Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2019. Т. 23, № 2. С. 361–377
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1681

УДК 517.977.54

Эффективная вычислительная процедура альтернансного метода оптимизации

М. Ю. Ливщиц, А. В. Ненашев

Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

Рассматривается вычислительная процедура реализации альтернансного метода оптимизации применительно к задаче полубесконечного программирования. К таким задачам сводятся многочисленные прикладные проблемы оптимизации объектов с распределенными и сосредоточенными параметрами: робастная параметрическая оптимизация динамических систем, параметрический синтез систем управления и т.п. Поскольку вычисления по альтернансному методу оптимизации достаточно затруднительны, так как сводятся к решению, как правило, трансцендентной системы определяющих уравнений, предлагается эффективный по вычислительной сложности вариант реализации вычислительной процедуры.

Для снижения сложности вычислительной процедуры используются установленные альтернансным методом свойства точек экстремума критерия оптимальности в области допустимых значений переменных. Эти свойства позволяют сформировать топологию этой области и тем самым минимизировать количество обращений к ней в ходе поисковой процедуры. Предложенный вычислительный метод особенно эффективен для невыпуклых и негладких критериев оптимальности, к которым приводят технологически обоснованные постановки задач полубесконечной оптимизации.

Разработан пошаговый алгоритм подготовки данных и выполнения вычислений, пригодный для реализации на большинстве языков программирования. Исследована эффективность алгоритма, которая тем выше, чем большее количество параметров входит в вектор управления и чем выше размерность области оптимизации. Предложена оценка вычислительной сложности вычислительной процедуры альтернансного метода оптимизации, которая позволяет определить эффективность

Научная статья

Образец для цитирования

Ливщиц М. Ю., Ненашев А. В. Эффективная вычислительная процедура альтернансного метода оптимизации // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2019. Т. 23, № 2. С. 361–377. doi: 10.14498/vsgtu1681.

Сведения об авторах

Михаил Юрьевич Ливщиц https://orcid.org/0000-0003-4417-6158
доктор технических наук, профессор; заведующий кафедрой; каф. «Управление и системный анализ теплоэнергетических и социотехнических комплексов»; e-mail: usat@samgtu.ru

Алексей Владимирович Ненашев https://orcid.org/0000-0003-1348-1766
аспирант; каф. «Управление и системный анализ теплоэнергетических и социотехнических комплексов»; e-mail: alexvlnenashev@gmail.com

применения предлагаемого алгоритма для решения задачи оптимального управления технологическим объектом управления.

Ключевые слова: математическое программирование, невыпуклая задача, оптимальное управление, параметризация, поисковая процедура.

Получение: 13 марта 2019 г. / Исправление: 14 мая 2019 г. / Принятие: 10 июня 2019 г. / Публикация онлайн: 3 июля 2019 г.

1. Постановка задачи. В современной промышленности широко используется оптимальное управление различными технологическими процессами. Разработка алгоритмов оптимального управления и автоматических систем, их реализующих, непосредственно связана с решением экстремальных задач. Не касаясь вопросов параметризации подобных задач, рассмотренных, например, в работах [1–5], можно, однако, констатировать, что для обширного круга прикладных задач экономики, обработки информации, управления разнообразными техническими и технологическими процессами проблема параметрической оптимизации сводится в постановочном аспекте к задаче полубесконечной оптимизации или полубесконечного программирования [1, 2, 6–10] в евклидовом пространстве как одного из вариантов общей задачи математического программирования:

$$J(\Delta) \to \min, \quad \Delta \in \overline{G}_n \subset E^n; \tag{1}$$

$$\Phi(\Delta) \leqslant 0. \tag{2}$$

Здесь $\Delta = (\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n)$ — n-мерный аргумент (параметры); $\Phi(\Delta)$ — условия связи, ограничивающие область поиска экстремума функционала $J(\Delta)$ в евклидовом пространстве E^n.

В технологически содержательной постановке задача (1), (2) интерпретируется как минимизация целевой функции (функционала) $J(\Delta)$, отражающей отклонение от заданного уровня распределения $F_0\,(y, u(\Delta))$ некоторой управляемой с помощью параметризованного управления $u(\Delta)$ субстанции y — температуры, давления, концентрации и др.

К задаче (1), (2) сводятся задачи минимизации времени φ_0 протекания технологического процесса $J(\Delta) = \varphi_0\,(\Delta)$ и другие разнообразные задачи оптимального управления. В отличие от большинства постановочных концепций, особенностью рассматриваемой в статье постановки является бесконечное число ограничений (2) и невыпуклый негладкий вид функционала (1), к которому приводят задачи робастной оптимизации, игровые стратегии, а также технологически обоснованные [1, 3, 4, 11–15] проблемы в производственных процессах промышленной теплофизики — различных видах нагрева, химико-термической обработки и т.п.

В силу наличия конечного числа неизвестных параметров $\Delta \in \overline{G}_n \subset E^n$ и бесконечного числа ограничений (2) такие задачи получили свое название — задачи полубесконечной оптимизации или полубесконечного программирования [1, 2, 6–10]. В связи с изложенным задачу полубесконечной оптимизации как частную форму общей постановки (1), (2) для широко распространенного в технологической практике требования минимизации максимума функции $F_0\,(y, u(\Delta))$ при заданном или минимальном значении бесконечного числа ограничений на уровне ε_0 или $\varepsilon_{\min}^{(n)}$, соответственно, будем формулировать так же, как в работах [1, 2, 16]:

$$J(\Delta) = \max\left\{F_0\left(y, u(\Delta)\right) : y \in \overline{I}_r \subset E^r, r \geqslant 1\right\} \to \min, \\ u(\Delta) \in \overline{U}_z, \quad \Delta \in \overline{G}_n \subset E^n, \quad n \geqslant 1; \tag{3}$$

$$\Phi(\Delta) = \max\left\{F\left(x, u(\Delta)\right) : x \in \overline{\Omega}_m \in E^m, m \geqslant 1\right\} \leqslant \varepsilon_0 > 0, \\ \varepsilon_0 \geqslant \varepsilon_{\min}^{(n)} = \inf\left\{\Phi(\Delta) : \Delta \in \overline{G}_n\right\}; \tag{4}$$

$$u(\Delta) = \left(u_1(\Delta), \ldots, u_\nu(\Delta), \ldots, u_z(\Delta)\right). \tag{5}$$

Здесь $J(\Delta)$ — критерий оптимальности; $u(\Delta)$ — параметризованная вектор-функция управления, определенная на множестве своих значений $\overline{U}_z$; $\overline{G_n}$ — замкнутое непустое компактное множество параметров Δ в E^n; $\overline{I}_r$ и $\overline{\Omega}_m$ — компактные множества в E^r и E^m соответственно; функции $F_0(y, u(\Delta))$ и $F(x, u(\Delta))$ — гладкие функции своих переменных на пересечениях $\overline{I}_r \bigcap \overline{G}_n$ и $\overline{\Omega}_m \bigcap \overline{G}_n$.

При этом задача (3), (4) для заданной функции $F\left(x, u(\Delta)\right)$ не выходит за рамки общей постановки (1), (2), так как

$$\max\left\{F\left(x, u(\Delta)\right) - \varepsilon_0 : x \in \overline{\Omega}_m\right\} = \max\left\{F\left(x, u(\Delta)\right) : x \in \overline{\Omega}_m\right\} - \varepsilon_0$$

(см. [1, 2]), а ограничения (2) эквивалентны условию (4):

$$\Phi\left(\Delta\right) = \max\left\{F\left(x, u(\Delta)\right) : x \in \overline{\Omega}_m\right\}, \tag{6}$$

$$x = (x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_m) \in \overline{\Omega}_m, \quad x_j \in \overline{\Omega}_j \equiv \left[x_j^{\min}, x_j^{\max}\right] \tag{7}$$

в случае бесконечного числа функциональных ограничений в форме неравенств

$$F\left(x, u(\Delta)\right) \leqslant 0, \quad \forall x \in \overline{\Omega}_m \subset E^m, \quad \forall \Delta \in \overline{G}_n, \quad \forall u(\Delta) \in \overline{U}_z. \tag{8}$$

Отметим, что переменные x и y в прикладных задачах могут совпадать, не совпадать, совпадать частично, быть взаимозависимыми и т.п. Например, y может иметь физический смысл температуры, а x — смысл термонапряжений в определенном сечении нагреваемой детали.

К экстремальной задаче полубесконечной оптимизации (3), (4) сводятся, как показано в [1], многочисленные прикладные проблемы оптимизации объектов с распределенными и сосредоточенными параметрам и другие задачи управления.

Частным случаем задачи (3), (4) является известная [1, 11] задача оптимального по Чебышевской норме индукционного нагрева достаточно длинного стержня единичного радиуса l:

$$J(l, \Delta) = \max_{l \in [0,1]} \left|\Theta(l, \varphi_0) - \Theta^*(l)\right| \to \min_{\Delta}; \quad \varphi_0 = \sum_{\alpha=1}^{A} \Delta_\alpha^{(\beta)}. \tag{9}$$

Для этого процесса

$$F(x, u(\Delta))\big|_{x=\Theta} = \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial l^2} - \frac{1}{l}\frac{\partial \Theta}{\partial l} - W(l, \xi) u(\varphi), \tag{10}$$

$l \in (0,1)$, $\varphi \in (0,\varphi_0]$, а бесконечное число ограничений (6) принимает безразмерную форму краевой задачи при краевых условиях

$$\begin{gathered} F(\Theta) = 0, \quad \Theta(l,\varphi_0) = \Theta_0; \\ \frac{\partial\Theta\,(0,\varphi)}{\partial l} = 0, \quad \frac{\partial\Theta}{\partial l} = \mathsf{Bi}\,[\Theta_a\,(\varphi) - \Theta\,(1,\varphi)] \end{gathered} \tag{11}$$

и является отражением того, что в бесконечном числе точек радиуса стержня относительная температура $\Theta(l,\varphi)$ в любой момент относительного времени φ должна быть связана уравнением теплопроводности (10), (11). Здесь Bi — критерий Био ($\mathsf{Bi} = \mathrm{const}$); $\Theta_a(\varphi)$ — безразмерная температура окружающей стержень среды; $W(l,\xi)$ — распределение теплоисточников по радиусу стержня l; зависящее от параметра ξ, связанного с частотой питающего индуктор тока; φ — относительное время (критерий Фурье); $u(\varphi) \equiv u(\Delta)$ — мощность внутренних индуцированных теплоисточников, $\Delta = \{\Delta_\alpha^{(\beta)}\}_{\substack{\alpha=\overline{1,A},\\ \beta=\overline{1,B}}}$ — параметры оптимального управления, подлежащие определению в ходе решения задачи; $A < \infty$, $B < \infty$. В рассматриваемом примере $\Delta_\alpha^{(\beta)} \in [0,\varphi_0]$ — продолжительность периода включения ($\alpha = 1,3,5,\ldots$) и отключения ($\alpha = 2,4,6,\ldots$) индуктора от питающей сети; β — количество циклов включения-отключения в каждом β-ом классе управлений. Подробно пример описан в работе [11], а здесь приведен как частная содержательная иллюстрация общей постановки задачи (3), (7), (8).

Поставленная задача (3), (7), (8) в общем случае представляет собой с вычислительной точки зрения сложную нелинейную негладкую минимаксную задачу математического программирования, хотя для решения конкретных прикладных проблем ее удается модифицировать к более простым вариантам с конкретного вида функциями $F\,(x,u(\Delta))$, $\Phi\,(\Delta)$, $F_0\,(y,u(\Delta))$, $J\,(\Delta)$ и областями $\overline{I}_r$, $\overline{\Omega}_m$, $\overline{G}_n$, $\overline{U}_z$. При этом поставленную задачу (3), (7), (8) в условиях $\varepsilon_0 \geqslant \varepsilon_{\min}^{(n)} = \inf\left\{\Phi(\Delta) : \Delta \in \overline{G}_n\right\}$ в частных случаях можно интерпретировать как задачу быстродействия, а в условиях $\varepsilon_0 = \varepsilon_{\min}^{(n)} = \inf\left\{\Phi(\Delta) : \Delta \in \overline{G}_n\right\}$ — как задачу максимальной точности [1].

Для решения подобных задач используются варианты и модификации генетических алгоритмов [17], методов случайного поиска [18–21], симплекс-методов [22, 23] и другие прямые численные методы [24–26].

По нашему мнению, наиболее эффективным является метод сведения экстремальной задачи (3)–(5) к решению системы нелинейных уравнений. Этот метод для широкого круга задач разработан в трудах Э. Я. Рапопорта [1, 2] и получил название «альтернансный метод оптимизации» (АМО). Однако вычислительная процедура АМО, хотя и проще исходной, но все же достаточно затруднительна в силу того, что сводится к решению, как правило, трансцендентной системы определяющих уравнений эффективным и достаточно универсальным вычислительным методом.

Рассмотрим возможности снижения вычислительной сложности поисковой процедуры для решения задачи (3)–(5) безотносительно к ее содержательной технологической постановке. В любом случае, как в ходе использования прямых вычислительных процедур решения задачи (3)–(5) поиска экстремума функционала (3), так и для численного решения системы соответствующих нелинейных уравнений АМО, проблема сводится к минимизации, в общем случае, невыпуклого негладкого функционала $I(\Delta) \to \min$ в условиях ограничений в форме неравенств (2) или эквивалентных им соотношений (6) [1].

Предлагаемый алгоритм эффективен по вычислительной сложности, если параметры $\Delta = (\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\varphi_0^{(\eta)} = \sum_{k=1}^{q_\eta} \Delta_k^{(\eta)}, \tag{12}$$

$$\Delta_\eta = (\Delta_1^{(\eta)}, \ldots, \Delta_{q_\eta}^{(\eta)}), \tag{13}$$

$$\Delta = (\Delta_1, \ldots, \Delta_\eta, \ldots, \Delta_n), \quad n = \sum_{\eta=1}^{\lambda} q_\eta, \tag{14}$$

$$\varphi_0^{(\eta)} \in \overline{G}_\eta \equiv [\varphi_{\min}^{(\eta)}, \varphi_{\max}^{(\eta)}], \quad \Delta_\eta \in \overline{G}_\eta \subset \overline{G}_n, \tag{15}$$

где $\varphi_0^{(\eta)}$ — точка завершения, $\overline{G}$ — одномерное замкнутое множество (отрезок) на оси φ, а параметры внутри группы Δ_η имеют смысл величины интервалов внутри отрезка $[\varphi_{\min}^{(\eta)}, \varphi_0^{(\eta)}] \in \overline{G}_\eta$, при этом каждая η-тая группа параметров независима от других членов Δ.

Здесь с учетом (12)–(15) ограничимся рассмотрением алгоритма для

$$\lambda = 1. \tag{16}$$

Адаптировать предлагаемый алгоритм для $\lambda > 1$ можно, например, с использованием рекурсии, что не представляет особой сложности.

Функцию управления (5) представим в форме простой борелевской вектор-функции:

$$u(\Delta) = \ (u_1(\Delta), \ldots, u_\nu(\Delta), \ldots, u_z(\Delta)) \in V_z. \tag{17}$$

При этом каждая компонента $u_\nu(\Delta) \in V_\nu^*$, в свою очередь, является простой борелевской функцией, определенной на счетном ограниченном множестве значений V_ν^*, $\nu = \overline{1, z}$. Таким образом, по определению, V_z представляет собой счетное ограниченное множество значений функции управления $u(\Delta)$:

$$\begin{gathered} V_z \equiv V_1^* \times V_2^* \times \cdots \times V_z^* \equiv \left(u^{(1)}, ..., u^{(\iota)}\right), \\ u^{(k)} = (u_1^{(k)}, \ldots, u_z^{(k)}), \quad k = \overline{1, \iota}. \end{gathered} \tag{18}$$

Задача (3)–(5) в условиях (12)–(18) сводится к определению значений параметров Δ и их количества $q_\eta = \overline{1, n}$. Поиск оптимального управления осуществляется в соответствии с процедурой АМО [1] последовательно для каждого q_η-го числа параметров. При этом решение последовательности задач максимальной точности для различных q_η позволяет сформировать ряд неравенств:

$$\varepsilon_{\min}^{(1)} > \varepsilon_{\min}^{(2)} > \cdots > \varepsilon_{\min}^{(q_\eta)} \geqslant \varepsilon_0 \geqslant \varepsilon_{\min}^{(q_\eta+1)} > \cdots > \varepsilon_{\min}^{(n)} = \\ = \varepsilon_{\inf} = \inf\left\{\Phi(\Delta) : \Delta \in \overline{G}\right\},$$

обеспечивающих выбор минимально необходимого количества параметров q_η для достижения абсолютной минимальной погрешности $\varepsilon_{\inf}$ или заданной погрешности ε_0 при $q_\eta < n$.

Согласно АМО, вектор $\Delta^{(q_\eta)}$, достижимая погрешность $\varepsilon_{\min}^{(q_\eta)}$ и дополнительные параметры, например минимальное время при заданной погрешности ε, определяются из замкнутой системы соотношений [1]:

$$\left| F(x, \varphi_0^{(\eta)}, u(\Delta^{(q_\eta)})) \right|_{x=x_\mu} = \varepsilon, \tag{19}$$

$$\frac{\partial F\big(x, \varphi_0^{(\eta)}, u(\Delta^{(q_\eta)})\big)}{\partial x_j}\bigg|_{x=x_\omega} = 0, \tag{20}$$

которые трансформируются в замкнутую систему уравнений для конкретного вида функции $F\big(x, u(\Delta^{(q_\eta)})\big)$ в практических приложениях. Здесь

$$\mu = \overline{1, R}, \quad R = \begin{cases} q_\eta, & \varepsilon_{\min}^{(q_\eta - 1)} > \varepsilon > \varepsilon_{\min}^{(q_\eta)}, \\ q_\eta + 1, & \varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(q_\eta)}, \end{cases} \tag{21}$$

$$\omega = \overline{1, r}, \quad x_\omega \in \big\{ x_\mu \in \overline{\Omega}_{n\mu} \subset \overline{\Omega}_m, r = R - 2, r = R - 1, r = R \big\}. \tag{22}$$

Система соотношений (19), (20) отражает установленные АМО специальные свойства решения задачи (3)–(5). Максимумы модуля функции

$$F\big(x, u(\Delta^{(q_\eta)})\big) = F\big(x, \varphi_0^{(\eta)}, u(\Delta^{(q_\eta)})\big)$$

в ограничениях (4) с учетом (6) в точке завершения $\varphi_0^{(\eta)}$ во внутренних точках x_ω области $\overline{\Omega}_{n\mu}$, где функция $F\big(x, \varphi_0^{(\eta)}, u(\Delta^{(q_\eta)})\big)$ достигает экстремума (20), и в граничных точках этой области равны допустимой или предельно достижимой в норме L_∞ погрешности ε. Следует отметить, что в некоторых прикладных задачах экстремумы функции $F\big(x, \varphi_0^{(\eta)}, u(\Delta^{(q_\eta)})\big)$ (20) достигаются на границе области $\overline{\Omega}_{n\mu}$, что отражают соотношения (21), (22). При этом общее количество этих экстремумов равно числу искомых параметров в задаче (3)–(5), что делает систему уравнений на базе соотношений (19), (20) замкнутой. Это также отражается в соотношениях (21), (22).

Получить аналитическое решение системы (19), (20) затруднительно, поэтому ее решение ищется с применением численных методов путем минимизации невязок $f_\mu(x_\mu, \Delta^{(q_\eta)}, \varepsilon)$, $f_\omega(x_\omega, \Delta^{(q_\eta)}, \varepsilon)$ [3, 12]:

$$\left| F\big(x, u(\Delta^{(q_\eta)})\big) \right|_{x=x_\mu} - \varepsilon = f_\mu(x_\mu,\ \Delta^{(q_\eta)}, \varepsilon),$$

$$\frac{\partial F\big(x, u(\Delta^{(q_\eta)})\big)}{\partial x_j}\bigg|_{x=x_\omega} = f_\omega(x_\omega,\ \Delta^{(q_\eta)}, \varepsilon).$$

Для этого введем оценку невязок в форме штрафной функции [12]:

$$I(x_\mu, \Delta^{(q_\eta)}, \varepsilon) = I_{\text{big}}(x_\mu, \Delta^{(q_\eta)}, \varepsilon) + I_{\text{small}}(x_\mu, \Delta^{(q_\eta)}, \varepsilon) =$$

$$= I^{(q_\eta)}(x_\mu, \Delta^{(q_\eta)}, q_\eta, \varepsilon), \quad (23)$$

где

$$I_{\text{big}}(x_\mu, \Delta^{(q_\eta)}, \varepsilon) = K f_{\text{abs}}^2, \quad I_{\text{small}}(x_\mu, \Delta^{(q_\eta)}, \varepsilon) = K f_{\text{abs}}^{1/2},$$
$$f_{\text{abs}} = \sum_{\mu=1}^{R} \left| f_\mu(x_\mu, \Delta^{(q_\eta)}, \varepsilon) \right| + \sum_{\omega=1}^{r} \left| f_\omega(x_\omega, \Delta^{(q_\eta)}, \varepsilon) \right|,$$

K — коэффициент масштабирования.

Оценка (23) всегда положительна, но в зависимости от оптимизируемого процесса из-за формальной зависимости $F\big(u(\Delta^{(q_\eta)})\big)$ может быть невыпуклой. Однако если система (19), (20) имеет решение, то оценка (23) имеет глобальный минимум

$$I_{\text{inf}}^{(q_\eta)} = \inf I^{(q_\eta)}(x_\mu, \Delta^{(q_\eta)}, q_\eta, \varepsilon) = 0.$$

Таким образом, для решения поставленной задачи необходимо определить координаты глобального минимума $I_{\text{inf}} = 0$ оценки (23), определенной в многомерной области

$$\begin{gathered} \overline{R}_1^c = (x_\mu : x \in \overline{\Omega}_{n\mu} \subset \overline{\Omega}_m, \Delta^{(q_\eta)} : \Delta \in \overline{G}, \varepsilon), \\ c_1^{(q_\eta)} = \dim \overline{R}_1^c = (m+1)(q_\eta + 1), \quad m = \dim \overline{\Omega}_m, \end{gathered} \quad (24)$$

для чего следует решить нелинейную невыпуклую задачу математического программирования:

$$I^{(q_\eta)}(x_\mu, \Delta^{(q_\eta)}, q_\eta, \varepsilon) \to \inf_{\overline{R}_1^c} I^{(q_\eta)}(x_\mu, \ \Delta^{(q_\eta)}, q_\eta, \varepsilon). \quad (25)$$

2. Минимизация вычислительной сложности АМО. Для решения подобных задач применяют современные и достаточно эффективные алгоритмы случайного поиска глобального в замкнутой области экстремума многомерных нелинейных невыпуклых функций, которые позволяют с некоторой вероятностью попасть в область, максимально приближенную к $I_{\text{inf}}^{(q_\eta)}$ [18, 24, 27–29]. Введем обозначения:

$$I^{(q_\eta)}(x_\mu, \Delta^{(q_\eta)}, q_\eta, \varepsilon) = I^{(q_\eta)}(X^{(q_\eta)}, q_\eta), \quad X^{(q_\eta)} = (x_\mu, \Delta^{(q_\eta)}, \varepsilon),$$
$$F\big(M, u(\Delta^{(q_\eta)})\big) = F(x_\mu, u(\Delta^{(q_\eta)}), \Delta^{(q_\eta)}), \quad M = (x_\mu, \Delta^{(q_\eta)}) = (x_\mu, \varphi_0^{(q_\eta)}).$$

За основу возьмем вычислительную процедуру решения задачи (25), построенную на комбинации алгоритма Ψ-преобразования (алгоритм случайного поиска), предложенного В. К. Чичинадзе [18], и метода Дж. Недлера и Р. Мида [22], который представляет собой улучшенный вариант симплекс-метода. Метод Ψ-преобразования, не будучи методом прямого случайного поиска, обладает всеми общими свойствами алгоритмов случайного поиска, поэтому выводы, полученные ниже, применимы для широкого круга вычислительных процедур, основанных на алгоритмах случайного поиска. Сущность процедуры сводится к преобразованию минимизируемой многомерной функции (23) в одномерную непрерывную, монотонно убывающую численно заданную метрику $\Psi(\varsigma)$, нуль которой соответствует значению $I_{\Psi}^{(q_\eta)}(X_{\Psi}^{(q_\eta)}, q_\eta)$, лежащему в области, максимально приближенной к $I_{\inf}^{(q_\eta)}$. Точка $X_{\Psi}^{(q_\eta)}$ затем используется как опорная для построения симплекса в методе Недлера—Мида, который применяется для улучшения результата поиска к $I_{\inf}^{(q_\eta)}(X_{\inf}^{(q_\eta)}, q_\eta)$.

Основные вычислительные затраты при применении процедуры имеют место на этапе подготовки данных для алгоритма Ψ-преобразования, на котором производят вычисление $I^{(q_\eta)}(X^{(q_\eta)}, q_\eta)$ в S случайно либо регулярно, но обязательно равномерно распределенных в области R_1^c точках:

$$X_k^{(q_\eta)} \in R_1^c, \quad k = \overline{1, S},$$

которые используются как базис для поиска. Плотность $\rho_X^{(q_\eta)}$ точек $X_k^{(q_\eta)}$ в области R_1^c напрямую влияет на погрешность алгоритма поиска экстремума. При $\rho_X^{(q_\eta)} \to \infty$, $I^{(q_\eta)} \to I_{\inf}^{(q_\eta)}$ с координатами $X_{\inf}^{(q_\eta)} = \arg \min\limits_{X_k^{(q_\eta)}} I^{(q_\eta)}(X_k^{(q_\eta)}, q_\eta)$.

Из (24) видно, что размерность $c_1^{(q_\eta)}$ области R_1^c возрастает при увеличении количества параметров управления q_η. При этом погрешность алгоритма поиска экстремума не должна увеличиваться, иначе говоря:

$$\rho_X^{(q_\eta)} \geqslant \rho_X^{(q_\eta - 1)}. \tag{26}$$

В случае регулярного и равномерного распределения точек $X_k^{(q_\eta)}$ в области R_1^c плотность

$$\rho_X^{(q_\eta)} \sim N^{(q_\eta)} = \sqrt[c_1^{(q_\eta)}]{S^{(q_\eta)}},$$

где $N^{(q_\eta)}$ — количество отрезков, на которые разделяются диапазоны аргументов в области R_1^c. Таким образом, $N^{(q_\eta)} = N^{(q_\eta - 1)}$. Это означает, что с увеличением q_η количество точек S (для сохранения точности вычислений) должно возрастать в соответствии с формулой

$$S^{(q_\eta)} = \left(\sqrt[c_1^{(q_\eta - 1)}]{S^{(q_\eta - 1)}}\right)^{c_1^{(q_\eta)}}.$$

Для вычисления оценки (23) в каждой точке из множества $X_k^{(i)}$ мы должны вычислить $F(M^{(q_\eta)})$ $2(c_1^{(q_\eta)} - 1)$ раз, т.е. количество обращений к модели (3)–(8) для однократного решения задачи оптимального управления при определении параметров $\Delta^{(q_\eta)}$ составит величину, равную

$$2(c_1^{(q_\eta)} - 1)\left(\sqrt[c_1^{(q_\eta - 1)}]{S^{(q_\eta - 1)}}\right)^{c_1^{(q_\eta)}},$$

а общее количество обращений к модели (3)–(8) для достижения $\varepsilon_{\inf}$ составит величину

$$S_F^{\text{be}} = 2(c_1^{(1)} - 1)S^{(1)} + \sum_{q_\eta = 2}^{n+1} 2(c_1^{(q_\eta)} - 1)\left(\sqrt[c_1^{(q_\eta - 1)}]{S^{(q_\eta - 1)}}\right)^{c_1^{(q_\eta)}},$$

при этом $\rho_X = \rho_X^{(q_\eta)} = \text{const}$. Вычислительная сложность [30] процедуры АМО

$$O_{\text{be}} = O\big(F\big(x, u(\Delta^{(q_\eta)})\big)\big) \cdot S_F^{\text{be}}. \tag{27}$$

Очевидно, что вычислительная сложность определяется в основном необходимостью рассматривать заведомо не используемые в процедуре оптимизации точки при обращении к условиям связи (8) — математической модели объекта оптимизации. В условиях бесконечного числа ограничений, особенно при численном моделировании, это обстоятельство существенно осложняет и затягивает процесс поиска экстремума функционала (25), который и без того сложный в силу негладкости и невыпуклости функционала. Однако процесс обращения к модели можно упорядочить, если использовать параметрический характер управления (14) и свойства результирующих распределений управляемой субстанции, установленные АМО [1]. Присваивая точкам дискретизации $F(x, u(\Delta))$ в (4) соответствующие этим параметрам и свойствам общие признаки, удается подготовить условия связи (8) к использованию в многократном обращении в процедуре оптимизации и тем самым сэкономить вычислительные ресурсы.

Для снижения вычислительных затрат рассмотрим $F(M, u(\Delta^{(q_\eta)}))$ с учетом представления функции управления в форме (17), (18). Изначально вектор параметров $\Delta^{(q_\eta)}$ неизвестен, однако известно, что в любой заданной точке M значения функций управления $u(\Delta)$ принадлежат множеству $V_z = (u^{(1)}, \ldots, u^{(\iota)})$, а значит, $F(M, u(\Delta^{(q_\eta)}))$ принимает одно из значений

$$F(M, u(\Delta^{(q_\eta)})) \in (F(M, u_1), \ldots, F(M, u_\iota)) = \\ = (F_1(M), \ldots, F_\iota(M)) = F^*(M), \tag{28}$$

которые могут быть вычислены без определения конкретного значения вектора $\Delta^{(q_\eta)}$.

Тогда с учетом (28) выполним вычислительную процедуру АМО по следующему алгоритму.

1. Подготовим S_M точек $M_n = (x, \varphi_0)$, $n = \overline{1, S_M}$, которые распределим в области $R_F = (x \in \overline{\Omega}_m, \varphi_0 \in \overline{G})$, $c_F = \dim R_F$ равномерно и регулярно:
   1.1) выберем S_M и вычислим $N = \sqrt[c_F]{S_M}$;
   1.2) диапазоны аргументов $x_j \in \overline{\Omega}_j$ (7) в области R_F разбиваем на N равных отрезков с шагом $\delta_j = (x_j^{\max} - x_j^{\min})/N$, $j = \overline{1, m}$;
   1.3) диапазон аргумента $\varphi_0 \in \overline{G}$ (12) в области R_F разбиваем на N равных отрезков с шагом $\delta_{\varphi_0} = (\varphi_{\max} - \varphi_{\min})/N$;
   1.4) формируем упорядоченные счетные множества

   $$L_j = \{x_{j1}, x_{j2}, \ldots, x_{j\gamma}, \ldots, x_{jN}\} \subset \overline{\Omega}_j,$$

   где $x_{j1} = x_j^{\min}$, $x_{j\gamma} = x_{j(\gamma-1)} + \delta_j$, $\gamma = \overline{1, N}$;
   1.5) формируем множество $X_\Sigma = (x_{\text{calc}}^1, \ldots, x_{\text{calc}}^\varsigma, \ldots, x_{\text{calc}}^\Sigma)$ векторов аргументов x: $x_{\text{calc}}^\varsigma = (x_1^{\text{calc}}, \ldots, x_j^{\text{calc}}, \ldots, x_m^{\text{calc}}) \in \overline{\Omega}_m$, $x_j^{\text{calc}} = x_{j\gamma} \in L_j \subset \overline{\Omega}_j \subset \overline{\Omega}_m$, $j = \overline{1, m}$, $\Sigma = N^m$;

1.6) формируем упорядоченное счетное множество

$$\Phi_0 = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_\rho, \ldots, \varphi_n\} \subset \overline{G},$$

где $\varphi_1 = \varphi_{\min}$, $\varphi_\rho = \varphi_{\rho-1} + \delta_{\varphi_0}$, $\rho = 1, 2, \ldots, N$;

1.7) готовим S_M точек $M_n = (x \in X_\Sigma, \varphi_0 \in \Phi_0), M^{\varsigma\rho} = (\varsigma, \rho)$, $\varsigma = \overline{1, \Sigma}$, $\rho = \overline{1, N}$.

2. Вычисляем $F^*(M_n)$ по (28) в каждой точке M_n и ставим в соответствие этой точке массив $F_{\varsigma\rho} = [F^*(M_n), M^{\varsigma\rho}]$, $\varsigma = \overline{1, \Sigma}, \rho = \overline{1, N}$.
3. Приступаем к решению задачи оптимального управления:

3.1) устанавливаем $q_\eta = 1$;

3.2) задаем точки $X_k^{(q_\eta)} = \left(x_\mu, \Delta^{(q_\eta)}, \varepsilon\right)$ таким образом, что $x_\mu = x^\varsigma_{\text{calc}} \in X_\Sigma$ и $\Delta^{(q_\eta)} \in \Phi_0$, фиксируем индексы $\Sigma_k = (\varsigma_1, \ldots, \varsigma_R)$, с учетом условия (12) определяем индекс ρ вхождения $\varphi_0 = \sum_{k=1}^{q_\eta} \Delta_k^{(q_\eta)} \in \Phi_0$ и создаем массивы $X_{\varsigma\rho} = [X_k^{(q_\eta)}, \Sigma_k, \rho]$. Тогда на основе множеств X_Σ, Φ_0 получим количество возможных точек $X_k^{(q_\eta)}$:

$$S^{(q_\eta)} = N^{mR}\left(\prod_{j=1}^{q_\eta} (N - (j-1))\right), \tag{29}$$

которое возрастает по мере увеличения количества q_η параметров управления Δ в (14) с учетом (16). Таким образом, требование (26) к точности выполняется. Однако следует учитывать, что при $q_\eta \geqslant N \quad S^{(q_\eta)} \leqslant 0$, т.е. алгоритм вырождается и выполнить процедуру минимизации становится невозможным. Поэтому следует выбирать такие S_M, при которых $n + 1 \ll N$, что позволит гарантировать возможность минимизации оценки (23) даже в случае неверной первоначальной оценки n;

3.3) по имеющимся индексам ρ, ς из $X_{\varsigma\rho}$ получаем набор массивов $F_{\varsigma\rho}$, из которых получаем множества

$$F = (F_1, \ldots, F_\mu, \ldots, F_R), \quad \partial F = (\partial F_1, \ldots, \partial F_\upsilon, \ldots, \partial F_r),$$

$$\partial F_\upsilon = \partial F(x_\upsilon)/x_\upsilon, \quad x_\upsilon \in x_\mu,\ \upsilon = \overline{1, r},\ \mu = \overline{1, R},$$

соответствующие каждому $X_{\varsigma\rho}$. Вычислительная сложность формирования множеств $O(F) = N + RN + q_\eta RN^2$, $O(\partial F) = 4O(F)$ [30];

3.4) подставляем члены множеств F и ∂F в (23) и получаем значения $I^{(q_\eta)}(X_k^{(q_\eta)}, q_\eta)$;

3.5) решаем задачу (25) и получаем параметры q_η-го класса управления $\Delta^{(q_\eta)}$ и максимальную достижимую в этом классе погрешность $\varepsilon_{\min}^{(q_\eta)}$;

3.6) если $q_\eta = 1$, то присваиваем новое значение переменной $q_\eta = 2$ и переходим к пункту 3.2;

3.7) если $\varepsilon_{\min}^{(q_\eta - 1)} > \varepsilon_{\min}^{(q_\eta)}$, то увеличиваем q_η на 1 и переходим к пункту 3.2;

3.8) если $\varepsilon_{\min}^{(q_\eta-1)} \leqslant \varepsilon_{\min}^{(q_\eta)}$, то $\varepsilon_{\min}^{(q_\eta-1)} = \varepsilon_{\inf}$ и вычислительная процедура АМО завершена.

При этом получим не более $S_I = \sum_{q_\eta=1}^{n+1} S^{(q_\eta)}$ точек оценки (23). Теперь вычислительная сложность [30] процедуры АМО составляет

$$O_{\text{aft}} = 2S_M \cdot O\big(F\big(x, u(\Delta^{(q_\eta)})\big)\big) + S_I \cdot (R + r + 4 + 5N + 5RN + 5q_\eta RN^2). \quad (30)$$

Таким образом, с учетом (27) и (30) вычислительная сложность процедуры АМО уменьшается в пропорции

$$H = \frac{O_{\text{be}}}{O_{\text{aft}}} = \frac{S_F^{\text{be}}}{2S_M + \dfrac{S_I \cdot (R + r + 4 + 5N + 5RN + 5q_\eta RN^2)}{O\left(F\left(x, u(\Delta^{(q_\eta)})\right)\right)}}.$$

3. Пример применения вычислительного алгоритма АМО. В качестве тестовой задачи выбрана известная задача оптимального управления процессом индукционного нагрева бесконечного цилиндрического стержня (9)–(11) [11]. При условиях $\Theta_0(l) \equiv \Theta_0 = \Theta_a = \text{const}$, $\mathsf{Bi} = 0.7$, $\Theta^*(l) = \Theta^* = 0.5$ решение краевой задачи (9)–(11) принимает вид

$$\Theta(l, \varphi) \equiv \Theta(l, \Delta) = \Theta_0 + u_{\max} \sum_{m=1}^{N} (-1)^{m+1} \Lambda\bigg(l, \sum_{i=m}^{N} \Delta_i\bigg),$$

где

$$\Lambda(l, \varphi) = u_{\max} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2W_n(\xi) K(\mu_n l)}{(\mu_n^2 + \mathsf{Bi}^2) K_1^2(\mu_n)} (1 - e^{-\mu_n^2 \varphi});$$

$K(\mu_n l) = J_0(\mu_n l)$, $K_1(\mu_n) = J_1(\mu_n)$ — функции Бесселя нулевого и первого порядка;

$$W_n(\xi) = \int_0^1 W_n^*(\xi, l) l K(\mu_n l) dl, \quad W_n^*(\xi, l) = \xi \frac{\operatorname{ber}'^2(\xi l) + \operatorname{bei}'^2(\xi l)}{\operatorname{ber}(\xi) \operatorname{ber}'(\xi) + \operatorname{bei}(\xi) \operatorname{bei}'(\xi)};$$

$\operatorname{ber}(\xi)$, $\operatorname{ber}'(\xi)$, $\operatorname{bei}(\xi)$, $\operatorname{bei}'(\xi)$ — функции Кельвина и их первые производные;

$$F(x, \Delta^{(i)})\big|_{x=l} = \big|\Theta(l, \varphi_0^{(i)}, \Delta^{(i)}) - \Theta^*(l)\big|, \quad l \in [0, 1].$$

Решение задачи (9)–(11) с заданными выше условиями при $\xi = 4$ известно [11]: $\Delta_1^{(1)} = 0.349$, $\Delta_1^{(2)} = 0.35$, $\Delta_2^{(2)} = 0.04$.

Численное решение $\Delta_1^{(1)} = 0.3475$, $\Delta_1^{(2)} = 0.3506$, $\Delta_2^{(2)} = 0.0403$, основанное на комбинации алгоритма Ψ-преобразования [18] и алгоритма Дж. Недлера и Р. Мида [22], получено на компьютере с процессором `Intel Core i7` 2-го поколения, ОЗУ 6 Gb, за 37 минут. Всего рассчитано 1 070 067 значений $F(x, \varphi) = \Theta(l, \varphi)$.

После минимизации вычислительной сложности процедуры АМО по предлагаемому алгоритму на том же компьютере получено то же решение $\Delta_1^{(1)} = 0.3475$, $\Delta_1^{(2)} = 0.3506$, $\Delta_2^{(2)} = 0.0403$ всего за 4 минуты. Всего было рассчитано 267 значений $F(x, \varphi) = \Theta(l, \varphi)$.

Таким образом, для типовой тестовой задачи (9)–(11) достигнут 9-кратный выигрыш в производительности алгоритма по времени исполнения. Из (29) видно, что при большей сложности модели и мощности множества параметров управления Δ эффективность предложенного алгоритма повышается.

В обоих случаях 67 значений $\Theta(l, \varphi)$ были рассчитаны при выполнении алгоритма Недлера—Мида [22]. Вычисление дополнительных значений $\Theta(l, \varphi)$ оказалось необходимым для уточнения значения оценки (23) глобального минимума (25) при удовлетворении длины $\delta_\Delta^{(q_\eta)}$ ребра симплекса условию

$$\delta_\Delta^{(q_\eta)} < \sqrt{q_\eta \delta_{\varphi_0}^2 + R \sum_{j=1}^{m} \delta_j^2}.$$

Заключение. Использование предложенного алгоритма снижения вычислительной сложности процедуры АМО:

1) существенно сокращает вычислительные затраты на поиск оптимального управления за счет минимизации количества обращений к модели объекта управления и многократного повторного использования точек M_n и массивов $F_{\varsigma\rho}$;
2) позволяет выполнять процедуру АМО на сравнительно небольшом количестве заданных точек модели объекта управления без дополнительных обращений к модели, что особенно важно для численно заданных математических моделей;
3) применение предлагаемого алгоритма не увеличило погрешность решения задачи оптимального управления по процедуре АМО;
4) эффективность предлагаемого алгоритма повышается с увеличением вычислительной сложности модели объекта управления и мощности множества параметров управления Δ.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17–08–00593).

Библиографический список

1. Рапопорт Э. Я. *Альтернансный метод в прикладных задачах оптимизации*. М.: Наука, 2000. 335 с.
2. Рапопорт Э. Я. Полубесконечная оптимизация управляемых систем в условиях ограниченной неопределенности // *Известия Самарского научного центра РАН*, 2000. Т. 2, № 1. С. 81–88.
3. Лившиц М. Ю. Системная оптимизация процессов тепло- и массопереноса технологической теплофизики // *Математические методы в технике и технологиях — ММТТ*, 2016. № 11(93). С. 104–114.
4. Livshitc M. Yu., Yakubovich E. A. Optimal Control of Technological Process of Carburization of Automotive Gears // *Materials Science Forum*, 2016. vol. 870. pp. 647–653. doi: 10.4028/www.scientific.net/MSF.870.647.

5. Горбунов В. К. Метод параметризации задач оптимального управления // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1979. Т. 19, № 2. С. 292–303.
6. Jongen H. T., Twilt F., Weber G. W. Semi-infinite optimization: Structure and stability of the feasible set // *J. Optim. Theory Appl.*, 1992. vol. 72, no. 3. pp. 529–452. doi: 10.1007/BF00939841.
7. Felgenhauer U. Structural properties and approximation of optimal controls // *Nonlinear Analysis*, 2001. vol. 47, no. 3. pp. 1869–1880. doi: 10.1016/S0362-546X(01)00317-0.
8. Polak E., Mayne D. Q., Stimler D. M. Control system design via semi-infinite optimization: A review // *Proceedings of the IEEE*, 1984. vol. 72, no. 12. pp. 1777–1794. doi: 10.1109/PROC.1984.13086.
9. *Semi-Infinite Programming and Applications*: An International Symposium, Austin, Texas, September 8–10, 1981 / Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. vol. 215 / eds. A. V. Fiacco, K. O. Kortanek, 1983. xi+324 pp. doi: 10.1007/978-3-642-46477-5.
10. Polak E. Semi-Infinite Optimization / *Optimization* / Applied Mathematical Sciences, 124. New York: Springer, 1997. pp. 368–481. doi: 10.1007/978-1-4612-0663-7_3.
11. Rapoport E. Ya., Pleshivtseva Yu. E. *Optimal Control of Induction Heating Processes* / Mechanical Engineering. New York: CRC Press, 2006. v+349 pp. doi: 10.1201/9781420019490.
12. Деревянов М. Ю., Лившиц М. Ю., Федорченко Д. М. Оптимальное управление вакуумной цементацией по критериям энергоэффективности // *Омский научный вестник*, 2010. Т. 93, № 3. С. 169–173.
13. Бутковский А. Г. *Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами*. М.: Наука, 1965. 474 с.
14. Рапопорт Э. Я., Митрошин В. Н., Кретов Д. И. Оптимальное управление процессом охлаждения полимерной кабельной изоляции при ее наложении на экструзионной линии // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2006. № 43. С. 146–153. doi: 10.14498/vsgtu465.
15. Livshitc M. Yu., Sizikov A. P. Multi-Criteria Optimization of Refinery // *EPJ Web of Conferences*, 2016. vol. 110, Thermophysical Basis of Energy Technologies 2015, 01035. doi: 10.1051/epjconf/201611001035.
16. Warga J. *Optimal control of differential and functional equations*. New York, London: Academic Press, 1972. xiii+531 pp. doi: 10.1016/C2013-0-11669-8.
17. Hartmann A. K., Rieger H. *Optimization algorithms in physics*. Berlin: Wiley-VCH, 2002. x+372 pp.
18. Chichinadze V. K. Solution of nonlinear nonconvex optimization problems by Ψ-transformation method // *Computers, Math. Applic.*, 1991. vol. 21, no. 6/7. pp. 7–15. doi: 10.1016/0898-1221(91)90156-X.
19. Spall J. C. *Introduction to stochastic search and optimization. Estimation, simulation, and control* / Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization. vol. 65. New York: Wiley, 2003. xx+595 pp. doi: 10.1002/0471722138.
20. *Handbook of simulation optimization* / International Series in Operations Research and Management Science / ed. M. C. Fu. New York: Springer, 2015. xvi+387 pp. doi: 10.1007/978-1-4939-1384-8.
21. Растригин Л. А. *Статистические методы поиска*. М.: Наука, 1968. 376 с.
22. Nelder J. A., Mead R. A simplex method for function minimization // *Comp. J.*, 1965. vol. 7, no. 4. pp. 308–313. doi: 10.1093/comjnl/7.4.308.
23. Gill P., Murray W., Wright M. *Practical optimization*. New York: Academic Press, 1981. xvi+401 pp.
24. Самарский А. А. *Введение в численные методы*. М.: Наука, 1997. 240 с.
25. Dem'yanov V. F., Rubinov A. M. *Approximate methods in optimization problems*. New York: American Elsevier Publ. Comp., Inc., 1970. ix+256 pp.
26. Васильев Ф. П. *Численные методы решения экстремальных задач*. М.: Наука, 1980. 520 с.

27. Di Loreto M., Damak S., Eberard D., Brun X. Approximation of linear distributed parameter systems by delay systems // *Automatica*, 2016. vol. 62. pp. 162–168. doi: 10.1016/j.automatica.2016.01.065.
28. Захарова Е. М., Минашина И. К. Обзор методов многомерной оптимизации // *Информационные процессы*, 2014. Т. 14, № 3. С. 256–274, http://www.jip.ru/2014/256-274-2014.pdf.
29. Дилигенский Н. В., Ефимов А. П. Решение задачи недифференцируемой оптимизации для объекта с распределёнными параметрами на основе приближенной квазиасимптотической модели // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2011. № 4(25). С. 118–124. doi: 10.14498/vsgtu1019.
30. Arora S., Barak B. *Computational Complexity: A Modern Approach*. Cambridge: Cambridge University Press, 2009. xxiv+579 pp. doi: 10.1017/CBO9780511804090.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 2, pp. 361–377
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1681

MSC: 65K05, 93B40

Effective computational procedure of the alternance optimization method

M. Yu. Livshits, A. V. Nenashev

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

The article discusses the computational procedure of the alternance optimization method as applied to the problem of semi-infinite programming. These problems are reduced numerous applied problems of optimization of objects with distributed and lumped parameters: robust parametric optimization of dynamic systems, parametric synthesis of control systems, etc. Since the calculation of alternance optimization method is rather difficult, as reduced to the solution, as a rule, the transcendental system of constitutive equations is proposed for efficient computational complexity of an embodiment of a computational procedure.

To reduce the complexity of the computational procedure, the properties of the extremum points of the optimality criterion established in the alternance method are used in the region of permissible values of variables. These properties allow creating a topology of this area and thereby minimizing the number of references to it during the search procedure. The proposed computational method is especially effective for non-convex and nonsmooth optimality criteria, to which the technologically sound statements of semi-infinite optimization result.

A step-by-step algorithm for preparing data and performing calculations, suitable for implementation in most programming languages, has been developed. The efficiency of the algorithm, which is higher, the larger the number of parameters included in the control vector and the higher the dimension of the optimization domain, is investigated. An estimate of the computational complexity of the computational procedure of the alternance optimization method is proposed, which makes it possible to determine the effectiveness of the application of the proposed algorithm for solving the problem of optimal control of the technological control object.

Research Article

Please cite this article in press as:
Livshits M. Yu., Nenashev A. V. Effective computational procedure of the alternance optimization method, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 2, pp. 361–377. doi: 10.14498/vsgtu1681 (In Russian).

Authors' Details:

Mikhail Yu. Livshits https://orcid.org/0000-0003-4417-6158
Doctor of Technical Sci., Professor; Head of Department; Dept. of Management and System Analysis of Thermal Power and Sociotechnical Complexes; e-mail: usat@samgtu.ru

Alexey V. Nenashev https://orcid.org/0000-0003-1348-1766
Postgraduate Student; Dept. of Management and System Analysis of Thermal Power and Sociotechnical Complexes; e-mail: alexvlnenashev@gmail.com

Keywords: mathematical programming, nonconvex problem, optimal control, parameterization, search procedure.

Received: 13th March, 2019 / Revised: 14th May, 2019 / Accepted: 10th June, 2019 / First online: 3rd July, 2019

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 17–08–00593).

References

1. Rapoport E. Ya. *Al'ternansnyi metod v prikladnykh zadachakh optimizatsii* [The alternance method in applied problems of optimization]. Moscow, Nauka, 2000, 335 pp. (In Russian)
2. Rapoport E. Ya. Semi-infinite optimization of controlled systems under conditions of the bounded uncertainty, *Izvestia of Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences*, 2000, vol. 2, no. 1, pp. 81–88 (In Russian).
3. Livshits M. Yu. System optimization of processes of heat and mass transfer of technological thermophysics, *Matem. Metody Tekhn. Tekhnol. — MMTT*, 2016, no. 11(93), pp. 104–114 (In Russian).
4. Livshitc M. Yu., Yakubovich E. A. Optimal Control of Technological Process of Carburization of Automotive Gears, *Materials Science Forum*, 2016, vol. 870, pp. 647–653. doi: 10.4028/www.scientific.net/MSF.870.647.
5. Gorbunov V. K. A method for the parametrization of optimal control problems, *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, 1979, vol. 19, no. 2, pp. 18–30. doi: 10.1016/0041-5553(79)90003-X.
6. Jongen H. T., Twilt F., Weber G. W. Semi-infinite optimization: Structure and stability of the feasible set, *J. Optim. Theory Appl.*, 1992, vol. 72, no. 3, pp. 529–452. doi: 10.1007/BF00939841.
7. Felgenhauer U. Structural properties and approximation of optimal controls, *Nonlinear Analysis*, 2001, vol. 47, no. 3, pp. 1869-1880. doi: 10.1016/S0362-546X(01)00317-0.
8. Polak E., Mayne D. Q., Stimler D. M. Control system design via semi-infinite optimization: A review, *Proceedings of the IEEE*, 1984, vol. 72, no. 12, pp. 1777–1794. doi: 10.1109/PROC.1984.13086.
9. *Semi-Infinite Programming and Applications*, An International Symposium, Austin, Texas, September 8–10, 1981, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, vol. 215, eds. A. V. Fiacco, K. O. Kortanek, 1983, xi+324 pp. doi: 10.1007/978-3-642-46477-5.
10. Polak E. Semi-Infinite Optimization, In: *Optimization*, Applied Mathematical Sciences, 124. New York, Springer, 1997, pp. 368–481. doi: 10.1007/978-1-4612-0663-7_3.
11. Rapoport E. Ya., Pleshivtseva Yu. E. *Optimal Control of Induction Heating Processes*, Mechanical Engineering. New York, CRC Press, 2006, v+349 pp. doi: 10.1201/9781420019490.
12. Derevyanov M. Yu., Livshits M. Yu., Fedorchenko D. M. Optimal control of vacuum cementation by energy efficiency criteria, *Omskii nauchnyi vestnik*, 2010, vol. 93, no. 3, pp. 169–173 (In Russian).
13. Butkovskiy A. G. *Teoriia optimal'nogo upravleniia sistemami s raspredelennymi parametrami* [Theory of Optimal Control of Systems with Distributed Parameters]. Moscow, Nauka, 1965, 474 pp. (In Russian)

14. Rapoport E. Ya., Mitroshin V. N., Kretov D. I. Optimal control of the cooling process of polymer cable insulation when it is laid on an extrusion line, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2006, no. 43, pp. 146–153 (In Russian). doi: 10.14498/vsgtu465.
15. Livshitc M. Yu., Sizikov A. P. Multi-Criteria Optimization of Refinery, *EPJ Web of Conferences*, 2016, vol. 110, Thermophysical Basis of Energy Technologies 2015, 01035. doi: 10.1051/epjconf/201611001035.
16. Warga J. *Optimal control of differential and functional equations*. New York, London, Academic Press, 1972, xiii+531 pp. doi: 10.1016/C2013-0-11669-8.
17. Hartmann A. K., Rieger H. *Optimization algorithms in physics*. Berlin, Wiley-VCH, 2002, x+372 pp.
18. Chichinadze V. K. Solution of nonlinear nonconvex optimization problems by Ψ-transformation method, *Computers, Math. Applic.*, 1991, vol. 21, no. 6/7, pp. 7–15. doi: 10.1016/0898-1221(91)90156-X.
19. Spall J. C. *Introduction to stochastic search and optimization. Estimation, simulation, and control*, Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, vol. 65. New York, Wiley, 2003, xx+595 pp. doi: 10.1002/0471722138.
20. *Handbook of simulation optimization*, International Series in Operations Research and Management Science, ed. M. C. Fu. New York, Springer, 2015, xvi+387 pp. doi: 10.1007/978-1-4939-1384-8.
21. Rastrigin L. A. *Statisticheskie metody poiska* [Statistical search methods]. Moscow, Nauka, 1968, 376 pp. (In Russian)
22. Nelder J. A., Mead R. A simplex method for function minimization, *Comp. J.*, 1965, vol. 7, no. 4, pp. 308–313. doi: 10.1093/comjnl/7.4.308.
23. Gill P., Murray W., Wright M. *Practical optimization*. New York, Academic Press, 1981, xvi+401 pp.
24. Samarskii A. A. *Vvedenie v chislennye metody* [An introduction to numerical methods]. Moscow, Nauka, 1997, 240 pp. (In Russian)
25. Dem'yanov V. F., Rubinov A. M. *Approximate methods in optimization problems*. New York, American Elsevier Publ. Comp., Inc., 1970, ix+256 pp.
26. Vasil'ev F. P. *Chislennye metody resheniia ekstremal'nykh zadach* [Numerical methods for the solution of extremal problems]. Moscow, Nauka, 1980, 520 pp. (In Russian)
27. Di Loreto M., Damak S., Eberard D., Brun X. Approximation of linear distributed parameter systems by delay systems, *Automatica*, 2016, vol. 62, pp. 162–168. doi: 10.1016/j.automatica.2016.01.065.
28. Zakharova E. M., Minashina I. K. Review of multidimensional optimization techniques, *Informatsionnye protsessy*, 2014, vol. 14, no. 3, pp. 256–274 (In Russian), http://www.jip.ru/2014/256-274-2014.pdf.
29. Diligensky N. V., Efimov A. P. Solution of the non-differentiable optimization problem for an object with distributed parameters based on an approximate quasi-asymptotic model, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2011, no. 4(25), pp. 118–124 (In Russian). doi: 10.14498/vsgtu1019.
30. Arora S., Barak B. *Computational Complexity: A Modern Approach*. Cambridge, Cambridge University Press, 2009, xxiv+579 pp. doi: 10.1017/CBO9780511804090.