Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2014. № 3 (36). С. 21–30
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1300
УДК 517.956.328

КРИТЕРИЙ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ВОЛНОВЫМ ОПЕРАТОРОМ

С. А. Алдашев

Казахский национальный педагогический университет им. Абая,
Казахстан, 480100, Алматы, пр. Достык, 114.

Аннотация

В цилиндрической области евклидова пространства для многомерного гиперболического уравнения с волновым оператором рассматривается спектральная задача Дирихле с однородными краевыми условиями. Решение ищется в виде разложения по многомерным сферическим функциям. Доказаны теоремы существования и единственности решения. Получены условия однозначной разрешимости поставленной задачи, которые существенно зависят от «высоты» цилиндра.

Ключевые слова: многомерное гиперболическое уравнение, спектральная задача Дирихле, многомерная цилиндрическая область, разрешимость, единственность.

doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1300

Двумерные спектральные задачи для гиперболических уравнений интенсивно изучаются (см., например работы [1–4]), а их многомерные аналоги [5–7], насколько известно автору, исследованы мало. Это связано с тем, что в случае трёх и более независимых переменных возникают трудности принципиального характера, так как весьма привлекательный и удобный метод сингулярных интегральных уравнений, применяемый для двумерных задач, здесь не может быть использован из-за отсутствия сколько-нибудь полной теории многомерных сингулярных интегральных уравнений. Теория многомерных сферических функций, напротив, достаточно полно изучена. Эти функции имеют важные приложения в математической физике, в теоретической физике и в теории многомерных сингулярных интегральных уравнений. Автор предлагает при решении спектральных задач Дирихле для многомерных гиперболических уравнений с волновым оператором использовать разложения по сферическим функциям.

1. Постановка задачи. Пусть D_α — цилиндрическая область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, \ldots, x_m, t)$, ограниченная цилиндром

$$\Gamma = \{(x, t) : |x| = 1\}$$

Образец для цитирования: Алдашев С. А. Критерий однозначной разрешимости спектральной задачи Дирихле в цилиндрической области для многомерных гиперболических уравнений с волновым оператором // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2014. № 3 (36). С. 21–30. doi: 10.14498/vsgtu1300.

Сведения об авторе: *Серик Аймурзаевич Алдашев* (д.ф.-м.н., проф.; aldash51@mail.ru), заведующий кафедрой, каф. фундаментальной и прикладной математики.

и плоскостями $t=\alpha>0$, $t=0$; здесь $|x|$ — длина вектора $x=(x_1,\dots,x_m)$.

Части этих поверхностей, образующих границу ∂D_α области D_α, обозначим через Γ_α, S_α, S_0 соответственно.

В области D_α рассмотрим взаимно сопряженные многомерные гиперболические уравнения со спектральным действительным параметром γ:

$$Lu \equiv \Delta_x u - u_{tt} + \sum_{i=1}^m a_i(x,t)u_{x_i} + b(x,t)u_t + c(x,t)u = \gamma u, \tag{1}$$

$$L^*\upsilon \equiv \Delta_x \upsilon - \upsilon_{tt} - \sum_{i=1}^m a_i(x,t)\upsilon_{x_i} - b(x,t)\upsilon_t - d(x,t)\upsilon = \gamma \upsilon, \tag{2}$$

где $u=u(x,t)$; $\upsilon=\upsilon(x,t)$; Δ_x — оператор Лапласа по переменным $x_1,\dots,x_m$; $m\geqslant 2$, $d(x,t)=c-\sum_{i=1}^m a_i(x,t)x_i - b_t$.

В качестве многомерной спектральной задачи Дирихле рассмотрим следующую задачу.

Задача D. *Найти решение уравнения* (1) *в области* D_α *из класса* $C^1(\bar\Omega_\alpha)\cap C^2(D_\alpha)$, *удовлетворяющее краевым условиям*

$$u\big|_{S_\alpha}=0, \quad u\big|_{\Gamma_\alpha}=0, \quad u\big|_{S_0}=0. \tag{3}$$

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1,\dots,x_m,t$ к сферическим $r,\theta_1,\dots,\theta_{m-1},t$; $r\geqslant 0$, $0\leqslant\theta_1<2\pi$, $0\leqslant\theta_i\leqslant\pi$, $i=2,3,\dots,m-1$, $\theta=(\theta_1,\dots,\theta_{m-1})$.

Пусть $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ — система линейно независимых сферических функций порядка n; $1\leqslant k\leqslant k_n$; $(m-2)!n!k_n=(n+m-2)!(2n+m-2)$; $W_2^l(S_0)$, $l=0,1,\dots$ — пространства Соболева.

Имеет место следующая лемма [8].

Лемма 1. *Пусть* $f(r,\theta)\in W_2^l(S_0)$. *Если* $l\geqslant m-1$, *то ряд*

$$f(r,\theta)=\sum_{n=0}^\infty\sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta), \tag{4}$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p\leqslant l-m+1$, *сходятся абсолютно и равномерно.*

Лемма 2. *Для того чтобы* $f(r,\theta)\in W_2^l(S_0)$, *необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда* (4) *удовлетворяли неравенствам*

$$|f_0^1(r)|\leqslant c_1, \quad \sum_{n=1}^\infty\sum_{k=1}^{k_n} n^{2l}|f_n^k(r)|^2\leqslant c_2, \quad c_1,\, c_2=\mathrm{const}.$$

Через $\tilde a_{in}^k(r,t)$, $a_{in}^k(r,t)$, $\tilde b_n^k(r,t)$, $\tilde d_n^k(r,t)$, ρ_n^k, обозначим коэффициенты разложения ряда (4) соответственно функций $a_i(r,\theta,t)\rho(\theta)$, $a_i(r,\theta,t)\rho(\theta)x_i/r$, $b(r,\theta,t)\rho(\theta)$, $c(r,\theta,t)\rho(\theta)$, $d(r,\theta,t)\rho(\theta)$, $\rho(\theta)$, $i=1,\dots,m$, причем $\rho(\theta)\in C^\infty(H)$, H — единичная сфера в E_m.

Пусть $a_i(x,t)$, $b(x,t)$, $c(x,t)\in W_2^l(D_\alpha)\subset C(\bar D_\alpha)$, $l\geqslant m+1$, $i=1,\dots,m$. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема.

1) *Если $\gamma \leqslant -\mu_{s,n}^2$, то задача D имеет только нулевое решение.*
2) *При $\gamma > -\mu_{s,n}^2$ задача D имеет только тривиальное решение тогда и только тогда, когда*

$$\sin\alpha\sqrt{\gamma+\mu_{s,n}^2} \neq 0, \quad s=1,2,\ldots, \tag{5}$$

где $\mu_{s,n}$ — положительные нули функций Бесселя первого рода $J_{n+(m-2)/2}(z)$.

2. Разрешимость задачи D. В сферических координатах уравнение (1) имеет вид

$$Lu \equiv u_{rr} + \frac{m-1}{r}u_r - \frac{1}{r^2}\delta u - u_{tt} + \\ + \sum_{i=1}^{m} a_i(r,\theta,t)u_{x_i} + b(r,\theta,t)u_t + c(r,\theta,t)u = \gamma u, \tag{6}$$

где

$$\delta \equiv -\sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j \sin^{m-j-1}\theta_j}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\sin^{m-j-1}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\right),$$

$$g_1 = 1, \quad g_j = (\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{j-1})^2, \quad j>1.$$

Известно [8], что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n+m-2)$, $n=0,1,\ldots$, каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y_{n,m}^k(\theta)$.

Искомое решение задачи D будем искать в виде

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta), \tag{7}$$

где $\bar{u}_n^k(r,t)$ — функции, подлежащие определению.

Подставив (7) в (6), умножив полученное выражение на $\rho(\theta)\neq 0$ и проинтегрировав по единичной сфере H, для $\bar{u}_n^k$ получим [5, 6]

$$\rho_0^1\bar{u}_{0rr}^1 - \rho_0^1\bar{u}_{0tt}^1 + \left(\frac{m-1}{r}\rho_0^1 + \sum_{i=1}^m a_{i0}^1\right)\bar{u}_{0r}^1 + \tilde{b}_0^1\bar{u}_{0t}^1 + \tilde{c}_0^1\bar{u}_0^1 - \gamma\rho_0^1\bar{u}_0^1 + \\ + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\rho_n^k\bar{u}_{nrr}^k - \rho_n^k\bar{u}_{ntt}^k + \left(\frac{m-1}{r}\rho_n^k + \sum_{i=1}^m a_{in}^k\right)\bar{u}_{nr}^k + \tilde{b}_n^k\bar{u}_{nt}^k + \right. \\ \left. + \left[\tilde{c}_n^k - \lambda_n\frac{\rho_n^k}{r^2} + \sum_{i=1}^m(\tilde{a}_{in-1}^k - na_n^k)\right]\bar{u}_n^k - \gamma\rho_n^k\bar{u}_n^k\right\} = 0. \tag{8}$$

Теперь рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$\rho_0^1\bar{u}_{0rr}^1 - \rho_0^1\bar{u}_{0tt}^1 + \frac{(m-1)}{r}\rho_0^1\bar{u}_{0r}^1 = \gamma\rho_0^1\bar{u}_0^1; \tag{9}$$

$$\rho_1^k \bar{u}_{1rr}^k - \rho_1^k \bar{u}_{1tt}^k + \frac{(m-1)}{r}\rho_1^k \bar{u}_{1r}^k - \frac{\lambda_1}{r^2}\rho_1^k \bar{u}_1^k =$$
$$= \gamma \rho_1^1 \bar{u}_1^k - \frac{1}{k_1}\left(\sum_{i=1}^m a_{i0}^1 \bar{u}_{0r}^1 + \tilde{b}_0^1 \bar{u}_{0t}^1 + \tilde{c}_0^1 \bar{u}_0^1\right), \quad n = 1;\ k = 1, \dots k_1; \tag{10}$$

$$\rho_n^k \bar{u}_{nrr}^k - \rho_n^k \bar{u}_{ntt}^k + \frac{m-1}{r}\rho_n^k \bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\rho_n^k \bar{u}_n^k =$$
$$= \gamma \rho_n^k \bar{u}_n^k - \frac{1}{k_n}\sum_{k=1}^{k_{n-1}}\left\{\sum_{i=1}^m a_{in-1}^k \bar{u}_{n-1r}^k + \tilde{b}_{n-1}^k \bar{u}_{n-1t}^k + \right.$$
$$\left. + \left[\tilde{c}_{n-1}^k + \sum_{i=1}^m (\tilde{a}_{in-2}^k - (n-1)a_{n-1}^k)\right]\bar{u}_{n-1}^k\right\}, \quad k = 1, \dots, k_n;\ n = 2, 3, \dots . \tag{11}$$

Суммируя уравнения (10) от 1 до k_1, а уравнения (11) от 1 до k_n, а затем сложив полученное выражение вместе с (9), приходим к уравнению (8).

Отсюда следует, что если $\left\{\bar{u}_n^k\right\}$, $k = 1, \dots, k_n$, $n = 0, 1, \dots$ — решение системы (9)–(11), то оно является и решением уравнения (8).

Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (9)–(11) можно представить в виде

$$\bar{u}_{nrr}^k - \bar{u}_{ntt}^k + \frac{m-1}{r}\bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\bar{u}_n^k = \gamma \bar{u}_n^k + \bar{f}_n^k(r,t), \tag{12}$$

где $\bar{f}_n^k(r,t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, при этом $\bar{f}_0^1(r,t) \equiv 0$.

Далее, из краевого условия (13) в силу (7) будем иметь

$$\bar{u}_n^k(r,\alpha) = 0, \quad \bar{u}_n^k(1,t) = 0, \quad \bar{u}_n^k(r,0) = 0, \quad k = 1, \dots, k_n,\ n = 0, 1, \dots . \tag{13}$$

Произведя замену $\bar{u}_n^k(r,t) = r^{(1-m)/2} u_n^k(r,t)$ в (12), (13), получим

$$L u_n^k \equiv u_{nrr}^k - u_{ntt}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} u_n^k = \gamma u_n^k + f_n^k(r,t), \tag{14}$$
$$u_n^k(r,\alpha) = 0, \quad u_n^k(1,t) = 0, \quad u_n^k(r,0) = 0, \quad k = 1, \dots, k_n,\ n = 0, 1, \dots, \tag{15}$$
$$\bar{\lambda}_n = \frac{[(m-1)(3-m) - 4\lambda_n]}{4}, \quad f_n^k(r,t) = r^{\frac{(m-1)}{2}} \bar{f}_n^k(r,t).$$

Решение задачи (14), (15) будем искать в виде

$$u_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^\infty R_s(r) T_s(t), \tag{16}$$

при этом пусть

$$f_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^\infty a_{ns}^k(t) R_s(r). \tag{17}$$

Подставляя (16) в (14), (15), с учетом (17) получим

$$R_{srr} + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} R_s + (\mu - \gamma) R_s = 0, \quad 0 < r < 1, \tag{18}$$

$$R_s(1) = 0, \quad |R_s(0)| < \infty, \tag{19}$$

$$T_{stt} + \mu T_s(t) = -a_{ns}^k(t), \quad 0 < t < \alpha, \tag{20}$$

$$T_s(\alpha) = T_s(0) = 0. \tag{21}$$

Ограниченным решением задачи (18), (19) является (см. [9])

$$R_s(r) = \sqrt{r} J_\nu(\mu_{s,n} r), \quad 0 < r < 1, \tag{22}$$

где $\nu = n + (m-2)/2$, $\mu = \gamma + \mu_{s,n}^2$.

Общее решение уравнения (20) представимо в виде [9]

$$T_{s,n}(t) = \begin{cases} c_{1s} \cos\sqrt{\mu} t + c_{2s} \sin\sqrt{\mu} t + \dfrac{\cos\sqrt{\mu} t}{\sqrt{\mu}} \displaystyle\int_0^t a_{ns}^k(\xi) \sin\sqrt{\mu}\xi d\xi - \\ \qquad - \dfrac{\sin\sqrt{\mu} t}{\sqrt{\mu}} \displaystyle\int_0^t a_{ns}^k(\xi) \cos\sqrt{\mu}\xi d\xi, \qquad \mu > 0, \\ c_{1s} + c_{2s} t - \displaystyle\int_0^t a_{ns}^k(\xi)(t-\xi) d\xi, \qquad \mu = 0, \\ c_{1s} \operatorname{ch}\sqrt{|\mu|} t + c_{2s} \operatorname{sh}\sqrt{|\mu|} t + \dfrac{\operatorname{ch}\sqrt{|\mu|} t}{\sqrt{|\mu|}} \displaystyle\int_0^t a_{ns}^k(\xi) \operatorname{sh}\sqrt{|\mu|}\xi d\xi - \\ \qquad - \dfrac{\operatorname{sh}\sqrt{|\mu|} t}{\sqrt{|\mu|}} \displaystyle\int_0^t a_{ns}^k(\xi) \operatorname{ch}\sqrt{|\mu|}\xi d\xi, \qquad \mu < 0, \end{cases} \tag{23}$$

где c_{1s}, c_{2s} — произвольные постоянные. Удовлетворяя условию (21), будем иметь

$$\begin{cases} c_{1s} = 0, \quad \sqrt{\mu} c_{2s} \sin\sqrt{\mu}\alpha = \sin\sqrt{\mu}\alpha \displaystyle\int_0^\alpha a_{ns}^k(\xi) \cos\sqrt{\mu}\xi d\xi - \\ \qquad - \cos\mu\alpha \displaystyle\int_0^\alpha a_{ns}^k(\xi) \sin\sqrt{\mu}\xi d\xi, \qquad \mu > 0, \\ c_{2s}\alpha = \displaystyle\int_0^\alpha a_{ns}^k(\xi)(\alpha-\xi) d\xi, \qquad \mu = 0, \\ \sqrt{|\mu|} c_{2s} \operatorname{sh}\sqrt{|\mu|}\alpha = \operatorname{sh}\sqrt{|\mu|}\alpha \displaystyle\int_0^\alpha a_{ns}^k(\xi) \operatorname{ch}\sqrt{|\mu|}\xi d\xi - \\ \qquad - \operatorname{ch}\sqrt{|\mu|}\alpha \displaystyle\int_0^\alpha a_{ns}^k(\xi) \operatorname{sh}\sqrt{|\mu|}\xi d\xi, \qquad \mu < 0. \end{cases} \tag{24}$$

Подставляя (22) в (17), получим

$$r^{-1/2} f_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{ns}^k(t) J_\nu(\mu_{s,n} r). \tag{25}$$

Разложение (25), в котором коэффициенты $a_{ns}^k(t)$ определяются по формуле

$$a_{ns}^k(t) = \frac{2}{[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^2} \int_0^1 \sqrt{\xi} f_n^k(\xi,t) J_\nu(\mu_{s,n}\xi) d\xi, \tag{26}$$

является разложением функции $r^{-1/2}f_n^k(r,t)$ в ряд Фурье—Бесселя [10]. Здесь $\mu_{s,n}$ $s=1,2,\ldots$ — положительные нули функций Бесселя $J_\nu(z)$, расположенные в порядке возрастания их величины.

Из (22), (23), (24) найдем решение задачи (14), (15):

$$u_n^k(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}\sqrt{r}T_{s,n}(t)J_\nu(\mu_{s,n}r), \tag{27}$$

где $a_{ns}^k(t)$ находится из (26).

Следовательно, сначала решив задачу (9), (13) ($n=0$), а затем (10), (13) ($n=1$) и т. д., найдем последовательно все $u_n^k(r,t)$ из (27), $k=1,\ldots,k_n$, $n=0,1,\ldots$.

Итак, в области D_α имеет место выражение

$$\int_H \rho(\theta)(L-\gamma)udH=0. \tag{28}$$

Пусть $f(r,\theta,t)=R(r)\rho(\theta)T(t)$, причем $R(r)\in V_0$, V_0 — плотно в $L_2(0,1)$, $\rho(\theta)\in C^\infty(H)$, $C^\infty(H)$ — плотно в $L_2(H)$, а $T(t)\in V_1$, V_1 — плотно в $L_2(0,\alpha)$. Тогда $f(r,\theta,t)\in\in V$, $V=V_0\otimes H\otimes V_1$ — плотно в $L_2(D_\alpha)$ [11].

Отсюда и из (28) следует

$$\int_{D_\alpha} f(r,\theta,t)(L-\gamma)udD_\alpha=0$$

и

$$Lu=\gamma u \quad \forall\ (r,\theta,t)\in D_\alpha.$$

Таким образом, решением задачи D является функция

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\sum_{s=1}^{\infty} r^{(2-m)/2}T_{s,n}(t)J_{n+(m-2)/2}(\mu_{s,n}r)Y_{n,m}^k(\theta), \tag{29}$$

где $T_{s,n}(t)$ определяется из (23).

Из (5), (24) следует, что $c_{2s}=0$ при $\mu\leqslant 0$, а для $\mu>0$ $c_{2s}=0$, если выполняется условие (5). Следовательно, из (23), (27) следует, что $T_{s,n}(t)=0$ и $u_n^k(r,t)=a_{ns}^k(t)=0$, $s=1,2,\ldots$, $k=1,\ldots,k_n$, $n=0,1,\ldots$.

Далее, из (29), в свою очередь, получим $u=0$ в D_α.

Пусть теперь условие (5) нарушено хотя бы для одного $s=l$. Тогда, если решение задачи D будем искать в виде (7), то приходим к краевой задаче (14), (15). В силу (23), (24) ее решением является функция

$$u_n^k(r,t)=\sqrt{r}\Bigg[\sin\sqrt{\mu}t+\frac{\cos\sqrt{\mu}t}{\sqrt{\mu}}\int_0^t a_{nl}^k(\xi)\sin\sqrt{\mu}\xi d\xi-$$
$$-\frac{\sin\sqrt{\mu}t}{\sqrt{\mu}}\int_0^t a_{nl}^k(\xi)\cos\sqrt{\mu}\xi d\xi\Bigg]J_{n+(m-2)/2}\mu_{l,n}r), \quad \mu=\gamma+\mu_{l,n}^2.$$

Следовательно, нетривиальные решения задачи D записываются в виде ряда

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} n^{-\rho} r^{(1-m)/2} u_n^k(r,t) Y_{n,m}^k(\theta). \tag{30}$$

Учитывая формулу $2J'_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z)$ (см. [10], формула 7.2 (57)), оценки [8, 12]

$$\begin{gathered} J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\Big(z - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\Big) + O\Big(\frac{1}{z^{3/2}}\Big), \quad \nu \geqslant 0; \\ |k_n| \leqslant c_1 n^{m-2}, \quad \Big|\frac{\partial^q}{\partial\theta_j^q} Y_{n,m}^k(\theta)\Big| \leqslant c_2 n^{\frac{m}{2}-1+q}, \\ c_1, c_2 = \mathrm{const}, \quad j = 1,\ldots,m-1, \ q = 0,1,\ldots, \end{gathered} \tag{31}$$

а также леммы, ограничения на коэффициенты уравнения (1), как в [13], можно показать, что если $p > 3m/2$, то функция (30) принадлежит искомому классу $C^1(\bar{D}_\alpha) \cap C^2(D_\alpha)$.

Разрешимость задачи D установлена.

3. Единственность решения задачи D. Сначала построим решение задачи Дирихле для уравнения (2) с условиями

$$v\big|_{S_\alpha \cup \Gamma_\alpha} = 0, \quad v\big|_{S_0} = \tau(r,\theta) = \tau_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \quad k = 1,\ldots k_n, \ n = 0,1,\ldots, \tag{32}$$

где $\bar{\tau}_n^k(r) \in G$, G — множество функций $\tau(r)$ из класса $C^1[0,1])\cap C^2(0,1)$. Множество G плотно всюду в $L_2(0,1)$ [11]. Решение задачи (2), (32) будем искать в виде (7), где функции $\bar{v}_n^k(r,t)$ будут определены ниже. Тогда, аналогично п. 2, функции $\bar{v}_n^k(r,t)$ удовлетворяют системам уравнений (9)–(11), где $\tilde{a}_{in}^k$, a_{in}^k, $\tilde{b}_n^k$ заменены соответственно на $-\tilde{a}_{in}^k$, $-a_{in}^k$, $-\tilde{b}_n^k$, а $\tilde{c}_n^k$ на $\tilde{d}_n^k$, $i = 1,\ldots,m$, $k = 1,\ldots,k_n$, $n = 0,1,\ldots$.

Из краевого условия (13) в силу (7) получим

$$\bar{v}_n^k(r,\alpha) = \bar{v}_n^k(1,t) = 0, \quad \bar{v}_n^k(r,0) = \bar{\tau}_n^k(r), \quad k = 1,\ldots,k_n, \ n = 0,1,\ldots . \tag{33}$$

Как ранее замечено, каждое уравнение системы (9)–(11) представимо в виде (12).

Далее задача (12), (33) решается аналогично тому, как решалась задача (14), (15) из п. 2.

Таким образом, в виде ряда (29) построено решение задачи (2), (32) , которая в силу оценок (31), как показано в [13], принадлежит классу $C^1(\bar{D}_\alpha)\cap C^2(D_\alpha)$.

Из определения сопряженных операторов L, L^* [14]

$$vLu - uL^*v = -vP(u) + uP(v) - uvQ,$$

где

$$P(u) = \sum_{i=1}^{m} u_{x_i}\cos(N^\perp, x_i) - u_t\cos(N^\perp, t),$$

$$Q = \sum_{i=1}^{m} a_i \cos(N^{\perp}, x_i) - b\cos(N^{\perp}, t),$$

$N^{\perp}$ — внутренняя нормаль к границе ∂D_α, по формуле Грина имеем

$$\int_{D_\alpha} (vLu - uL^* v)\, dD_\alpha = \int_{\partial D_\alpha} \left[\left(v\frac{\partial u}{\partial N} - u\frac{\partial v}{\partial N} \right) M + uvQ \right] ds, \tag{34}$$

где

$$\frac{\partial}{\partial N} = \sum_{i=1}^{m} \cos(N^{\perp}, x_i)\frac{\partial}{\partial x_i} - \cos(N^{\perp}, t)\frac{\partial}{\partial t},$$

$$M^2 = \sum_{i=1}^{m} \cos^2(N^{\perp}, x_i) + \cos^2(N^{\perp}, t).$$

Из (34), принимая во внимание граничные условия (3) и условия (32), получим

$$\int_{S_0} \tau(r,\theta) u_t(r,\theta,0) ds = 0. \tag{35}$$

Поскольку линейная оболочка системы функций $\{\bar{\tau}_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta)\}$ плотна в $L_2(S_0)$ [11], из (35) заключаем, что $u_t(r,\theta,0) = 0 \ \forall \ (r,\theta) \in S_0$.

Следовательно, в силу единственности решения задачи Коши $u(x,0) = u_t(x,0) = 0$ для уравнения (1) [14] будем иметь $u(x,t) = 0 \ \forall \ (x,t) \in D_\alpha$. Таким образом, единственность решения задачи D показана. Теорема доказана полностью.

В заключение отметим, что при $\gamma = 0$ теорема согласуется с результатами работ [13, 15]

ORCID
Serik Aldashev: http://orcid.org/0000-0002-8223-6900

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Моисеев Е. И. *Уравнения смешанного типа со спектральным параметром.* М.: МГУ, 1988. 150 с.
2. Кальменов Т. Ш. *Краевые задачи для линейных уравнений в частных производных гиперболического типа.* Шымкент: Гылым, 1993. 328 с.
3. Хе К. Ч. О собственных функциях однородных краевых задач для эллиптического уравнения с операторами Бесселя / *Неклассич. уравнения матем. физ.*. Новосибирск: ИМ СО РАН, 2000. 128–135 с.
4. Сабитов К. Б., Ильясов Р. Р. О некорректности краевых задач для одного класса гиперболических уравнений // *Изв. вузов. Матем.*, 2001. № 5. С. 59–63.
5. Алдашев С. А. Спектральные задачи Дарбу–Проттера для одного класса многомерных гиперболических уравнений // *Укр. мат. ж.*, 2003. Т. 55, № 1. С. 100–107.
6. Алдашев С. А. Критерий существования собственных функций спектральной задачи Дарбу–Проттера для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений // *Диффер. уравн.*, 2005. Т. 41, № 6. С. 795–801.
7. Алдашев С. А. Критерий существования собственных функций спектральных задач Дарбу–Проттера для многомерного уравнения Эйлера–Дарбу–Пуассона // *Изв. вузов. Матем.*, 2006. № 2. С. 3–10.

8. Михлин С. Г. *Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения.* М.: Физматгиз, 1962. 254 с.
9. Камке Э. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.* М.: Наука, 1965. 703 с.
10. Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции.* Т. 2. М.: Наука, 1966. 296 с.
11. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* М.: Наука, 1972. 496 с.
12. Тихонов А. Н., Самарский А. А. *Уравнения математической физики.* М.: Наука, 1972. 736 с.
13. Алдашев С. А. Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для многомерных гиперболических уравнений с волновым оператором // *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, 2011. Т. 13, № 1. С. 21–29.
14. Смирнов В. И. *Курс высшей математики.* Т. 4, Ч. 2. М.: Наука, 1981. 550 с.
15. Aldashev S. A. The Well-Posedness of the Dirichlet Problem in the Cylindric Domain for the Multidimensional Wave Equation // *Mathematical Problems in Engineering*, 2010. vol. 2010, 653215. 7 pp.. doi: 10.1155/2010/653215.

Поступила в редакцию 04/III/2014;
в окончательном варианте — 26/V/2014;
принята в печать — 27/VIII/2014.

Vestn. Samar. Gos. Techn. Un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki. 2014. Issue 3 (36). Pp. 21–30
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci. 2014. Issue 3 (36). Pp. 21–30]

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) **doi:** http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1300

MSC: 35L05, 35R25, 35A01, 35A02

A CRITERION FOR THE UNIQUE SOLVABILITY OF THE DIRICHLET SPECTRAL PROBLEM IN A CYLINDRICAL DOMAIN FOR MULTIDIMENSIONAL HYPERBOLIC EQUATIONS WITH WAVE OPERATOR

S. A. Aldashev

Kazakh National Pedagogical University,
114, prosp. Dostyk, Almaty, 480100, Kazakhstan.

Abstract

We consider the Dirichlet spectral problem with the homogeneous boundary conditions in a cylindrical domain of Euclidean space for multidimensional hyperbolic equation with wave operator. We construct the solution as an expansion in multidimensional spherical functions; prove the existence and uniqueness theorems. The obtained conditions of the problem unique solvability essentially depend on the “height” of the cylinder.

Keywords: multidimensional hyperbolic equation, Dirichlet spectral problem, multidimensional cylindrical domain, solvability, uniqueness.

doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1300

How to cite Reference: Aldashev S. A. A criterion for the unique solvability of the Dirichlet spectral problem in a cylindrical domain for multidimensional hyperbolic equations with wave operator, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2014, no. 3 (36), pp. 21–30. doi: 10.14498/vsgtu1300. (In Russian)
Author Details: *Serik A. Aldashev* (Dr. Phys. & Math. Sci.; aldash51@mail.ru), Head of Dept., Dept. of Fundamental and Applied Mathematics.

ORCID
Serik Aldashev: http://orcid.org/0000-0002-8223-6900

REFERENCES

1. Moiseev E. I. *Uravneniya smeshannogo tipa so spektral'nym parametrom* [Equations of mixed type with a spectral parameter]. Moscow, Moscow State Univ. Publ., 1988, 150 pp. (In Russian)
2. Kal'menov T. Sh. *Kraevye zadachi dlia lineinykh uravnenii v chastnykh proizvodnykh giperbolicheskogo tipa* [Boundary value problems for linear partial differential equations of hyperbolic type]. Shymkent, Gylym, 1993, 328 pp. (In Russian)
3. Khe K. Ch. On eigenfunctions of homogeneous boundary value problems for an elliptic equation with Bessel operators, *Nonclassical equations of mathematical physics*. Novosibirsk, Sobolev Institute of Mathematics Publ., 2000, pp. 128–135 (In Russian).
4. Sabitov K. B., Il'yasov R. R. On the ill-posedness of boundary value problems for a class of hyperbolic equations, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2001, vol. 45, no. 5, pp. 56–60.
5. Aldashev, S. A. Special Darboux–Protter problems for a class of multidimensional hyperbolic equations, *Ukr. Math. J.*, 2003, vol. 55, no. 1, pp. 126–135.
6. Aldashev S. A. A criterion for the existence of eigenfunctions of the Darboux–Protter spectral problem for degenerating multidimensional hyperbolic equations, *Differ. Equ.*, 2005, vol. 41, no. 6, pp. 833–839. doi: 10.1007/s10625-005-0222-2.
7. Aldashev S. A. A criterion for the existence of eigenfunctions of the spectral Darboux–Protter problems for the multidimensional Euler–Darboux–Poisson equation, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2006, vol. 50, no. 2, pp. 1–8.
8. Mikhlin S. G. *Multidimensional Singular Integrals and Integral Equations*, International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics, vol. 83, Oxford etc., 1965, xii+259 pp.
9. Kamke E. *Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen*, vol. I, Gewöhnliche Differentialgleichungen. Stuttgart, B. G. Teubner, 1977, xxvi+668 pp. ; vol. II, Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung für eine gesuchte Funktion. Stuttgart, B. G. Teubner, 1979, xiii+243 pp. (In German)
10. *Higher transcendental functions*, vol. II, Bateman Manuscript Project, California Institute of Technology, ed. A. Erdélyi. Malabar, Florida, Robert E. Krieger Publishing Company, 1981, xviii+396 pp.
11. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza* [Elements of the theory of functions and functional analysis]. Moscow, Nauka, 1972, 496 pp. (In Russian)
12. Tikhonov A. N., Samarskii A. A. *Equations of mathematical physics*, International Series of Monographs on Pure and Applied Mathematics, vol. 39. Oxford etc., Pergamon Press, 1963, xvi+765 pp.
13. Aldashev S. A. Correctness of the Dirichlet problem in a cylindrical domain for multidimensional hyperbolic equations with wave operator, *Doklady Adygskoi (Cherkesskoi) Mezhdunarodnoi akademii nauk*, 2011, vol. 13, no. 1, pp. 21–29 (In Russian).
14. Smirnov V. I. *Lehrgang der höheren Mathematik*, vol. 4, Teil 2. Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1989, 469 pp. (In German)
15. Aldashev S. A. The Well-Posedness of the Dirichlet Problem in the Cylindric Domain for the Multidimensional Wave Equation, *Mathematical Problems in Engineering*, 2010, vol. 2010, 653215, 7 pp.. doi: 10.1155/2010/653215.

Received 04/III/2014;
received in revised form 26/V/2014;
accepted 27/VIII/2014.