyknovennym differentsial'nym uravneniiam* [Handbook on Ordinary Differential Equations]. Moscow, Nauka, 1965, 703 pp. (In Russian)
8. Erdélyi A. (ed.) *Higher transcendental functions*, vol. II, Bateman Manuscript Project, California Institute of Technology. Malabar, Florida, Robert E. Krieger Publ., 1981, xviii+396 pp.
9. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza* [Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis]. Moscow, Nauka, 1976, 543 pp. (In Russian)
10. Aldashev S. A. A criterion for the unique solvability of the Dirichlet spectral problem in a cylindrical domain for multidimensional hyperbolic equations with wave operator, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2014, no. 3(36), pp. 21–30 (In Russian). doi: 10.14498/vsgtu1300.
11. Smirnow W. I. *Course in higher mathematics*, Part IV/2. Frankfurt am Main, H. Deutsch, 1995, 469 pp. (In German)
12. Friedman A. *Partial differential equations of parabolic type*. Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, Inc., 1964, xiv+347 pp.