Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2018. Т. 22, № 1. С. 153–183
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) http://doi.org/10.14498/vsgtu1565

УДК 517.927.4:519.624

Численное интегрирование матричным методом краевых задач для линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка с переменными коэффициентами

В. Н. Маклаков, Я. Г. Стельмах

Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

Использование многочлена Тейлора второй степени при аппроксимации производных конечными разностями приводит ко второму порядку аппроксимации традиционного метода сеток при численном интегрировании обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. В работе при исследовании краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка с переменными коэффициентами рассмотрен предложенный ранее метод численного интегрирования, использующий средства матричного исчисления, в котором аппроксимация производных конечными разностями не использовалась. Согласно указанному методу, при составлении системы разностных уравнений может быть выбрана произвольная степень многочлена Тейлора в разложении искомого решения задачи в ряд Тейлора. Вычислена невязка и дана оценка порядка аппроксимации метода в зависимости от выбранной степени многочлена Тейлора при использовании четырехточечного шаблона. Теоретически выявлены закономерности между порядком аппроксимации матричного метода и степенью используемого многочлена Тейлора. Установлено, что порядок аппроксимации пропорционален степени используемого многочлена Тейлора и меньше нее на две единицы.

При использовании пятиточечного шаблона предложена процедура построения фиктивного граничного условия, позволяющая построить замкнутую систему разностных уравнений матричного метода численного интегрирования. Система разностных уравнений разбита на две подсистемы: в первую подсистему вошли два уравнения, первое из которых содержит заданное значение производной в граничных условиях

Научная статья

Образец для цитирования

Маклаков В. Н., Стельмах Я. Г. Численное интегрирование матричным методом краевых задач для линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка с переменными коэффициентами // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2018. Т. 22, № 1. С. 153–183. doi: 10.14498/vsgtu1565.

Сведения об авторах

Владимир Николаевич Маклаков http://orcid.org/0000-0003-1644-7424
кандидат физико-математических наук, доцент; доцент; каф. высшей математики и прикладной информатики; e-mail: makvo63@yandex.ru

Янина Геннадьевна Стельмах http://orcid.org/0000-0002-3266-3111
кандидат педагогических наук; доцент; каф. высшей математики и прикладной информатики; e-mail: yaninastelmah@rambler.ru

задачи, второе — вычисленное из фиктивного граничного условия значение; во вторую подсистему вошли оставшиеся разностные уравнения построенной замкнутой системы. Вычислена невязка и дана оценка порядка аппроксимации метода в зависимости от выбранной степени многочлена Тейлора при использовании пятиточечного шаблона. Теоретически выявлены закономерности между порядком аппроксимации матричного метода и степенью используемого многочлена Тейлора. Установлено следующее:

а) порядок аппроксимации первой подсистемы, второй подсистемы при четном значении степени используемого многочлена Тейлора и всей задачи пропорционален этой степени и меньше нее на две единицы;

б) порядок аппроксимации второй подсистемы при нечетном значении степени используемого многочлена Тейлора пропорционален этой степени и меньше нее на единицу.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения, краевые задачи, порядок аппроксимации, численные методы, многочлены Тейлора.

Получение: 16 октября 2017 г. / Исправление: 3 февраля 2018 г. / Принятие: 12 марта 2018 г. / Публикация онлайн: 31 марта 2018 г.

Предложенный в работе [1] метод, использующий средства матричного исчисления и численного интегрирования краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (ОДУ2) с переменными коэффициентами позволяет удерживать произвольное число членов в разложении в ряд Тейлора искомого решения задачи, отказавшись при этом от аппроксимации производных конечными разностями. Известно, что использование конечных разностей приводит ко второму порядку аппроксимации при численном интегрировании краевых задач как для ОДУ2 [2–7], так и для ряда краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных [5–11]. Последнее обусловлено тем, что при аппроксимации производных было удержано всего три члена в разложении в ряд Тейлора искомого решения задачи, или, что то же самое, был использован многочлен Тейлора второй степени. Оценка порядка аппроксимации матричного метода при интегрировании краевых задач для ОДУ2 дана в [12], где показано, что для граничных условий первого, второго и третьего рода порядок аппроксимации пропорционален степени используемого многочлена Тейлора и меньше него на единицу во всех случаях, кроме граничных условий первого рода при четной степени используемого многочлена Тейлора — в этом случае порядок аппроксимации совпадает со степенью многочлена Тейлора.

Поставим целью исследовать возможность использования матричного метода при численном интегрировании краевых задач в области интегрирования $[a, b]$ для ОДУ3

$$s(t)x''' + r(t)x'' + p(t)x' + q(t)x = f(t) \tag{1}$$

с граничными условиями

$$x(a) = \widetilde{x}_0, \quad x'(a) = \widetilde{x}'_0, \quad x(b) = \widetilde{x}_n, \tag{2}$$

где $x(t)$ — искомое решение; $s(t)$, $r(t)$, $p(t)$, $q(t)$, $f(t)$ — заданные функции, дифференцируемые нужное число раз; $\widetilde{x}_0$, $\widetilde{x}'_0$, $\widetilde{x}_n$ — заданные числа, с последующим вычислением порядка аппроксимации разностной краевой задачи в зависимости от используемой степени многочлена Тейлора и числа узлов сетки в шаблоне.

Далее будем придерживаться принятых в [5] обозначений:

1) D — область интегрирования, ограниченная отрезком $[a, b]$; D_h — узлы сетки, определяемые значениями $t_i = t_0 + ih$, $i = 1, 2, \ldots, n$; $t_0 = a$, $t_n = b$, $h = (b - a)/n$, $n + 1$ — число узлов сетки;
2) $x(t)$ — функция, являющаяся точным решением краевой задачи (1), (2);
3) $[x]_h$ — сеточная функция, совпадающая с точным решением в узлах сетки D_h;
4) $x^{(h)}$ — искомая сеточная функция.

Для краткости примем для любой функции обозначение $\varphi(t_i) = \varphi_i$, где t_i — узел сетки D_h.

В дальнейшем опустим индекс h в наименованиях сеточных функций $[x]_h$, $x^{(h)}$ и будем особо оговаривать случаи, в которых используется функция $x(t)$, являющаяся точным решением задачи.

1. Выбор узлов сетки при использовании четырехточечного шаблона. В матричном методе численного интегрирования краевых задач минимальная степень используемого многочлена Тейлора, что соответствует простейшему случаю, совпадает со старшей степенью производной в исследуемом ОДУ [1]; поэтому в начале остановимся на использовании многочленов Тейлора степени $k = 3$.

В соответствии с матричным методом [1] при исследовании краевых задач для ОДУ2 в простейшем случае (при $k = 2$) необходимо составить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), в которую следует внести:

а) два многочлена Тейлора степени $k = 2$, полученных из двух разложений в ряд Тейлора искомого точного решения $x(t)$ в окрестностях слева и справа от некоторого внутреннего узла t_i, $i = 1, 2, \ldots, n - 1$, сетки D_h — последнее приводит к появлению трехточечного шаблона t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, где, как нетрудно заметить, узел t_i является центральным узлом шаблона;

б) исследуемое ОДУ2, записанное в центральном узле t_i шаблона.

Преобразование полученной замкнутой СЛАУ, как показано в [13], приводит к разностному уравнению традиционного метода сеток [5]. Отметим, что в простейшем случае число уравнений в замкнутой СЛАУ на единицу превышает число k.

Наличие старшей производной третьей степени в левой части уравнения (1) указывает на то, что в простейшем случае СЛАУ краевой задачи (1), (2) при построении разностного уравнения должна содержать четыре уравнения с четырьмя неизвестными значениями искомой сеточной функции x, записанными или в узлах t_{i-2}, t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, $i = 2, 3, \ldots, n - 1$, или в узлах t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, $i = 1, 2, \ldots, n - 2$. В указанных двух шаблонах будем использовать три многочлена Тейлора, записанных в окрестностях слева и справа от узла t_i, который в дальнейшем будем называть ведущим узлом шаблона. Первый из указанных выше четырехточечных шаблонов будем далее называть правым (ведущий узел t_i расположен ближе к правой границе шаблона) четырехточечным шаблоном или просто правым шаблоном, второй — левым шаблоном. Добавление ОДУЗ (1), записанного в ведущем узле t_i, к трем многочленам Тейлора замкнет СЛАУ, позволяющую построить разностное уравнение.

Выясним, следует ли отдавать предпочтение тому или иному из двух шаблонов.

Для ведущих узлов t_i, $i = 1, 2, \ldots, n-2$, используем левые шаблоны. После выписывания многочленов Тейлора добавим к ним ОДУЗ (1), записанное в ведущем узле t_i. В итоге получим следующую СЛАУ:

$$\begin{cases} x_i - hx_i' + \dfrac{h^2}{2!}x_i'' - \dfrac{h^3}{3!}x_i''' = x_{i-1}, \\ x_i + hx_i' + \dfrac{h^2}{2!}x_i'' + \dfrac{h^3}{3!}x_i''' = x_{i+1}, \\ x_i + 2hx_i' + 2^2\dfrac{h^2}{2!}x_i'' + 2^3\dfrac{h^3}{3!}x_i''' = x_{i+2}, \\ q_ix_i + p_ix_i' + r_ix_i'' + s_ix_i''' = f_i. \end{cases} \tag{3}$$

В матричной форме система уравнений (3) в обозначениях

$$A^{3i} = \begin{bmatrix} 1 & -h & \frac{h^2}{2!} & -\frac{h^3}{3!} \\ 1 & h & \frac{h^2}{2!} & \frac{h^3}{3!} \\ 1 & 2h & 2^2\frac{h^2}{2!} & 2^3\frac{h^3}{3!} \\ q_i & p_i & r_i & s_i \end{bmatrix}, \quad W^{3i} = \begin{bmatrix} x_i \\ x_i' \\ x_i'' \\ x_i''' \end{bmatrix}, \quad G^{3i} = \begin{bmatrix} x_{i-1} \\ x_{i+1} \\ x_{i+2} \\ f_i \end{bmatrix}$$

имеет вид

$$A^{3i}W^{3i} = G^{3i}.$$

Здесь и далее первый верхний индекс k (сейчас $k = 3$) означает степень используемого многочлена Тейлора P^k, если речь не идет о показателях алгебраических степеней, порядках производных, символах обратных матриц и транспонировании; второй из пары верхних индексов в наименованиях матриц и их элементов означает номер ведущего узла сетки. Матрицы A^{ki}, как и ранее в [12, 13], будем называть локальными матрицами.

Предполагая существование обратной матрицы $B^{3i} = (A^{3i})^{-1}$ от локальной матрицы A^{3i}, найдем $W^{3i} = (A^{3i})^{-1}G^{3i}$, или в координатной форме

$$x_i = b_{11}^{3i}\, x_{i-1} + b_{12}^{3i}\, x_{i+1} + b_{13}^{3i}\, x_{i+2} + b_{14}^{3i}\, f_i, \tag{4}$$

$$x_i' = b_{21}^{3i}\, x_{i-1} + b_{22}^{3i}\, x_{i+1} + b_{23}^{3i}\, x_{i+2} + b_{24}^{3i}\, f_i, \tag{5}$$

$$x_i'' = b_{31}^{3i}\, x_{i-1} + b_{32}^{3i}\, x_{i+1} + b_{33}^{3i}\, x_{i+2} + b_{34}^{3i}\, f_i, \tag{6}$$

$$x_i''' = b_{41}^{3i}\, x_{i-1} + b_{42}^{3i}\, x_{i+1} + b_{43}^{3i}\, x_{i+2} + b_{44}^{3i}\, f_i, \tag{7}$$

где b_{lm}^{3i} — элементы матрицы B^{3i} в ведущем узле t_i.

Выполненные выше действия для узла t_i назовем для краткости процедурой построения (ПП) с использованием левого шаблона.

Из равенств (4) составим систему разностных уравнений

$$-b_{11}^{3i}x_{i-1} + x_i - b_{12}^{3i}x_{i+1} - b_{13}^{3i}x_{i+2} = b_{14}^{3i}f_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n-2, \tag{8}$$

для левого шаблона.

Отметим, что в системе (8) число неизвестных (совпадающее с числом внутренних узлов сетки D_h и поэтому равное $n-1$) на единицу превышает число разностных уравнений (совпадающее с числом ведущих узлов сетки). Однако пока не использовано второе граничное условие $x'(a) = \widetilde{x}'_0$ в (2).

Для замыкания системы (8) в ведущем узле t_1 выполним ПП с использованием левого шаблона, в которой вместо первого по счету многочлена Тейлора для функции x, как это было сделано в (3), запишем многочлен Тейлора для производной x'. Тогда полученная таким образом система

$$\begin{cases} x'_1 - hx''_1 + \dfrac{h^2}{2!}x'''_1 = x'_0, \\ x_1 + hx'_1 + \dfrac{h^2}{2!}x''_1 + \dfrac{h^3}{3!}x'''_1 = x_2, \\ x_1 + 2hx'_1 + 2^2\dfrac{h^2}{2!}x''_1 + 2^3\dfrac{h^3}{3!}x'''_1 = x_3, \\ q_1x_1 + p_1x'_1 + r_1x''_1 + s_1x'''_1 = f_1 \end{cases} \tag{9}$$

позволит построить, с учетом (2), недостающее в (8) разностное уравнение

$$-c^{31}_{11}\widetilde{x}'_0 + x_1 - c^{31}_{12}x_2 - c^{31}_{13}x_3 = c^{31}_{14}f_1,$$

где c^{31}_{lm} — элементы матрицы $C^{31} = (A^{31})^{-1}$; A^{31} — локальная матрица, при построении которой использована система (9).

В итоге получим следующую разностную краевую задачу, которую запишем в компактной символической форме в обозначениях, заимствованных из [5]:

$$L^3_{h,L}x = f^3_{h,L}, \tag{10}$$

где принято

$$L^3_{h,L}x = \begin{cases} \dfrac{x_1}{c^{31}_{14}} - \dfrac{c^{31}_{12}}{c^{31}_{14}}x_2 - \dfrac{c^{31}_{13}}{c^{31}_{14}}x_3, \\ \dfrac{x_1}{b^{31}_{14}} - \dfrac{b^{31}_{12}}{b^{31}_{14}}x_2 - \dfrac{b^{31}_{13}}{b^{31}_{14}}x_3, \\ -\dfrac{b^{3i}_{11}}{b^{3i}_{14}}x_{i-1} + \dfrac{x_i}{b^{3i}_{14}} - \dfrac{b^{3i}_{12}}{b^{3i}_{14}}x_{i+1} - \dfrac{b^{3i}_{13}}{b^{3i}_{14}}x_{i+2}, \quad i = 2, 3, \ldots, n-3, \\ -\dfrac{b^{3(n-2)}_{11}}{b^{3(n-2)}_{14}}x_{n-3} + \dfrac{x_{n-2}}{b^{3(n-2)}_{14}} - \dfrac{b^{3(n-2)}_{12}}{b^{3(n-2)}_{14}}x_{n-1}, \end{cases} \tag{11}$$

$$f^3_{h,L} = \begin{cases} f_1 + \dfrac{c^{31}_{11}}{c^{31}_{14}}\widetilde{x}'_0, \\ f_1 + \dfrac{b^{31}_{11}}{b^{31}_{14}}\widetilde{x}_0, \\ f_i, \quad i = 2, 3, \ldots, n-3, \\ f_{n-2} + \dfrac{b^{3(n-2)}_{13}}{b^{3(n-2)}_{14}}\widetilde{x}_n, \end{cases} \tag{12}$$

а нижний индекс L означает, что были использованы только левые шаблоны.

Решение задачи (10) дает значения искомой сеточной функции x_i во внутренних узлах t_i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, сетки D_h; значения в граничных узлах t_0, t_n определены граничными условиями (2).

Отметим недостатки полученных расчетных формул для левых шаблонов. Во-первых, после нахождения решения задачи (10) равенства (5)–(7) позволяют вычислить производные вплоть до третьего порядка во всех внутренних узлах сетки, кроме узла t_{n-1}, который не являлся ведущим узлом ни разу. Во-вторых, узел t_1 был ведущим дважды, а именно при построении матриц B^{31} и C^{31}, что дублирует формулы для вычисления производных в этом узле.

При использовании в ПП правого шаблона вместо (10)–(12) будет получено
$$L^3_{h,R}x = f^3_{h,R}, \tag{13}$$
где принято
$$L^3_{h,R}x = \begin{cases} -\dfrac{c^{32}_{12}}{c^{32}_{14}}x_1 + \dfrac{x_2}{c^{32}_{14}} - \dfrac{c^{32}_{13}}{c^{32}_{14}}x_3, \\ -\dfrac{b^{32}_{12}}{b^{32}_{14}}x_1 + \dfrac{x_2}{b^{32}_{14}} - \dfrac{b^{32}_{13}}{b^{32}_{14}}x_3, \\ -\dfrac{b^{3i}_{11}}{b^{3i}_{14}}x_{i-2} - \dfrac{b^{3i}_{12}}{b^{3i}_{14}}x_{i-1} + \dfrac{x_i}{b^{3i}_{14}} - \dfrac{b^{3i}_{13}}{b^{3i}_{14}}x_{i+1}, \quad i = 3, 4, \ldots, n-2, \\ -\dfrac{b^{3(n-1)}_{11}}{b^{3(n-1)}_{14}}x_{n-3} - \dfrac{b^{3(n-1)}_{12}}{b^{3(n-1)}_{14}}x_{n-2} + \dfrac{x_{n-1}}{b^{3(n-1)}_{14}}, \end{cases}$$
$$f^3_{h,R} = \begin{cases} f_2 + \dfrac{c^{32}_{11}}{c^{32}_{14}}\widetilde{x}'_0, \\ f_2 + \dfrac{b^{32}_{11}}{b^{32}_{14}}\widetilde{x}_0, \\ f_i, \quad i = 3, 4, \ldots, n-2, \\ f_{n-1} + \dfrac{b^{3(n-1)}_{13}}{b^{3(n-1)}_{14}}\widetilde{x}_n, \end{cases}$$
а нижний индекс R означает, что были использованы только правые шаблоны.

Решение задачи (13) дает значения искомой сеточной функции x_i во внутренних узлах t_i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, сетки D_h; значения в граничных узлах t_0, t_n определены граничными условиями (2).

Полученные расчетные формулы для правых шаблонов обладают теми же недостатками, что и для левых шаблонов. С одной стороны, после нахождения решения задачи (13) равенства (5)–(7) позволяют вычислить производные вплоть до третьего порядка во всех внутренних узлах сетки, кроме узла t_1, который не являлся ведущим узлом ни разу. С другой стороны, узел t_2 был ведущим дважды, а именно при построении матриц B^{32} и C^{32}, что дублирует формулы для вычисления производных в этом узле. Однако ситуацию довольно просто исправить — для этого достаточно вместо C^{32} вычислить матрицу C^{31} в узле t_1 с помощью системы (9), при построении которой выполнена ПП с левым шаблоном, а затем использовать только правые шаблоны. В итоге получим следующую задачу, в которой использован смешанный вариант ПП:

$$L_h^3 x = f_h^3, \tag{14}$$

где принято

$$L_h^3 x = \begin{cases} \dfrac{x_1}{c_{14}^{31}} - \dfrac{c_{12}^{31}}{c_{14}^{31}} x_2 - \dfrac{c_{13}^{31}}{c_{14}^{31}} x_3, \\ -\dfrac{b_{12}^{32}}{b_{14}^{32}} x_1 + \dfrac{x_2}{b_{14}^{32}} - \dfrac{b_{13}^{32}}{b_{14}^{32}} x_3, \\ -\dfrac{b_{11}^{3i}}{b_{14}^{3i}} x_{i-2} - \dfrac{b_{12}^{3i}}{b_{14}^{3i}} x_{i-1} + \dfrac{x_i}{b_{14}^{3i}} - \dfrac{b_{13}^{3i}}{b_{14}^{3i}} x_{i+1}, \quad i = 3, 4, \ldots, n-2, \\ -\dfrac{b_{11}^{3(n-1)}}{b_{14}^{3(n-1)}} x_{n-3} - \dfrac{b_{12}^{3(n-1)}}{b_{14}^{3(n-1)}} x_{n-2} + \dfrac{x_{n-1}}{b_{14}^{3(n-1)}}, \end{cases} \tag{15}$$

$$f_h^3 = \begin{cases} f_1 + \dfrac{c_{11}^{31}}{c_{14}^{31}} \widetilde{x}_0', \\ f_2 + \dfrac{b_{11}^{32}}{b_{14}^{32}} \widetilde{x}_0, \\ f_i, \quad i = 3, 4, \ldots, n-2, \\ f_{n-1} + \dfrac{b_{13}^{3(n-1)}}{b_{14}^{3(n-1)}} \widetilde{x}_n. \end{cases} \tag{16}$$

Очевидно, что для граничных условий вида

$$x(a) = \widetilde{x}_0, \quad x(b) = \widetilde{x}_n, \quad x'(b) = \widetilde{x}_n'$$

сначала следует $(n-2)$ раза использовать левый шаблон, а затем один раз использовать правый шаблон.

Вопрос о влиянии вида шаблона на порядок аппроксимации разностной краевой задачи обсуждается ниже.

2. Численное интегрирование краевых задач для ОДУ3 при использовании четырехточечного шаблона. Исследуем разностную краевую задачу при различных значениях k.

Для некоторого фиксированного $k > 3$, что приведет к увеличению числа слагаемых в многочленах Тейлора, в узле сетки t_1 выполним ПП с использованием левого шаблона лишь с тем отличием от приведенной выше процедуры, что СЛАУ (9) дополним уравнениями

$$\left(q_1 x_1 + p_1 x_1' + r_1 x_1'' + s_1 x_1'''\right)^{(r)} = f_1^{(r)}, \quad r = 1, 2, \ldots, k-3, \tag{17}$$

полученными дифференцированием обеих частей ОДУ3 (1) и записанными в узле t_1; в узлах сетки t_i, $i = 2, 3, \ldots, n-1$ выполним ПП с использованием правого шаблона, дополнив систему вида (3) уравнениями (17), записанными в узлах t_i. В итоге вместо (14)–(16) получим разностную краевую задачу

$$L_h^k x = f_h^k, \tag{18}$$

где принято

$$L_h^k x = \begin{cases} \dfrac{x_1}{c_{14}^{k1}} - \dfrac{c_{12}^{k1}}{c_{14}^{31}} x_2 - \dfrac{c_{13}^{k1}}{c_{14}^{k1}} x_3, \\ -\dfrac{b_{12}^{k2}}{b_{14}^{k2}} x_1 + \dfrac{x_2}{b_{14}^{k2}} - \dfrac{b_{13}^{k2}}{b_{14}^{k2}} x_3, \\ -\dfrac{b_{11}^{ki}}{b_{14}^{ki}} x_{i-2} - \dfrac{b_{12}^{ki}}{b_{14}^{ki}} x_{i-1} + \dfrac{x_i}{b_{14}^{ki}} - \dfrac{b_{13}^{ki}}{b_{14}^{ki}} x_{i+1}, \quad i = 3, 4, \ldots, n-2, \\ -\dfrac{b_{11}^{k(n-1)}}{b_{14}^{k(n-1)}} x_{n-3} - \dfrac{b_{12}^{k(n-1)}}{b_{14}^{k(n-1)}} x_{n-2} + \dfrac{x_{n-1}}{b_{14}^{k(n-1)}}, \end{cases} \tag{19}$$

$$f_h^k = \begin{cases} f_1 + \sum\limits_{m=5}^{k+1} \dfrac{c_{1m}^{k1}}{c_{14}^{k1}} f_1^{(m-4)} + \dfrac{c_{11}^{k1}}{c_{14}^{k1}} \widetilde{x}_0', \\ f_2 + \sum\limits_{m=5}^{k+1} \dfrac{b_{1m}^{k2}}{b_{14}^{k2}} f_2^{(m-4)} + \dfrac{b_{11}^{k2}}{b_{14}^{k2}} \widetilde{x}_0, \\ f_i + \sum\limits_{m=5}^{k+1} \dfrac{b_{1m}^{ki}}{b_{14}^{ki}} f_i^{(m-4)}, \quad i = 3, 4, \ldots, n-2, \\ f_{n-1} + \sum\limits_{m=5}^{k+1} \dfrac{b_{1m}^{k(n-1)}}{b_{14}^{k(n-1)}} f_{n-1}^{(m-4)} + \dfrac{b_{13}^{k(n-1)}}{b_{14}^{k(n-1)}} \widetilde{x}_n, \end{cases} \tag{20}$$

решение которой дает значения искомой сеточной функции x_i во внутренних узлах t_i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, сетки D_h; значения в граничных узлах t_0, t_n определены граничными условиями (2); производные во внутренних узлах t_i могут быть вычислены по формулам

$$x_1^{(l-1)} = c_{l1}^{k1}\, \widetilde{x}_0' + c_{l2}^{k1} x_2 + c_{l3}^{k1} x_3 + c_{l4}^{k1} f_1 + \sum_{m=5}^{k+1} c_{lm}^{k1} f_1^{(m-4)}, \tag{21}$$

$$x_i^{(l-1)} = b_{l1}^{ki} x_{i-2} + b_{l2}^{ki} x_{i-1} + b_{l3}^{ki} x_{i+1} + b_{l4}^{ki} f_i + \sum_{m=5}^{k+1} b_{lm}^{ki} f_i^{(m-4)}, \tag{22}$$

где $l = 2, 3, \ldots, k+1$, $i = 2, 3, \ldots, n-1$.

3. Вычисление порядка аппроксимации разностной краевой задачи при использовании четырехточечного шаблона. Сеточная функция x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, являющаяся решением некоторой разностной краевой задачи, при подстановке в уравнения этой разностной краевой задачи обратит их в верные равенства. В [5] показано, что подстановка в уравнения задачи сеточной функции $[x_i]$, отличающейся от x_i, приведет к некоторому отличию от верных равенств. Эти отличия характеризуются невязкой δf_h^k [5]. Иными словами, подстановка $[x]$ в $L_h^k x = f_h^k$ приведет к равенству

$$L_h^k [x] = f_h^k + \delta f_h^k. \tag{23}$$

В соответствии с [5] в качестве оценки величины невязки примем норму

$$\|\delta f_h^k\| = \max\bigl(|\delta f_{h0}^k|, |\delta f_{h1}^k|, |\delta f_{h2}^k|, \dots, |\delta f_{h,n-1}^k|, |\delta f_{hn}^k|\bigr), \tag{24}$$

где первые две и последняя компоненты характеризуют меры отличий, появление которых обусловлено граничными условиями (2), остальные — оставшимися разностными уравнениями задачи (18). Отметим, что величины невязок $|\delta f_{h0}^k|$, $|\delta f_{hn}^k|$, появление которых обусловлено первым и третьим граничными условиями в (2), как показано в [5], обращаются в нуль.

Согласно [5, 7], разностная краевая задача аппроксимирует дифференциальную краевую задачу на точном решении $x(t)$, если $\|\delta f_h^k\| \to 0$ при $h \to 0$. Если при этом имеет место неравенство $|\delta f_h^k\| \leqslant Ch^k$, где $C > 0, k > 0$ — некоторые постоянные, не зависящие от h, то говорят, что имеет место аппроксимация порядка k относительно величины h.

Вычислим порядок аппроксимации разностной краевой задачи (18).

Исследование рассматриваемой задачи, в которой используем смешанный вариант ПП, начнем с ПП, использующей левый шаблон, т.е. исследуем ведущий узел t_1 для граничного условия $x'(a) = \widetilde{x}'_0$.

При фиксированном $k \geqslant 3$ вместо многочленов Тейлора используем точные равенства

$$\begin{cases} [x'_1] - h[x''_1] + \dfrac{h^2}{2!}[x'''_1] + \dots + (-1)^{k-1}\dfrac{h^{k-1}}{(k-1)!}[x_1^{(k)}] = [x'_0] - R_0^{k-1}, \\ [x_1] + h[x'_1] + \dfrac{h^2}{2!}[x''_1] + \dfrac{h^3}{3!}[x'''_1] + \dots + \dfrac{h^k}{k!}[x_1^{(k)}] = [x_2] - R_2^k, \\ [x_1] + 2h[x'_1] + 2^2\dfrac{h^2}{2!}[x''_1] + 2^3\dfrac{h^3}{3!}[x'''_1] + \dots + 2^k\dfrac{h^k}{k!}[x_1^{(k)}] = [x_3] - R_3^k, \end{cases}$$

где R_0^{k-1}, R_2^k, R_3^k — дополнительные члены разложений в ряд Тейлора в форме Лагранжа [14]:

$$R_i^{k-1} = \frac{h^{k+1}}{(k+1)!}x^{(k+1)}(\xi_i) = O(h^{k+1}), \quad \xi_i \in (t_1, t_3), \quad i = 0, 2, 3.$$

Тогда получим

$$\begin{cases} [x'_1] - h[x''_1] + \dfrac{h^2}{2!}[x'''_1] + \dots + (-1)^{k-1}\dfrac{h^{k-1}}{(k-1)!}[x_1^{(k)}] = [x'_0] - R_0^{k-1}, \\ [x_1] + h[x'_1] + \dfrac{h^2}{2!}[x''_1] + \dfrac{h^3}{3!}[x'''_1] + \dots + \dfrac{h^k}{k!}[x_1^{(k)}] = [x_2] - R_2^k, \\ [x_1] + 2h[x'_1] + 2^2\dfrac{h^2}{2!}[x''_1] + 2^3\dfrac{h^3}{3!}[x'''_1] + \dots + 2^k\dfrac{h^k}{k!}[x_1^{(k)}] = [x_3] - R_3^k, \\ q_1[x_1] + p_1[x'_1] + r_1[x''_1] + s_1[x'''_1] = f_1, \\ q'_1\,[x_1] + (q_1 + p'_1)\,[x'_1] + (p_1 + r'_1)\,[x''_1] + (r_1 + s'_1)\,[x'''_1] + s_1\,[x_1^{(4)}] = f'_1, \\ \dots \\ q_1^{(k-3)}[x_1] + \dots + s_1[x_1^{(k)}] = f_1^{(k-3)}. \end{cases} \tag{25}$$

В матричной форме система (25) в обозначениях

$$A^{k1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -h & \frac{h^2}{2!} & \dots & (-1)^{k-1}\frac{h^{k-1}}{(k-1)!} \\ 1 & h & \frac{h^2}{2!} & \frac{h^3}{3!} & \dots & \frac{h^k}{k!} \\ 1 & 2h & 2^2\frac{h^2}{2!} & 2^3\frac{h^3}{3!} & \dots & 2^k\frac{h^k}{k!} \\ q_1 & p_1 & r_1 & s_1 & \dots & 0 \\ q_1' & q_1+p_1' & p_1+r_1' & r_1+s_1' & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_1^{(k-3)} & \dots & \dots & \dots & \dots & s_1 \end{bmatrix},$$

$$[W^{k1}] = \big[[x_1]\ [x_1']\ [x_1'']\ [x_1''']\ [x_1^{(4)}]\ \dots\ [x_1^{(k)}]\big]^\top,$$
$$[G^{k1}] = \big[[x_0'] - R_0^{k-1}\ \ [x_2]-R_2^k\ \ [x_3]-R_3^k\ \ f_1\ \ f_1'\ \dots\ f_1^{(k-3)}\big]^\top$$

имеет вид

$$A^{k1}[W^{k1}] = [G^{k1}].$$

В предположении существования обратной матрицы $C^{k1} = (A^{k1})^{-1}$ от локальной матрицы A^{k1} найдем $C^{k1}[G^{k1}] = [W^{k1}]$. Выпишем первое уравнение последнего матричного равенства:

$$c_{11}^{k1}\big([x_0'] - R_0^{k-1}\big) + c_{12}^{k1}\big([x_2] - R_2^k\big) + c_{13}^{k1}\big([x_3] - R_3^k\big) + \\ + c_{14}^{k1} f_1 + \sum_{m=5}^{k+1} c_{1m}^{k1} f_1^{(m-4)} = [x_1], \quad (26)$$

где c_{1m}^{k1} — элементы матрицы C^{k1} в узле t_1.

Преобразуем равенство (26) к виду

$$-\frac{c_{11}^{k1}}{c_{14}^{k1}}[x_0'] + \frac{[x_1]}{c_{14}^{k1}} - \frac{c_{12}^{k1}}{c_{14}^{k1}}[x_2] - \frac{c_{13}^{k1}}{c_{14}^{k1}}[x_3] = \\ = f_1 + \sum_{m=5}^{k+1}\frac{c_{1m}^{k1}}{c_{14}^{k1}} f_1^{(m-4)} - \frac{c_{11}^{k1} R_0^{k-1} + c_{12}^{k1} R_2^k + c_{13}^{k1} R_3^k}{c_{14}^{k1}}. \quad (27)$$

Выполняя ПП с использованием правых шаблонов в оставшихся ведущих узлах сетки, получим

$$-\frac{b_{11}^{ki}}{b_{14}^{ki}}[x_{i-2}] - \frac{b_{12}^{ki}}{b_{14}^{ki}}[x_{i-1}] + \frac{[x_i]}{b_{14}^{ki}} - \frac{b_{13}^{ki}}{b_{14}^{ki}}[x_{i+1}] = f_i + \sum_{m=5}^{k+1}\frac{b_{1m}^{ki}}{b_{14}^{ki}} f_i^{(m-4)} - \\ - \frac{b_{11}^{ki}R_{i-2}^k + b_{12}^{ki}R_{i-1}^k + b_{13}^{ki}R_{i+1}^k}{b_{14}^{ki}}, \quad i = 2, 3, \dots, n-1. \quad (28)$$

Равенства (27), (28) с учетом граничных условий (2) преобразуем к виду

$$\frac{[x_1]}{c_{14}^{k1}} - \frac{c_{12}^{k1}}{c_{14}^{k1}}[x_2] - \frac{c_{13}^{k1}}{c_{14}^{k1}}[x_3] = \\ = f_1 + \sum_{m=5}^{k+1} \frac{c_{1m}^{k1}}{c_{14}^{k1}} f_1^{(m-4)} + \frac{c_{11}^{k1}}{c_{14}^{k1}} \widetilde{x}_0' - \frac{c_{11}^{k1} R_0^{k-1} + c_{12}^{k1} R_2^k + c_{13}^{k1} R_3^k}{c_{14}^{k1}}, \quad (29)$$

$$-\frac{b_{12}^{k2}}{b_{14}^{k2}}[x_1] + \frac{[x_2]}{b_{14}^{k2}} - \frac{b_{13}^{k2}}{b_{14}^{k2}}[x_3] = \\ = f_2 + \sum_{m=5}^{k+1} \frac{b_{1m}^{k2}}{b_{14}^{k2}} f_2^{(m-4)} + \frac{b_{11}^{k2}}{b_{14}^{k2}} \widetilde{x}_0 - \frac{b_{11}^{k2} R_0^k + b_{12}^{k2} R_1^k + b_{13}^{k2} R_3^k}{b_{14}^{k2}}, \quad (30)$$

$$-\frac{b_{11}^{ki}}{b_{14}^{ki}}[x_{i-2}] - \frac{b_{12}^{ki}}{b_{14}^{ki}}[x_{i-1}] + \frac{[x_i]}{b_{14}^{ki}} - \frac{b_{13}^{ki}}{b_{14}^{ki}}[x_{i+1}] = f_i + \sum_{m=5}^{k+1} \frac{b_{1m}^{ki}}{b_{14}^{ki}} f_i^{(m-4)} - \\ - \frac{b_{11}^{ki} R_{i-2}^k + b_{12}^{ki} R_{i-1}^k + b_{13}^{ki} R_{i+1}^k}{b_{14}^{ki}}, \quad i = 3, 4, \ldots, n-2, \quad (31)$$

$$-\frac{b_{11}^{k(n-1)}}{b_{14}^{k(n-1)}}[x_{n-3}] - \frac{b_{12}^{k(n-1)}}{b_{14}^{k(n-1)}}[x_{n-2}] + \frac{[x_{n-1}]}{b_{14}^{k(n-1)}} = f_{n-1} + \sum_{m=5}^{k+1} \frac{b_{1m}^{k(n-1)}}{b_{14}^{k(n-1)}} f_{n-1}^{(m-4)} + \\ + \frac{b_{13}^{k(n-1)}}{b_{14}^{k(n-1)}} \widetilde{x}_n - \frac{b_{11}^{k(n-1)} R_{n-3}^k + b_{12}^{k(n-1)} R_{n-2}^k + b_{13}^{k(n-1)} R_n^k}{b_{14}^{k(n-1)}}. \quad (32)$$

Отбрасывание последних дробей в равенствах (29)–(32), что равносильно переходу от точного решения $[x_i]$ к искомому приближенному x_i, приведет эти равенства к уравнениям разностной краевой задачи (18)–(20). Следовательно, в соответствии с (23), последние дроби в равенствах (29)–(32) характеризуют величину невязки в уравнениях задачи, при построении которых были использованы ведущие узлы t_i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. В итоге для рассматриваемой задачи имеем

$$\delta f_h^k = \begin{cases} -\dfrac{c_{11}^{k1} R_0^{k-1} + c_{12}^{k1} R_2^k + c_{13}^{k1} R_3^k}{c_{14}^{k1}}, \\ -\dfrac{b_{11}^{k2} R_0^k + b_{12}^{k2} R_1^k + b_{13}^{k2} R_3^k}{b_{14}^{k2}}, \\ -\dfrac{b_{11}^{ki} R_{i-2}^k + b_{12}^{ki} R_{i-1}^k + b_{13}^{ki} R_{i+1}^k}{b_{14}^{ki}}, \quad i = 3, 4, \ldots, n-2, \\ -\dfrac{b_{11}^{k(n-1)} R_{n-3}^k + b_{12}^{k(n-1)} R_{n-2}^k + b_{13}^{k(n-1)} R_n^k}{b_{14}^{k(n-1)}}, \end{cases}$$

или

$$\delta f_h^k = \begin{cases} -\dfrac{c_{11}^{k1}R_0^{k-1} + c_{12}^{k1}R_2^k + c_{13}^{k1}R_3^k}{c_{14}^{k1}}, \\ -\dfrac{b_{11}^{ki}R_{i-2}^k + b_{12}^{ki}R_{i-1}^k + b_{13}^{ki}R_{i+1}^k}{b_{14}^{ki}}, \quad i = 2, 3, \ldots, n-1, \end{cases} \tag{33}$$

где, напомним, первая компонента характеризует величину невязки, появление которой обусловлено вторым граничным условием в (2).

Непосредственными вычислениями можно для любого $k > 3$ убедиться в справедливости оценок

$$M_{1j}^{ki} \approx (s_i)^{k-1} M_{1j}^{3i}, \quad i = 2, 3, \ldots, n-1, \quad j = 1, 2, 3, 4, \tag{34}$$

где M_{1j}^{ki} — алгебраическое дополнение элемента a_{1j}^{ki} матрицы $(A^{ki})^\top$, полученной ПП, использующей правый шаблон. Воспользуемся в дальнейшем известными свойствами определителя [15]. Действительно, пренебрегая старшими степенями, например при $j = 1$, имеем

$$M_{11}^{ki} = \begin{vmatrix} -h & h & p_i & q_i + p_i' & \ldots & u_i \\ \frac{h^2}{2!} & \frac{h^2}{2!} & r_i & p_i + r_i' & \ldots & v_i \\ -\frac{h^3}{3!} & \frac{h^3}{3!} & s_i & r_i + s_i' & \ldots & w_i \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (-1)^{k-1}\frac{h^{k-1}}{(k-1)!} & \frac{h^{k-1}}{(k-1)!} & 0 & 0 & \ldots & z_i \\ (-1)^k\frac{h^k}{k!} & \frac{h^k}{k!} & 0 & 0 & \ldots & s_i \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{h^k}{k!}\left(\sum_{m=1}^{k-1} b_m h^m + (-1)^{k+1}\sum_{m=1}^{k-1} c_m h^m\right) + s_i M_{11}^{(k-1)i} \approx s_i M_{11}^{(k-1)i},$$

где b_m, c_m — коэффициенты, не зависящие от h; u_i, v_i, w_i, z_i — некоторые функции от q_i, p_i, r_i, s_i и их производных. Повторное неоднократное использование последней формулы приводит к (34) при $j = 1$.

Аналогично доказывается справедливость оценок (34) при $j = 2, 3$.

Рассмотрим M_{14}^{ki}:

$$M_{14}^{ki} = -\begin{vmatrix} -2h & -h & h & q_i + p_i' & \ldots & u_i \\ 2^2\frac{h^2}{2!} & \frac{h^2}{2!} & \frac{h^2}{2!} & p_i + r_i' & \ldots & v_i \\ -2^3\frac{h^3}{3!} & -\frac{h^3}{3!} & \frac{h^3}{3!} & r_i + s_i' & \ldots & w_i \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ (-2)^{k-1}\frac{h^{k-1}}{(k-1)!} & (-1)^{k-1}\frac{h^{k-1}}{(k-1)!} & \frac{h^{k-1}}{(k-1)!} & 0 & \ldots & z_i \\ (-2)^k\frac{h^k}{k!} & (-1)^k\frac{h^k}{k!} & \frac{h^k}{k!} & 0 & \ldots & s_i \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{h^k}{k!}\left(-2^k\sum_{m=3}^{2k-3} b_m h^m + \sum_{m=3}^{2k-3} c_m h^m - (-1)^k\sum_{m=3}^{2k-3} d_m h^m\right) + s_i M_{14}^{(k-1)i} \approx s_i M_{14}^{(k-1)i},$$

где b_m, c_m, d_m — коэффициенты, не зависящие от h. Повторное неоднократное использование последней формулы приводит к (34) при $j = 4$.

На основании оценок (34) и очевидных равенств

$$\frac{b_{1j}^{ki}}{b_{14}^{ki}} = \frac{M_{1j}^{ki}}{M_{14}^{ki}}, \quad j = 1, 2, 3$$

имеем

$$\frac{b_{1j}^{ki}}{b_{14}^{ki}} \approx \frac{M_{1j}^{3i}}{M_{14}^{3i}}, \quad i = 2, 3, \ldots, n-1, \quad j = 1, 2, 3. \tag{35}$$

Вывод оценок

$$\frac{c_{1j}^{k1}}{c_{14}^{k1}} \approx \frac{M_{1j}^{31}}{M_{14}^{31}}, \quad j = 1, 2, 3, \tag{36}$$

где M_{1j}^{31}, $j = 1, 2, 3, 4$ — алгебраическое дополнение элемента a_{1j}^{31} матрицы $(A^{31})^\top$, полученной ПП, использующей левый шаблон, для ведущего узла t_1 оказался аналогичным выводу формул (35).

Невязка (33), с учетом оценок (35), (36) примет вид

$$\delta f_h^k = \begin{cases} \delta f_{h1}^k, \\ \delta f_{hi}^k, \quad i = 2, 3, \ldots, n-1 \end{cases} = \begin{cases} -\dfrac{M_{11}^{31}\, R_0^{k-1} + M_{12}^{31} R_2^k + M_{13}^{31} R_3^k}{M_{14}^{31}}, \\ -\dfrac{M_{11}^{3i} R_{i-2}^k + M_{12}^{3i} R_{i-1}^k + M_{13}^{3i} R_{i+1}^k}{M_{14}^{3i}}. \end{cases} \tag{37}$$

Вычислим оценки M_{1j}^{3i}, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, $j = 1, 2, 3, 4$. Пренебрегая старшими степенями, для $i = 1$ имеем

$$M_{11}^{31} = \begin{vmatrix} h & 2h & p_1 \\ \frac{h^2}{2!} & \frac{2^2h^2}{2!} & r_1 \\ \frac{h^3}{3!} & \frac{2^3h^3}{3!} & s_1 \end{vmatrix} = s_1 h^3 - r_1 h^4 + p_1 \frac{h^5}{3!} \approx s_1 h^3, \tag{38}$$

$$M_{12}^{31} = -4 s_1 h^2 + r_1 \frac{h^3}{3} + \frac{7}{3} p_1 h^4 \approx -4 s_1 h^2, \tag{39}$$

$$M_{13}^{31} = \frac{3}{2} s_1 h^2 + r_1 \frac{h^3}{3} - \frac{5}{12} p_1 h^4 \approx \frac{3}{2} s_1 h^2, \quad M_{14}^{31} = \frac{11}{6} h^5; \tag{40}$$

и для $i = 2, 3, \ldots, n-1$:

$$M_{11}^{3i} = \begin{vmatrix} -h & h & p_i \\ \frac{h^2}{2!} & \frac{h^2}{2!} & r_i \\ -\frac{h^3}{3!} & \frac{h^3}{3!} & s_i \end{vmatrix} = -s_i h^3 + p_i \frac{h^5}{3!} \approx -s_i h^3, \tag{41}$$

$$M_{12}^{3i} = 3 s_i h^3 + r_i h^4 + p_i h^5 \approx 3 s_i h^3, \tag{42}$$

$$M_{13}^{3i} = s_i h^3 + r_i h^4 + p_i \frac{h^5}{3} \approx s_i h^3, \quad M_{14}^{3i} = -h^6. \tag{43}$$

Вычислим невязки (37). Используя оценки (38)–(40), для ведущего узла t_1 найдем

$$\delta f_{h1}^k = -\frac{M_{11}^{31}R_0^{k-1} + M_{12}^{31}R_2^k + M_{13}^{31}R_3^k}{M_{14}^{31}} \approx$$
$$\approx -\frac{3\left(2s_1h^3R_0^{k-1} - 8s_1h^2R_2^k + 3s_1h^2R_3^k\right)}{11h^5} =$$
$$= -\frac{6s_1O(h^k)}{11h^2} - \frac{-24s_1O(h^{k+1}) + 9s_1O(h^{k+1})}{11h^3} =$$
$$= O(h^{k-2}) + O(h^{k-2}) + O(h^{k-2}) = O(h^{k-2}) \quad (44)$$

и, используя оценки (41)–(43), для ведущих узлов t_i, $i = 2, 3, \dots, n-1$ найдем

$$\delta f_{hi}^k = -\frac{M_{11}^{3i}R_{i-2}^k + M_{12}^{3i}R_{i-1}^k + M_{13}^{3i}R_{i+1}^k}{M_{14}^{3i}} \approx$$
$$\approx -\frac{-s_ih^3R_{i-2}^k + 3s_ih^3R_{i-1}^k + s_ih^3R_{i+1}^k}{-h^6} =$$
$$= \frac{-s_iO(h^{k+1}) + 3s_iO(h^{k+1}) + s_iO(h^{k+1})}{h^3} =$$
$$= O(h^{k-2}) + (h^{k-2}) + O(h^{k-2}) = O(h^{k-2}). \quad (45)$$

В итоге в соответствии с (24) из оценок (44), (45) для рассматриваемой задачи имеем

$$\|\delta f_h^k\| = O(h^{k-2}),$$

откуда следует, что порядок аппроксимации пропорционален степени используемого многочлена Тейлора и меньше нее на две единицы независимо от четности k, в отличие от ОДУ2 с граничными условиями первого рода [12], где порядок аппроксимации задачи оказался зависимым от четности k.

При исследовании в [12] краевых задач для ОДУ2 с граничными условиями второго и третьего рода оказалось, что именно наличие производной в граничных условиях понизило на единицу порядок аппроксимации всей задачи, чего не оказалось в рассмотренном выше случае, как это следует из оценок (44), (45).

Путем непосредственных вычислений можно убедиться в справедливости

а) оценок (35) для левого шаблона и оценок (36) для правого шаблона;

б) оценок (38)–(43) с точностью до постоянного сомножителя для указанных выше шаблонов.

Следствием этого является независимость порядка аппроксимации разностной краевой задачи (1), (2) от выбора формы четырехточечного шаблона.

4. Численное интегрирование краевых задач для ОДУ3 при использовании пятиточечного шаблона. Выше исследована возможность численного интегрирования матричным методом [1] краевых задач для линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка с переменными коэффициентами (1) с граничными условиями (2). Установлен порядок аппроксимации метода при использовании в нем четырехточечного шаблона.

Поставим целью исследование возможности численного интегрирования матричным методом краевых задач для ОДУ3 при использовании пятиточечного шаблона с последующим вычислением порядка аппроксимации в зависимости от степени k многочлена Тейлора.

Решение остановиться на пятиточечном шаблоне связано лишь с тем, что производные третьего порядка, вычисленные с помощью отношения центральных разностей (что соответствует пятиточечному шаблону), имеют второй порядок аппроксимации относительно шага h, тогда как вычисленные с помощью отношения конечных разностей слева и справа (что соответствует четырехточечному шаблону) — первый порядок [6].

В соответствии с матричным методом составим СЛАУ для пятиточечного шаблона t_{i-2}, t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, $i = 2, 3, \ldots, n-2$, в которую при фиксированном $k \geqslant 4$ внесем:

а) четыре многочлена Тейлора степени k, полученных из четырех разложений в ряд Тейлора искомого точного решения $x(t)$ в окрестностях слева и справа от некоторого внутреннего узла t_i (центрального узла шаблона), $i = 2, 3, \ldots, n-2$, сетки D_h;

б) уравнения

$$\left(q_i x_i + p_i x_i' + r_i x_i'' + s_i x_i'''\right)^{(r)} = f_i^{(r)}, \quad r = 0, 1, \ldots, k-4,$$

полученные дифференцированием обеих частей ОДУ3 (1) и записанные в узле t_i.

В итоге получим СЛАУ

$$\begin{cases} x_i - 2hx_i' + 2^2\dfrac{h^2}{2!}x_i'' - 2^3\dfrac{h^3}{3!}x_i''' + \cdots + (-2)^k\dfrac{h^k}{k!}x_i^{(k)} = x_{i-2}, \\ x_i - hx_i' + \dfrac{h^2}{2!}x_i'' - \dfrac{h^3}{3!}x_i''' + \cdots + (-1)^k\dfrac{h^k}{k!}x_i^{(k)} = x_{i-1}, \\ x_i + hx_i' + \dfrac{h^2}{2!}x_i'' + \dfrac{h^3}{3!}x_i''' + \cdots + \dfrac{h^k}{k!}x_i^{(k)} = x_{i+1}, \\ x_i + 2hx_i' + 2^2\dfrac{h^2}{2!}x_i'' + 2^3\dfrac{h^3}{3!}x_i''' + \cdots + 2^k\dfrac{h^k}{k!}x_i^{(k)} = x_{i+2}, \\ q_i x_i + p_i x_i' + r_i x_i'' + s_i x_i''' = f_i, \\ q_i' x_i + (p_i' + q_i)x_i' + (r_i' + p_i)x_i'' + (s_i' + r)x_i''' + s_i x_i^{(IV)} = f_i', \\ \ldots \\ q_i^{(k-4)} x_i + \cdots + s_i x_i^{(k-1)} = f_i^{(k-4)}. \end{cases} \tag{46}$$

В матричной форме система уравнений (46) в обозначениях

$$A^{ki} = \begin{bmatrix} 1 & -2h & 2^2\frac{h^2}{2!} & (-2)^3\frac{h^3}{3!} & \dots & (-2)^k\dfrac{h^k}{k!} \\ 1 & -h & \frac{h^2}{2!} & -\frac{h^3}{3!} & \dots & (-1)^k\dfrac{h^k}{k!} \\ 1 & h & \frac{h^2}{2!} & \frac{h^3}{3!} & \dots & \dfrac{h^k}{k!} \\ 1 & 2h & 2^2\frac{h^2}{2!} & 2^3\frac{h^3}{3!} & \dots & 2^k\dfrac{h^k}{k!} \\ q_i & p_i & r_i & s_i & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_i^{(k-3)} & \dots & \dots & \dots & \dots & s_i \end{bmatrix}, \tag{47}$$

$$W^{ki} = \left[x_i \; x_i' \; x_i'' \; x_i''' \; \dots \; x_i^{(k)}\right]^\top,$$
$$G^{ki} = \left[x_{i-2} \; x_{i-1} \; x_{i+1} \; x_{i+2} \; f_i \; f_i' \; f_i'' \; \dots \; f_i^{(k-4)}\right]^\top.$$

имеет вид

$$A^{ki}W^{ki} = G^{ki}.$$

Здесь и далее второй из пары верхних индексов в наименованиях матриц и их элементов означает номер центрального узла пятиточечного шаблона.

Предполагая существование обратной матрицы $B^{ki} = (A^{ki})^{-1}$ от локальной матрицы A^{ki}, найдем $W^{ki} = (A^{ki})^{-1}\,G^{ki}$, или в координатной форме $(i = 2, 3, \dots, n-2)$

$$x_i = b_{11}^{ki}x_{i-2} + b_{12}^{ki}x_{i-1} + b_{13}^{ki}x_{i+1} + b_{14}^{ki}x_{i+2} + b_{15}^{ki}f_i + \sum_{m=6}^{k+1} b_{1m}^{ki}f_i^{(m-5)}, \tag{48}$$

$$x_i' = b_{21}^{ki}x_{i-2} + b_{22}^{ki}x_{i-1} + b_{23}^{ki}x_{i+1} + b_{24}^{ki}x_{i+2} + b_{25}^{ki}f_i + \sum_{m=6}^{k+1} b_{2m}^{ki}f_i^{(m-5)}, \tag{49}$$

$$x_i'' = b_{31}^{ki}x_{i-2} + b_{32}^{ki}x_{i-1} + b_{33}^{ki}x_{i+1} + b_{34}^{ki}x_{i+2} + b_{35}^{ki}f_i + \sum_{m=6}^{k+1} b_{3m}^{ki}f_i^{(m-5)}, \tag{50}$$

$$\dots$$

$$x_i^{(k)} = b_{(k+1)1}^{ki}x_{i-2} + b_{(k+1)2}^{ki}x_{i-1} + b_{(k+1)3}^{ki}x_{i+1} +$$
$$+ b_{(k+1)4}^{ki}x_{i+2} + b_{(k+1)5}^{ki}f_i + \sum_{m=6}^{k+1} b_{(k+1)m}^{ki}f_i^{(m-5)}, \tag{51}$$

где b_{lm}^{ki} — элементы матрицы B^{ki} в узле t_i.

Из равенств (48), которые являются разностными уравнениями для пятиточечного шаблона t_{i-2}, t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, составим СЛАУ и запишем ее в компактной символической форме:

$$L_h^k x = f_h^k, \tag{52}$$

где

$$L_h^k x = \begin{cases} -\dfrac{b_{12}^{k2}}{b_{15}^{k2}}x_1 + \dfrac{x_2}{b_{15}^{k2}} - \dfrac{b_{13}^{k2}}{b_{15}^{k2}}x_3 - \dfrac{b_{14}^{k2}}{b_{15}^{k2}}x_4, \\ -\dfrac{b_{11}^{ki}}{b_{15}^{ki}}x_{i-2} - \dfrac{b_{12}^{ki}}{b_{15}^{ki}}x_{i-1} + \dfrac{x_i}{b_{15}^{ki}} - \dfrac{b_{13}^{ki}}{b_{15}^{ki}}x_{i+1} - \dfrac{b_{14}^{ki}}{b_{15}^{ki}}x_{i+2}, \quad i = 3, 4, \ldots, n-3, \\ -\dfrac{b_{11}^{k(n-2)}}{b_{15}^{k(n-2)}}x_{n-4} - \dfrac{b_{12}^{k(n-2)}}{b_{15}^{k(n-2)}}x_{n-3} + \dfrac{x_{n-2}}{b_{15}^{k(n-2)}} - \dfrac{b_{13}^{k(n-2)}}{b_{15}^{k(n-2)}}x_{n-1}, \end{cases} \tag{53}$$

$$f_h^k = \begin{cases} f_2 + \sum\limits_{m=6}^{k+1} \dfrac{b_{1m}^{k2}}{b_{15}^{k2}} f_2^{(m-5)} + \dfrac{b_{11}^{k2}}{b_{15}^{k2}}\widetilde{x}_0, \\ f_i + \sum\limits_{m=6}^{k+1} \dfrac{b_{1m}^{ki}}{b_{15}^{ki}} f_i^{(m-5)}, \quad i = 3, 4, \ldots, n-3, \\ f_{n-2} + \sum\limits_{m=6}^{k+1} \dfrac{b_{1m}^{k(n-2)}}{b_{15}^{k(n-2)}} f_{n-2}^{(m-5)} + \dfrac{b_{14}^{k(n-2)}}{b_{15}^{k(n-2)}}\widetilde{x}_n. \end{cases} \tag{54}$$

Задачу (52) для краткости будем далее обозначать как L_h^k.

Отметим, что разностная краевая задача (52) содержит $(n-3)$ уравнения с $(n-1)$ неизвестными, т.е. для замыкания системы необходимо составить еще два уравнения. В [5] для оценки порядка аппроксимации обоснована целесообразность разбиения разностной краевой задачи на подзадачи (подсистемы); поэтому в отдельные подзадачи выделим систему (52) и систему, содержащую недостающие два уравнения, а затем отдельно вычислим порядки аппроксимации каждой из этих двух подзадач.

Для учета граничного условия $x'(a) = \widetilde{x}'_0$ сохраним все приведенные выше выкладки для задачи (52) с тем лишь отличием, что при составлении СЛАУ вместо первого приближенного равенства в (46) при $i = 2$ используем следующий многочлен:

$$x'_2 - 2hx''_2 + 2^2\frac{h^2}{2!}x'''_2 + \cdots + (-2)^{k-1}\frac{h^{k-1}}{(k-1)!}x_2^{(k)} = x'_0. \tag{55}$$

Для составления второго недостающего уравнения задачи L_h^k сформируем фиктивное граничное условие в узле t_0 следующим образом. Из точного равенства

$$s_0x'''_0 + r_0x''_0 + p_0x'_0 + q_0x_0 = f_0$$

найдем

$$s_0x'''_0 + r_0x''_0 = f_0 - p_0x'_0 - q_0x_0 = X_0, \tag{56}$$

где число X_0 может быть вычислено с использованием первых двух равенств граничных условий (2). Равенство (56) будем трактовать как фиктивное граничное условие в узле t_0.

Имеем следующие многочлены Тейлора:

$$x_2'' - 2hx_2''' + 2^2\frac{h^2}{2!}x_2^{(IV)} + \dots + (-2)^{k-2}\frac{h^{k-2}}{(k-2)!}x_2^{(k)} = x_0'', \tag{57}$$

$$x_2''' - 2hx_2^{(IV)} + 2^2\frac{h^2}{2!}x_2^{(V)} + \dots + (-2)^{k-3}\frac{h^{k-3}}{(k-3)!}x_2^{(k)} = x_0'''. \tag{58}$$

Умножая обе части многочлена (57) на r_0, многочлена (58) — на s_0 и складывая полученное, с учетом (56) получим фиктивное граничное условие:

$$r_0x_2'' + (s_0 - 2hr_0)x_2''' + \dots + (-1)^{k-1}\Big(s_0\frac{(2h)^{k-3}}{(k-3)!} - r_0\frac{(2h)^{k-2}}{(k-2)!}\Big)x_2^{(k)} = X_0. \tag{59}$$

Для учета фиктивного граничного условия (56) сохраним все приведенные выше выкладки для задачи (52) с тем лишь отличием, что в СЛАУ (46) при $i = 2$ вместо первого приближенного равенства используем соотношение (59). Указанные действия позволяют сформировать последнее недостающее разностное уравнение.

В итоге вторую подзадачу в компактной символической форме запишем как

$$l_h^k x = g_h^k, \tag{60}$$

где

$$l_h^k x = \begin{cases} -\dfrac{c_{12}^{k2}}{c_{15}^{k2}}x_1 + \dfrac{x_2}{c_{15}^{k2}} - \dfrac{c_{13}^{k2}}{c_{15}^{k2}}x_3 - \dfrac{c_{14}^{k2}}{c_{15}^{k2}}x_4, \\ -\dfrac{d_{12}^{k2}}{d_{15}^{k2}}x_1 + \dfrac{x_2}{d_{15}^{k2}} - \dfrac{d_{13}^{k2}}{d_{15}^{k2}}x_3 - \dfrac{d_{14}^{k2}}{d_{15}^{k2}}x_4, \end{cases} \tag{61}$$

$$g_h^k = \begin{cases} f_2 + \displaystyle\sum_{m=6}^{k+1}\frac{c_{1m}^{k2}}{c_{15}^{k2}}f_2^{(m-5)} + \frac{c_{11}^{k2}}{c_{15}^{k2}}\widetilde{x}_0', \\ f_2 + \displaystyle\sum_{m=6}^{k+1}\frac{d_{1m}^{k2}}{d_{15}^{k2}}f_2^{(m-5)} + \frac{d_{11}^{k2}}{d_{15}^{k2}}X_0. \end{cases} \tag{62}$$

Здесь c_{1m}^{k2} — элементы обратной матрицы от матрицы СЛАУ (46) при $i = 2$, которая вычислена для граничного условия $x'(a) = \widetilde{x}_0'$; d_{1m}^{k2} — элементы обратной матрицы от матрицы СЛАУ (46) при $i = 2$, которая вычислена для фиктивного граничного условия (59).

Решение разностной краевой задачи (52), (60) дает значения искомой сеточной функции x_i во внутренних узлах t_i, $i = 1, 2, \dots, n-1$, сетки D_h; значения в граничных узлах t_0, t_n определены граничными условиями (2); равенства (49)–(51) позволят при найденных x_i вычислить производные вплоть до порядка k в узлах t_i, $i = 2, 3, \dots, n-2$.

5. Вычисление порядка аппроксимации разностной краевой задачи при использовании пятиточечного шаблона. Вычислим порядок аппроксимации разностной краевой задачи (52), (60).

Для оценки величины невязки задачи (52) в соответствии с [5] примем норму

$$\|\delta f_h^k\| = \max\bigl(|\delta f_{h2}^k|, |\delta f_{h3}^k|, \ldots, |\delta f_{h,n-2}^k|\bigr),$$

где компонента, второй нижний индекс которой, совпадающий с номером центрального узла шаблона, характеризует меру отличий, появление которой обусловлено уравнением задачи (52) с номером на единицу меньше этого второго нижнего индекса. Для задачи (60) — норму

$$\|\delta g_h^k\| = \max\bigl(|\delta g_{hc}^k|, |\delta g_{hd}^k|\bigr), \tag{63}$$

где нижний индекс c означает принадлежность компоненты к первому уравнению задачи (60), нижний индекс d — ко второму уравнению. Первая компонента характеризует меру отличий, появление которой обусловлено вторым граничным условием в (2), вторая — фиктивным граничным условием (59).

Норму всей разностной краевой задачи (52), (60) в соответствии с [5] запишем как

$$\|\delta f\| = \max\bigl(\|\delta f_h^k\|, \|\delta g_h^k\|\bigr). \tag{64}$$

Исследуем задачу (52). При фиксированном $k \geqslant 4$ сохраним все приведенные выше выкладки для задачи (52) с тем лишь отличием, что в СЛАУ (46) вместо четырех первых приближенных равенств используем точные равенства

$$\begin{cases} [x_i] - 2h[x_i'] + 2^2\dfrac{h^2}{2!}[x_i''] - 2^3\dfrac{h^3}{3!}[x_i'''] + \cdots + (-2)^k\dfrac{h^k}{k!}[x_i^{(k)}] = [x_{i-2}] - R_{i-2}^k, \\[2ex] [x_i] - h[x_i] + \dfrac{h^2}{2!}[x_i] - \dfrac{h^3}{3!}[x_i'''] + \cdots + (-1)^k\dfrac{h^k}{k!}[x_i^{(k)}] = [x_{i-1}] - R_{i-1}^k, \\[2ex] [x_i] + h[x_i'] + \dfrac{h^2}{2!}[x_i''] + \dfrac{h^3}{3!}[x_i'''] + \cdots + \dfrac{h^k}{k!}[x_i^{(k)}] = [x_{i+1}] - R_{i+1}^k, \\[2ex] [x_i] + 2h[x_i'] + 2^2\dfrac{h^2}{2!}[x_i''] + 2^3\dfrac{h^3}{3!}[x_i'''] + \cdots + 2^k\dfrac{h^k}{k!}[x_i^{(k)}] = [x_{i+2}] - R_{i+2}^k, \end{cases} \tag{65}$$

где R_{i-2}^k, R_{i-1}^k, R_{i+1}^k, R_{i+2}^k — дополнительные члены разложений в ряд Тейлора в форме Лагранжа [14]:

$$R_j^k = \frac{h^{k+1}}{(k+1)!}x^{(k+1)}(\xi_j) = O(h^{k+1}), \quad \xi_j \in (t_i, t_{i+2}), \ \ j = i-2, i-1, i+1, i+2.$$

В итоге вместо (52) получим задачу (23), в которой левая часть сохранит вид (53) с заменой искомой сеточной функции x_i на $[x_i]$, а вместо (54) получим

$$f_h^k + \delta f_h^k = \begin{cases} f_2 + \displaystyle\sum_{m=6}^{k+1} \frac{b_{1m}^{k2}}{b_{15}^{k2}}\, f_2^{(m-5)} + \frac{b_{11}^{k2}}{b_{15}^{k2}}\widetilde{x}_0 + \delta f_{h2}^k, \\ f_i + \displaystyle\sum_{m=6}^{k+1} \frac{b_{1m}^{ki}}{b_{15}^{ki}}\, f_i^{(m-5)} + \delta f_{hi}^k, \quad i = 3, 4, \ldots, n-3, \\ f_{n-2} + \displaystyle\sum_{m=6}^{k+1} \frac{b_{1m}^{k(n-2)}}{b_{15}^{k(n-2)}}\, f_{n-2}^{(m-5)} + \frac{b_{14}^{k(n-2)}}{b_{15}^{k(n-2)}}\widetilde{x}_n + \delta f_{h(n-2)}^k, \end{cases}$$

где

$$\delta f_h^k = \begin{cases} -\dfrac{b_{11}^{k2} R_0^k + b_{12}^{k2} R_1^k + b_{13}^{k2} R_3^k + b_{14}^{k2} R_4^k}{b_{15}^{k2}}, \\ -\dfrac{b_{11}^{ki} R_{i-2}^k + b_{12}^{ki} R_{i-1}^k + b_{13}^{ki} R_{i+1}^k + b_{14}^{ki} R_{i+2}^k}{b_{15}^{ki}}, \quad i = 3, 4, \ldots, n-3, \\ -\dfrac{b_{11}^{k(n-2)} R_{n-4}^k + b_{12}^{k(n-2)} R_{n-3}^k + b_{13}^{k(n-2)} R_{n-1}^k + b_{14}^{k(n-2)} R_n^k}{b_{15}^{k(n-2)}}, \end{cases}$$

или

$$\delta f_h^k = -\frac{b_{11}^{ki} R_{i-2}^k + b_{12}^{ki} R_{i-1}^k + b_{13}^{ki} R_{i+1}^k + b_{14}^{ki} R_{i+2}^k}{b_{15}^{ki}}, \quad i = 2, 3, \ldots, n-2. \tag{66}$$

Исследуем задачу (60). При фиксированном $k \geqslant 4$ сохраним все приведенные выше выкладки для задачи (60) с тем лишь отличием, что в СЛАУ (46) вместо второго, третьего, четвертого приближенных равенств используем второе, третье, четвертое точные равенства (65), а вместо первого и второго приближенных равенств используем следующее:

а) при построении первого уравнения задачи (60) — точное равенство с учетом второго граничного условия в (2) вида

$$[x_2'] - h[x_2''] + \frac{h^2}{2!}[x_2'''] + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{h^{k-1}}{(k-1)!}[x_2^{(k)}] = [\widetilde{x}_0'] - R_0^{k-1};$$

б) при построении второго уравнения задачи (60) — точное равенство с учетом фиктивного граничного условия (59) вида

$$r_0[x_2''] + (s_0 - 2\,hr_0)[x_2'''] + \cdots + \\ + (-1)^{k-1}\left(s_0\frac{(2h)^{k-3}}{(k-3)!} - r_0\frac{(2h)^{k-2}}{(k-2)!}\right)[x_2^{(k)}] = X_0 - s_0 R_0^{k-3} - r_0 R_0^{k-2},$$

при составлении которого вместо (57), (58) используем точные равенства

$$[x_2''] - 2h[x_2'''] + 2^2\frac{h^2}{2!}[x_2^{(IV)}] + \cdots + (-2)^{k-2}\frac{h^{k-2}}{(k-2)!}[x_2^{(k)}] = [x_0''] - R_0^{k-2},$$

$$[x_2'''] - 2h[x_2^{(IV)}] + 2^2\frac{h^2}{2!}[x_2^{(V)}] + \cdots + (-2)^{k-3}\frac{h^{k-3}}{(k-3)!}[x_2^{(k)}] = [x_0'''] - R_0^{k-3}.$$

В итоге вместо (60) получим задачу

$$l_h^k[x] = g_h^k + \delta g_h^k,$$

в которой левая часть сохранит вид (61) с заменой искомой сеточной функции x_i на $[x_i]$, а вместо (62) получим

$$g_h^k + \delta g_h^k = \begin{cases} f_2 + \sum\limits_{m=6}^{k+1} \dfrac{c_{1m}^{k2}}{c_{15}^{k2}} f_2^{(m-5)} + \dfrac{c_{11}^{k2}}{c_{15}^{k2}} \widetilde{x}_0' + \delta g_{hc}^k, \\ f_2 + \sum\limits_{m=6}^{k+1} \dfrac{d_{1m}^{k2}}{d_{15}^{k2}} f_2^{(m-5)} + \dfrac{d_{11}^{k2}}{d_{15}^{k2}} X_0 + \delta g_{hd}^k, \end{cases}$$

где

$$\delta g_h^k = \begin{cases} \delta g_{hc}^{k2}, \\ \delta g_{hd}^{k2} \end{cases} = \begin{cases} -\dfrac{c_{11}^{k2} R_0^{k-1} + c_{12}^{k2} R_1^k + c_{13}^{k2} R_3^k + c_{14}^{k2} R_4^k}{c_{15}^{k2}}, \\ -\dfrac{d_{11}^{k2}(s_0 R_0^{k-3} - r_0 R_0^{k-2}) + d_{12}^{k2} R_1^k + d_{13}^{k2} R_3^k + d_{14}^{k2} R_4^k}{d_{15}^{k2}}. \end{cases} \tag{67}$$

Вычислим оценки невязок (66), (67) задач (52), (60) соответственно. Оценки

$$M_{1j}^{ki} \approx (s_i)^{k-1} M_{1j}^{4i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, \quad j = 1, 2, \ldots, 5, \tag{68}$$

аналогичные оценкам (34), полученным при использовании четырехточечного шаблона, имеют место и для матриц $(A^{ki})^\top$, где A^{ki} — локальная матрица (47), и для двух транспонированных матриц (47) при $i = 2$, в которых первые строки заменены коэффициентами разложений (55), (59) соответственно, что выше было выполнено при построении матриц C^{k2}, D^{k2}. Отсутствие в настоящей работе полного вывода формулы (68) обусловлено лишь громоздкостью выкладок. При исследовании краевых задач для ОДУ2 вывод формул, аналогичных (68), дан в [12].

На основании оценок (68) и очевидных равенств

$$\frac{b_{1j}^{ki}}{b_{15}^{ki}} = \frac{M_{1j}^{ki}}{M_{15}^{ki}}, \quad j = 1, 2, 3, 4$$

имеем

$$\frac{b_{1j}^{ki}}{b_{15}^{ki}} \approx \frac{M_{1j}^{4i}}{M_{15}^{4i}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, \quad j = 1, 2, 3, 4. \tag{69}$$

Вычислим оценки M_{1j}^{4i}, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, $j = 1, 2, \ldots, 5$. Используя известные свойства определителя [15] и пренебрегая старшими степенями, имеем

$$M_{11}^{4i} = \begin{vmatrix} -h & h & 2h & p_1 \\ \frac{h^2}{2!} & \frac{h^2}{2!} & \frac{2^2 h^2}{2!} & r_i \\ -\frac{h^3}{3!} & \frac{h^3}{3!} & \frac{2^3 h^3}{3!} & s_i \\ \frac{h^4}{4!} & \frac{h^4}{4!} & \frac{2^4 h^4}{4!} & 0 \end{vmatrix} = (6s_i + r_i h - p_i h^2)\frac{h^7}{12} \approx (6s_i + r_i h)\frac{h^7}{12}, \tag{70}$$

$$M_{12}^{4i} = (-3s_i - 4r_i h + 2p_i h^2)\frac{h^7}{3} \approx (-3s_i - 4r_i h)\frac{h^7}{3}, \tag{71}$$

$$M_{13}^{4i} = (3s_i - 4r_i h - 2p_i h^2)\frac{h^7}{3} \approx (3s_i - 4r_i h)\frac{h^7}{3}, \tag{72}$$

$$M_{14}^{4i} = (-6s_i + r_i h + p_i h^2)\frac{h^7}{12} \approx (-6s_i + r_i h)\frac{h^7}{12}, \quad M_{15}^{4i} = q_i h^{10}. \tag{73}$$

Вычислим оценки невязок (66) задачи (52). Для рядов Тейлора

$$x_{i-1} = x_i - hx_i' + \frac{h^2}{2!}x_i'' - \frac{h^3}{3!}x_i''' + \dots =$$
$$= \sum_{m=0}^{k}(-1)^m \frac{h^m}{m!}x_i^{(m)} + \sum_{m=k+1}^{\infty}(-1)^m \frac{h^m}{m!}x_i^{(m)} = P_{i-1}^k + R_{i-1}^k,$$

$$x_{i+1} = x_i + hx_i' + \frac{h^2}{2!}x_i'' + \frac{h^3}{3!}x_i''' + \dots =$$
$$= \sum_{m=0}^{k} \frac{h^m}{m!}x_i^{(m)} + \sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{h^m}{m!}x_i^{(m)} = P_{i+1}^k + R_{i+1}^k,$$

где R_{i-1}^k, R_{i+1}^k — дополнительные члены:

$$R_j^k = \frac{h^{k+1}}{(k+1)!}x^{(k+1)}(\xi_j) = O(h^{k+1}), \quad \xi_j \in (t_i, t_{i+1}), \quad j = i-1, i+1,$$

в [12] показана справедливость следующих формул:

$$R_{i+1}^k - R_{i-1}^k = O(h^{k+2}), \quad R_{i+1}^k + R_{i-1}^k = O(h^{k+1}) \tag{74}$$

для нечетного k и

$$R_{i+1}^k - R_{i-1}^k = O(h^{k+1}), \quad R_{i+1}^k + R_{i-1}^k = O(h^{k+2}) \tag{75}$$

для четного k.

С учетом (69)–(73) из (66) для $i = 2, 3, \dots, n-2$ имеем

$$\delta f_h^{ki} = -\frac{b_{11}^{ki}R_{i-2}^k + b_{12}^{ki}R_{i-1}^k + b_{13}^{ki}R_{i+1}^k + b_{14}^{ki}R_{i+2}^k}{b_{15}^{ki}} \approx$$
$$\approx -\frac{h^7\left((6s_i + r_i h)R_{i-2}^k + (-6s_i + r_i h)R_{i+2}^k\right)}{12q_i h^{10}} -$$
$$-\frac{h^7\left((-3s_i - 4r_i h)R_{i-2}^k + (3s_i - 4r_i h)R_{i+2}^k\right)}{3q_i h^{10}} =$$
$$= -\frac{-6s_i(R_{i+2}^k - R_{i-2}^k) + r_i h(R_{i+2}^k + R_{i-2}^k)}{12q_i h^3} -$$
$$-\frac{3s_i(R_{i+1}^k - R_{i-1}^k) - 4r_i h(R_{i+1}^k + R_{i-1}^k)}{3q_i h^3}. \tag{76}$$

Подстановка оценок (74) в (76) дает

$$\delta f_h^{ki} \approx -\frac{-6s_i O(h^{k+2}) + r_i h O(h^{k+1})}{12 q_i h^3} - \frac{3s_i O(h^{k+2}) - 4r_i h O(h^{k+1})}{3q_i h^3} = \\ = O(h^{k-1}) + O(h^{k-1}) + O(h^{k-1}) + O(h^{k-1}) = O(h^{k-1}),$$

откуда

$$\|\delta f_h^k\| = O(h^{k-1}) \tag{77}$$

для нечетного k.

Подстановка оценок (75) в (76) дает

$$\delta f_h^{ki} \approx -\frac{-6s_i O(h^{k+1}) + r_i h O(h^{k+2})}{12 q_i h^3} - \frac{3s_i O(h^{k+1}) - 4r_i h O(h^{k+2})}{3q_i h^3} = \\ = O(h^{k-2}) + O(h^{k}) + O(h^{k-2}) + O(h^{k}) = O(h^{k-2}),$$

откуда

$$\|\delta f_h^k\| = O(h^{k-2}) \tag{78}$$

для четного k.

Из (77), (78) следует, что при $m \geqslant 3$ задачи L_h^{2m-1} и L_h^{2m} имеют одинаковый порядок аппроксимации. Отметим, что, как показано в [12, 18], для ОДУ2 и систем ОДУ2 с граничными условиями первого рода ситуация оказалась противоположной — задачи L_h^{2m} и L_h^{2m+1} имели одинаковый порядок аппроксимации при $m \geqslant 1$.

Вычислим оценки невязок (67) задачи (60). Для матрицы C^{k2} на основании оценок (68) и очевидных равенств

$$\frac{c_{1j}^{k2}}{c_{15}^{k2}} = \frac{M_{1j}^{k2}}{M_{15}^{k2}}, \quad j = 1, 2, 3, 4$$

имеем

$$\frac{c_{1j}^{k2}}{c_{15}^{k2}} \approx \frac{M_{1j}^{42}}{M_{15}^{42}}, \quad j = 1, 2, 3, 4. \tag{79}$$

Вычислим оценки M_{1j}^{42}, $j = 1, 2, \ldots, 5$. Пренебрегая старшими степенями, найдем

$$M_{11}^{42} = (6s_2 + r_2 h - p_2 h^2)\frac{h^7}{12} \approx (6s_2 + r_2 h)\frac{h^7}{12} \approx s_2 \frac{h^7}{2}, \tag{80}$$

$$M_{12}^{42} \approx -(-3s_2 - 88 r_2 h)\frac{h^6}{9} \approx s_2 \frac{h^6}{3}, \tag{81}$$

$$M_{13}^{42} \approx (-11 s_2 - 12 r_2 h)\frac{h^6}{4} \approx -s_2 \frac{11 h^6}{4}, \tag{82}$$

$$M_{14}^{42} \approx -(-7s_2 + r_2 h)\frac{h^6}{6} \approx s_2 \frac{7h^6}{6}, \quad M_{15}^{42} = q_2 \frac{340 h^{10}}{3}. \tag{83}$$

С учетом (79)–(83) вычислим оценку первой компоненты в (67):

$$\delta g_{hc}^{k2} = -\frac{c_{11}^{k2} R_0^{k-1} + c_{12}^{k2} R_1^k + c_{13}^{k2} R_3^k + c_{14}^{k2} R_4^k}{c_{15}^{k2}} \approx$$

$$\approx -\frac{s_2 h^6(6hR_0^{k-1} + 4R_1^k - 33R_3^k + 14R_4^k)}{1360 q_2 h^9} =$$
$$= O(h^{k-2}) + O(h^{k-2}) + O(h^{k-2}) + O(h^{k-2}) = O(h^{k-2}). \quad (84)$$

Для матрицы D^{k2} на основании оценок (68) и очевидных равенств

$$\frac{d_{1j}^{k2}}{d_{15}^{k2}} = \frac{M_{1j}^{k2}}{M_{15}^{k2}}, \quad j = 1, 2, 3, 4$$

имеем

$$\frac{d_{1j}^{k2}}{d_{15}^{k2}} \approx \frac{M_{1j}^{42}}{M_{15}^{42}}, \quad j = 1, 2, 3, 4. \quad (85)$$

Вычислим оценки M_{1j}^{42}, $j = 1, 2, \ldots, 5$. Пренебрегая старшими степенями, найдем

$$M_{11}^{42} = (6s_2 + r_2 h - p_2 h^2)\frac{h^7}{12} \approx (6s_2 + r_2 h)\frac{h^7}{12} \approx s_2\frac{h^7}{2}, \quad (86)$$
$$M_{12}^{42} \approx (s_0 + 3r_0 h)3s_2 h^4 \approx 3s_0 s_2 h^4, \quad (87)$$
$$M_{13}^{42} \approx (3s_0 + 4r_0 h)2s_2 h^4 \approx 6s_0 s_2 h^4, \quad (88)$$
$$M_{14}^{42} \approx -(s_0 - r_0 h)2s_2 h^4 \approx -2s_0 s_2 h^4, \quad M_{15}^{42} = s_0 q_2\frac{h^7}{3}. \quad (89)$$

С учетом (85)–(89) вычислим оценку второй компоненты в (67):

$$\delta g_{hd}^{k2} = -\frac{d_{11}^{k2}(s_0 R_0^{k-3} - r_0 R_0^{k-2}) + d_{12}^{k2} R_1^k + d_{13}^{k2} R_3^k + d_{14}^{k2} R_4^k}{d_{15}^{k2}} \approx$$
$$\approx -\frac{3s_2(s_0 h^3 R_0^{k-3} - r_0 h^3 R_0^{k-2} + 6s_0 R_1^k + 12 s_0 R_3^k - 4s_0 R_4^k)}{2 s_0 q_2 h^3} =$$
$$= O(h^{k-2}) + O(h^{k-1}) + O(h^{k-2}) + O(h^{k-2}) + O(h^{k-2}) = O(h^{k-2}). \quad (90)$$

Из (63), (67), (84), (90) следует оценка

$$\|\delta g_h^k\| = O(h^{k-2}) \quad (91)$$

для задачи (60).

Подстановка (77) или (78), (91) в (64) дает порядок аппроксимации задачи (52), (60) меньшим на две единицы степени используемого многочлена Тейлора k независимо от ее четности. Объяснением этого является то, что для пар индексов $(1,1)$, $(1,4)$ и $(1,2)$, $(1,3)$ в оценках (80)–(84) соответственно и в оценках (86)–(89) отсутствуют какие-либо закономерности на модули слагаемых, тогда как имеющаяся закономерность для перечисленных пар индексов (первые слагаемые различаются лишь знаками, вторые совпадают) в оценках (70)–(73) привела к зависимости порядка аппроксимации от четности используемого многочлена Тейлора k при исследовании задачи (52). Отметим, что при использовании четырехточечного шаблона отсутствие какихлибо закономерностей в оценках (38)–(40) и в оценках (41)–(43) для перечисленных пар индексов привело к порядку аппроксимации задачи, меньшему на две единицы степени используемого многочлена Тейлора k независимо от ее четности.

6. Оценка погрешностей. При выполнении численного эксперимента использованы следующие нормы:

– в качестве суммарной оценки относительной погрешности

$$D_x^k = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1}(x_i - [x_i])^2}}{\sum_{i=1}^{n-1}\big|[x_i]\,\big|} \cdot 100\,\%. \tag{92}$$

Оценку можно трактовать как некий аналог коэффициента вариации в статистике, который характеризует меру разброса в процентах [16];

– в качестве оценки абсолютной погрешности [5, 6]

$$E_x^k = \max\big|x_i - [x_i]\big|, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{93}$$

В качестве примера рассматривалось ОДУ3

$$(\sin t + x)x''' + 3(\cos t + 1)x'' - 3\sin t \cdot x' - \cos t \cdot x = \sin t, \quad t \in [7, 11] \tag{94}$$

с граничными условиями

$$x(7) = 8.5211, \quad x'(7) = 0.2236, \quad x(11) = 14.5995. \tag{95}$$

Общее решение ОДУ3 (94) заимствовано из [17].

В расчетах принято, что $n = 20$, $h = 0.20$. Результаты численного эксперимента для краевой задачи (94), (95) приведены в табл. 1–3.

В табл. 1 приведены результаты, когда при построении СЛАУ был использован смешанный вариант ПП; в табл. 2 — результаты, когда были использованы только левые шаблоны. Как видно, результаты, представленные в табл. 1, 2, сравнимы между собой, что подтверждает теоретический вывод о том, что выбор того или иного четырехточечного шаблона не оказывает влияния на порядок аппроксимации.

В табл. 1 нормы $D_{x'}^k$, $E_{x'}^k$ для производных $x'(t)$ характеризуют оценки относительной и абсолютной погрешностей, вычисленных по формулам (92), (93), в которых значения функций заменены на значения своих первых производных, найденных по формулам (21), (22) при $l = 2$ во внутренних узлах области интегрирования.

Результаты численного эксперимента при использовании пятиточечного шаблона для краевой задачи (94), (95) приведены в табл. 3.

В табл. 3 нормы $D_{x'}^k$, $E_{x'}^k$ для производных $x'(t)$ характеризуют оценки относительной и абсолютной погрешностей, вычислены по формулам (92), (93). В них значения функций заменены на значения своих первых производных, найденных по формулам (49), в которых $i = 2, 3, \ldots, n-2$.

Анализ таблиц свидетельствует, что для рассматриваемой задачи для четырехточечного и пятиточечного шаблонов с увеличением степени k используемого многочлена Тейлора относительная и абсолютная погрешности уменьшаются, как это имело место при исследовании краевых задач для ОДУ2 [1, 12, 13] и систем ОДУ2 [18].

Таблица 1

Значения погрешностей для решения краевой задачи (94), (95) при использовании смешанного варианта процедур построения СЛАУ [Error estimation in the numerical solution of the boundary value problem (94), (95) when a mixed version of the template for the four-point difference scheme was used]

k	3	4	5	6	7	8	9	10
для решения (for the solution)								
D_x^k, %	$1.02 \cdot 10^{-1}$	$5.63 \cdot 10^{-3}$	$1.30 \cdot 10^{-3}$	$8.92 \cdot 10^{-5}$	$1.06 \cdot 10^{-5}$	$6.29 \cdot 10^{-7}$	$6.36 \cdot 10^{-8}$	$4.35 \cdot 10^{-9}$
E_x^k	$7.88 \cdot 10^{-2}$	$5.55 \cdot 10^{-3}$	$1.08 \cdot 10^{-3}$	$7.49 \cdot 10^{-5}$	$9.96 \cdot 10^{-6}$	$6.05 \cdot 10^{-7}$	$6.96 \cdot 10^{-8}$	$4.75 \cdot 10^{-9}$
для первой производной решения (for the first derivative of the solution)								
$D_{x'}^k$, %	$6.51 \cdot 10^{-1}$	$6.05 \cdot 10^{-2}$	$9.41 \cdot 10^{-3}$	$7.40 \cdot 10^{-4}$	$9.53 \cdot 10^{-5}$	$7.07 \cdot 10^{-6}$	$8.51 \cdot 10^{-7}$	$7.51 \cdot 10^{-8}$
$E_{x'}^k$	$7.89 \cdot 10^{-2}$	$1.17 \cdot 10^{-2}$	$1.33 \cdot 10^{-3}$	$9.72 \cdot 10^{-5}$	$1.43 \cdot 10^{-5}$	$1.07 \cdot 10^{-6}$	$1.12 \cdot 10^{-7}$	$1.17 \cdot 10^{-8}$

Таблица 2

Значения погрешностей для решения краевой задачи (94), (95) при использовании левых шаблонов в процедурах построения СЛАУ [Error estimation in the numerical solution of the boundary value problem (94), (95) when a left version of the template for the four-point difference scheme was used]

k	3	4	5	6	7	8	9	10
D_x^k, %	$1.10 \cdot 10^{-1}$	$4.65 \cdot 10^{-3}$	$1.05 \cdot 10^{-3}$	$1.04 \cdot 10^{-4}$	$9.51 \cdot 10^{-6}$	$6.51 \cdot 10^{-7}$	$6.03 \cdot 10^{-8}$	$4.38 \cdot 10^{-9}$
E_x^k	$8.28 \cdot 10^{-2}$	$4.75 \cdot 10^{-3}$	$9.15 \cdot 10^{-4}$	$8.54 \cdot 10^{-5}$	$9.07 \cdot 10^{-6}$	$6.25 \cdot 10^{-7}$	$6.75 \cdot 10^{-8}$	$4.84 \cdot 10^{-9}$

Таблица 3

Значения погрешностей для решения краевой задачи (94), (95) при использовании пятиточечного шаблона [Error estimation in the numerical solution of the boundary value problem (94), (95) when the five-point difference scheme was used]

k	4	5	6	7	8	9	10
для решения (for the solution)							
D_x^k, %	$5.02 \cdot 10^{-3}$	$6.56 \cdot 10^{-3}$	$9.44 \cdot 10^{-5}$	$2.13 \cdot 10^{-5}$	$6.34 \cdot 10^{-7}$	$1.72 \cdot 10^{-7}$	$7.16 \cdot 10^{-9}$
E_x^k	$5.06 \cdot 10^{-3}$	$5.19 \cdot 10^{-3}$	$7.85 \cdot 10^{-5}$	$2.03 \cdot 10^{-5}$	$6.21 \cdot 10^{-7}$	$1.87 \cdot 10^{-7}$	$6.12 \cdot 10^{-9}$
для первой производной решения (for the first derivative of the solution)							
$D_{x'}^k$, %	$4.43 \cdot 10^{-2}$	$4.34 \cdot 10^{-2}$	$7.48 \cdot 10^{-4}$	$2.51 \cdot 10^{-4}$	$6.94 \cdot 10^{-6}$	$1.76 \cdot 10^{-6}$	$5.04 \cdot 10^{-8}$
$E_{x'}^k$	$5.98 \cdot 10^{-3}$	$4.72 \cdot 10^{-3}$	$9.70 \cdot 10^{-5}$	$3.88 \cdot 10^{-5}$	$1.07 \cdot 10^{-6}$	$2.90 \cdot 10^{-7}$	$7.43 \cdot 10^{-9}$

k is the degree of the Taylor polynomial (P^k) used for the approximation

Выводы. Сформулируем основные выводы по работе.

1. При использовании четырехточечного шаблона теоретически выявлены закономерности между порядком аппроксимации матричного метода и степенью используемого многочлена Тейлора при численном интегрировании краевых задач для линейных неоднородных ОДУ третьего порядка. Установлено, что порядок аппроксимации пропорционален степени используемого многочлена Тейлора и меньше нее на две единицы.
2. Теоретический вывод о том, что выбор того или иного четырехточечного шаблона не оказывает влияния на порядок аппроксимации, подтвержден численным экспериментом.
3. При использовании пятиточечного шаблона предложена процедура построения фиктивного граничного условия, позволяющая построить замкнутую систему разностных уравнений матричного метода численного интегрирования.
4. При использовании пятиточечного шаблона система разностных уравнений разбита на две подсистемы (подзадачи): в первую подсистему вошли два уравнения, первое из которых содержит заданное значение производной в граничных условиях задачи, второе — вычисленное из фиктивного граничного условия значение; во вторую подсистему вошли оставшиеся разностные уравнения построенной замкнутой системы. Вычислена невязка и дана оценка порядка аппроксимации метода в зависимости от выбранной степени многочлена Тейлора. Теоретически выявлены закономерности между порядком аппроксимации матричного метода и степенью используемого многочлена Тейлора. Установлено следующее:
   а) порядок аппроксимации первой подсистемы, второй подсистемы при четном значении степени используемого многочлена Тейлора и всей задачи пропорционален этой степени и меньше нее на две единицы;
   б) порядок аппроксимации второй подсистемы при нечетном значении степени используемого многочлена Тейлора пропорционален этой степени и меньше нее на единицу.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Радченко В. П., Усов А. А. Модификация сеточных методов решения линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами на основе тейлоровских разложений // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2008. № 2(17). С. 60–65. doi: 10.14498/vsgtu646.
2. Keller H. B. Accurate Difference Methods for Nonlinear Two-point Boundary Value Problems // *SIAM J. Numer. Anal.*, 1974. vol. 11, no. 2. pp. 305–320. doi: 10.1137/0711028.
3. Lentini M., Pereyra V. A Variable Order Finite Difference Method for Nonlinear Multipoint

Boundary Value Problems // *Math. Comp.*, 1974. vol. 28, no. 128. pp. 981–1003. doi: 10.1090/s0025-5718-1974-0386281-4.

4. Keller H. B. Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential equations: Survey and Some Resent Results on Difference Methods / *Numerical Solutions of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations*: Part I: Survey Lectures; ed. A. K. Aziz. New York: Academic Press, 1975. pp. 27–88. doi: 10.1016/b978-0-12-068660-5.50007-7.
5. Годунов С. К., Рябенький В. С. *Разностные схемы. Введение в теорию.* М.: Наука, 1977. 439 с.
6. Формалеев В. Ф., Ревизников Д. Л. *Численные методы.* М.: Физматлит, 2004. 400 с.
7. Самарский А. А. *Теория разностных схем.* М.: Наука, 1977. 656 с.
8. Самарский А. А., Гулин А. В. *Численные методы.* М.: Наука, 1973. 432 с.
9. Самарский А. А., Гулин А. В. *Устойчивость разностных схем.* М.: Наука, 1973. 416 с.
10. Boutayeb A., Chetouani A. Global Extrapolations Of Numerical Methods For Solving A Parabolic Problem With Non Local Boundary Conditions // *International Journal of Computer Mathematics*, 2003. vol. 80, no. 6. pp. 789–797. doi: 10.1080/0020716021000039209.
11. Boutayeb A., Chetouani A. A Numerical Comparison of Different Methods Applied to the Solution of Problems with Non Local Boundary Conditions // *Applied Mathematical Sciences*, 2007. vol. 1, no. 44. pp. 2173–2185, http://www.m-hikari.com/ams/ams-password-2007/ams-password41-44-2007/boutayebAMS41-44-2007.pdf.
12. Маклаков В. Н. Оценка порядка аппроксимации матричного метода численного интегрирования краевых задач для линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2014. № 3(36). С. 143–160. doi: 10.14498/vsgtu1364.
13. Маклаков В. Н. Сходимость матричного метода численного интегрирования краевых задач для линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2015. Т. 19, № 3. С. 559–577. doi: 10.14498/vsgtu1426.
14. Фихтенгольц Г. М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления.* Т. 1. М.: Наука, 1970. 608 с.
15. Курош А. Г. *Курс высшей алгебры.* М.: Наука, 1971. 431 с.
16. Закс Л. *Статистическое оценивание.* М.: Статистика, 1976. 598 с.
17. Камке Э. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.* М.: Наука, 1976. 576 с.
18. Маклаков В. Н. Оценка порядка аппроксимации матричного метода численного интегрирования краевых задач для систем линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. Сообщение 1. Краевые задачи с граничными условиями первого рода // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2016. Т. 20, № 3. С. 389–409. doi: 10.14498/vsgtu1511.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 1, pp. 153–183
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) http://doi.org/10.14498/vsgtu1565

MSC: 34B99

Numerical integration by the matrix method of boundary value problems for linear inhomogeneous ordinary differential equations of the third order with variable coefficients

V. N. Maklakov, Ya. G. Stelmakh

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

The use of the Taylor polynomial of the second degree when approximating the derivatives by finite differences leads to the second order of approximation of the traditional method of nets in the numerical integration of second-order ordinary differential equations with variable coefficients. In the study of boundary-value problems for the third-order ordinary differential equations with variable coefficients, we offer the previously proposed method of numerical integration, using the means of the matrix calculus, in which approximation of the derivatives by finite differences was not used. According to this method, in the construction of a system of difference equations, an arbitrary power of the Taylor polynomial in the expansion of the desired solution of the problem in a Taylor series can be chosen. The disparity is calculated and an estimate of the order of approximation of the method is given depending on the chosen degree of the Taylor polynomial using the four-point pattern. The regularities between the order of approximation of the matrix method and the degree of the used Taylor polynomial are theoretically revealed. We found out that the order of approximation is proportional to the degree of the used Taylor polynomial and less by two than it.

We propose a procedure for constructing a fictitious boundary condition that allows us to construct a closed system of difference equations for the matrix method of numerical integration. The system of difference equations is divided into two subsystems: the first subsystem consists of two equations, the first of which contains the given value of the derivative in the boundary conditions of the problem, the second one contains the value calculated

Research Article

Please cite this article in press as:
M a k l a k o v V. N., S t e l m a k h Ya. G. Numerical integration by the matrix method of boundary value problems for linear inhomogeneous ordinary differential equations of the third order with variable coefficients, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 1, pp. 153–183. doi: 10.14498/vsgtu1565 (In Russian).

Authors' Details:

Vladimir N. Maklakov http://orcid.org/0000-0003-1644-7424
Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Hight Mathematics & Applied Computer Science; e-mail: makvo63@yandex.ru

Yanina G. Stelmakh http://orcid.org/0000-0002-3266-3111
Cand. Educat. Sci.; Associate Professor; Dept. of Hight Mathematics & Applied Computer Science; e-mail: yaninastelmah@rambler.ru

from the fictitious boundary condition; the second subsystem consists of the remaining difference equations of the constructed closed system.

The disparity is calculated and an estimate of the order of approximation of the method is given depending on the chosen degree of the Taylor polynomial using the five-point pattern. The regularities between the order of approximation of the matrix method and the degree of the used Taylor polynomial are theoretically revealed. The following is revealed:

a) the order of approximation of the first subsystem, the second subsystem with an even value of the degree of the Taylor polynomial and the whole problem is proportional to this degree and less than it by two;
b) the order of approximation of the second subsystem with an odd value of the degree of the Taylor polynomial is proportional to this degree and less than it by one.

Keywords: ordinary differential equations, boundary value problems, approximation order, numerical methods, Taylor polynomials.

Received: 16th October, 2017 / Revised: 3rd February, 2018 /
Accepted: 12th March, 2018 / First online: 31st March, 2018

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interests with the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. The research has not had any funding.

References

1. Radchenko V. P., Usov A. A. Modified grid method for solving linear differential equation equipped with variable coefficients based on Taylor series, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2008, no. 2(17), pp. 60–65 (In Russian). doi: 10.14498/vsgtu646.
2. Keller H. B. Accurate Difference Methods for Nonlinear Two-point Boundary Value Problems, *SIAM J. Numer. Anal.*, 1974, vol. 11, no. 2, pp. 305–320. doi: 10.1137/0711028.
3. Lentini M., Pereyra V. A Variable Order Finite Difference Method for Nonlinear Multipoint Boundary Value Problems, *Math. Comp.*, 1974, vol. 28, no. 128, pp. 981–1003. doi: 10.1090/s0025-5718-1974-0386281-4.
4. Keller H. B. Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential equations: Survey and Some Resent Results on Difference Methods, In: *Numerical Solutions of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations*, Part I: Survey Lectures; ed. A. K. Aziz. New York, Academic Press, 1975, pp. 27–88. doi: 10.1016/b978-0-12-068660-5.50007-7.
5. Godunov S. K., Ryabenki V. S. *Theory of Difference Schemes: An Introduction.* New York, Wiley, 1964, xii+289 pp.
6. Formaleev V. F., Reviznikov D. L. *Chislennye metody* [Numerical Methods]. Moscow, Fizmatlit, 2004, 400 pp. (In Russian)
7. Samarskii A. A. *Teoriia raznostnykh skhem* [The Theory of Difference Schemes]. Moscow, Nauka, 1977, 656 pp. (In Russian)

8. Samarskii A. A., Gulin A. V. *Chislennye metody* [Numerical methods]. Moscow, Nauka, 1973, 432 pp. (In Russian)
9. Samarskii A. A., Gulin A. V. *Ustoichivost' raznostnykh skhem* [The stability of difference schemes]. Moscow, Nauka, 1973, 416 pp. (In Russian)
10. Boutayeb A., Chetouani A. Global Extrapolations Of Numerical Methods For Solving A Parabolic Problem With Non Local Boundary Conditions, *International Journal of Computer Mathematics*, 2003, vol. 80, no. 6, pp. 789–797. doi: 10.1080/0020716021000039209.
11. Boutayeb A., Chetouani A. A Numerical Comparison of Different Methods Applied to the Solution of Problems with Non Local Boundary Conditions, *Applied Mathematical Sciences*, 2007, vol. 1, no. 44, pp. 2173–2185, http://www.m-hikari.com/ams/ams-password-2007/ams-password41-44-2007/boutayebAMS41-44-2007.pdf.
12. Maklakov V. N. Estimation of the Order of the Matrix Method Approximation of Numerical Integration of Boundary-Value Problems for Inhomogeneous Linear Ordinary Differential Equations of the Second Order, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], no. 3(36), pp. 143–160 (In Russian). doi: 10.14498/vsgtu1364.
13. Maklakov V. N. Convergence of the matrix method of numerical integration of the boundary value problems for linear nonhomogeneous ordinary differential second order equations with variable coefficients, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 3, pp. 559–577 (In Russian). doi: 10.14498/vsgtu1426.
14. Fichtenholz G. M. *Differential- und Integralrechnung.* I [Differential and integral calculus. I], Hochschulbücher für Mathematik [University Books for Mathematics], vol. 61. Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1986, xiv+572 pp. (In German)
15. Kurosh A. *Higher algebra.* Moscow, Mir Publ., 1972, 428 pp.
16. Zaks L. *Statisticheskoe otsenivanie* [Statistical estimation]. Moscow, Statistika, 1976, 598 pp. (In Russian)
17. Kamke E. *Spravochnik po obyknovennym differentsial'nym uravneniiam* [Manual of ordinary differential equations]. Moscow, Nauka, 1976, 576 pp. (In Russian)
18. Maklakov V. N. The evaluation of the order of approximation of the matrix method for numerical integration of the boundary value problems for systems of linear non-homogeneous ordinary differential equations of the second order with variable coefficients. Message 1. Boundary value problems with boundary conditions of the first kind, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2016, vol. 20, no. 3, pp. 389–409 (In Russian). doi: 10.14498/vsgtu1511.