Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2014. № 4 (37). С. 7–15
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1349

Дифференциальные уравнения

УДК 517.956.3

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА ОБЩЕГО ВИДА С НЕКРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

***А. А. Андреев*[1], *Ю. О. Яковлева*[2]**

[1] Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.
[2] Самарский государственный университет,
Россия, 443011, Самара, ул. Академика Павлова, 1.

Аннотация

В статье для гиперболического дифференциального уравнения четвертого порядка с некратными характеристиками рассмотрена задача Коши. Обобщение этой задачи выполнено на основе решения аналогичной задачи Коши для гиперболического уравнения третьего порядка с некратными характеристиками, для которой построено решение в виде, аналогичном формуле Даламбера. Получено регулярное решение задачи Коши для гиперболического уравнения четвертого порядка с некратными характеристиками в явном виде. Указанное решение также является аналогом формулы Даламбера. В результате исследований сформулирована теорема о существовании и единственности регулярного решения задачи Коши для гиперболического уравнения четвертого порядка с некратными характеристиками. В статье исследуется задача Коши для системы гиперболических дифференциальных уравнений четвертого порядка общего вида с некратными характеристиками.

Ключевые слова: гиперболическое дифференциальное уравнение четвертого порядка, некратные характеристики, задача Коши, формула Даламбера, система гиперболических дифференциальных уравнений четвертого порядка общего вида.

doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1349

Образец для цитирования
Андреев А. А., Яковлева Ю. О. Задача Коши для системы уравнений гиперболического типа четвертого порядка общего вида с некратными характеристиками // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2014. № 4 (37). С. 7–15. doi: 10.14498/vsgtu1349.

Сведения об авторах
Александр Анатольевич Андреев (к.ф.-м.н., доц.; andre01071948@yandex.ru), доцент, каф. прикладной математики и информатики.
Юлия Олеговна Яковлева (к.ф.-м.н.; julia.yakovleva@mail.ru; автор, ведущий переписку), доцент, каф. математики и бизнес-информатики.

Введение. Известно, что в теории гиперболических уравнений основополагающую роль играет понятие характеристики. Краевые задачи для гиперболических уравнений и систем гиперболических уравнений третьего и более высокого порядка с некратными характеристиками в некоторых случаях удается решить без вспомогательных функций (функций Римана [1,2], Римана—Адамара).

Теорема существования и единственности решения задачи Коши в действительном пространстве для линейной системы гиперболических уравнений с аналитическими коэффициентами была впервые доказана в 1901 г. Хольмгреном [3]. Для линейной системы с произвольно гладкими, но неаналитическими коэффициентами и для системы гиперболических уравнений высшего порядка теорема существования и единственности решения задачи Коши была доказана И. Г. Петровским [4]. В настоящей работе получено решение задачи Коши для гиперболического уравнения четвертого порядка в явном виде, аналогичном формуле Даламбера, а также приведена задача Коши для системы уравнений гиперболического типа четвертого порядка.

1. Предварительные сведения. Ранее авторами [5] для гиперболического уравнения третьего порядка

$$a_0u_{xxx} + a_1u_{xxy} + a_2u_{xyy} + a_3u_{yyy} = 0, \tag{1}$$

где a_0, a_1, a_2, $a_3 \neq 0$ — некоторые действительные постоянные, с характеристиками $y = \lambda_1 x + C_1$, $y = \lambda_2 x + C_2$, $y = \lambda_3 x + C_3$ при $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = a_1/a_0$, $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = a_3/a_0$ была рассмотрена задача Коши. Решением задачи Коши для уравнения (1) с условиями на нехарактеристической линии $y = 0$:

$$u(x,y)\Big|_{y=0} = \alpha(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{y=0} = \beta(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\Big|_{y=0} = \gamma(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

где $n = (0,1)$ — нормаль к прямой l, является функция

$$\begin{aligned}
u(x,y) = {}& \frac{\lambda_1^3}{\lambda_1^3 - \lambda_1^2(\frac{a_1}{a_0} - \lambda_1) + \frac{a_3}{a_0}} \left(\alpha\Big(x - \frac{y}{\lambda_1}\Big) + \frac{a_1 - \lambda_1 a_0}{a_0} \int_0^{x - \frac{y}{\lambda_1}} \beta(t)dt\right) + \\
&+ \frac{\lambda_1^3}{\lambda_1^3 - \lambda_1^2(\frac{a_1}{a_0} - \lambda_1) + \frac{a_3}{a_0}} \left(\frac{a_3}{a_0\lambda_1} \int_0^{x - \frac{y}{\lambda_1}} \gamma(t)\Big(x - \frac{y}{\lambda_1} - t\Big)dt\right) + \\
&+ \frac{\lambda_2^3}{\lambda_2^3 - \lambda_2^2(\frac{a_1}{a_0} - \lambda_2) + \frac{a_3}{a_0}} \left(\alpha\Big(x - \frac{y}{\lambda_2}\Big) + \frac{a_1 - \lambda_2 a_0}{a_0} \int_0^{x - \frac{y}{\lambda_2}} \beta(t)dt\right) + \\
&+ \frac{\lambda_2^3}{\lambda_2^3 - \lambda_2^2(\frac{a_1}{a_0} - \lambda_2) + \frac{a_3}{a_0}} \left(\frac{a_3}{a_0\lambda_2} \int_0^{x - \frac{y}{\lambda_2}} \gamma(t)\Big(x - \frac{y}{\lambda_2} - t\Big)dt\right) + \\
&+ \frac{\lambda_3^3}{\lambda_3^3 - \lambda_3^2(\frac{a_1}{a_0} - \lambda_3) + \frac{a_3}{a_0}} \left(\alpha\Big(x - \frac{y}{\lambda_3}\Big) + \frac{a_1 - \lambda_3 a_0}{a_0} \int_0^{x - \frac{y}{\lambda_3}} \beta(t)dt\right) +
\end{aligned}$$

$$+\frac{\lambda_3^3}{\lambda_3^3-\lambda_3^2(\frac{a_1}{a_0}-\lambda_3)+\frac{a_3}{a_0}}\left(\frac{a_3}{a_0\lambda_3}\int_0^{x-\frac{y}{\lambda_3}}\gamma(t)\Big(x-\frac{y}{\lambda_3}-t\Big)dt\right). \quad (2)$$

Пусть

$$F(x,y,\lambda)=\alpha\Big(x-\frac{y}{\lambda}\Big)+\frac{a_1-\lambda a_0}{a_0}\int_0^{x-\frac{y}{\lambda}}\beta(t)dt+\frac{a_3}{a_0\lambda}\int_0^{x-\frac{y}{\lambda}}\gamma(t)\Big(x-\frac{y}{\lambda}-t\Big)dt,$$

тогда функция (2) из класса $C^3(\mathbb{R}^2)$ представима в виде

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{3}\frac{\lambda_k^3}{\lambda_k^3-\lambda_k^2(\frac{a_1}{a_0}-\lambda_k)+\frac{a_3}{a_0}}F(x,y,\lambda_k). \quad (3)$$

Полученную формулу (3) назвали аналогом формулы Даламбера для гиперболического уравнения третьего порядка. В работе [5] приведено представление распространения начального отклонения, начальной скорости и начального ускорения некоторого колебательного процесса [6].

2. Задача Коши для уравнения гиперболического типа четвертого порядка с некратными характеристиками. Рассмотрим дифференциальное уравнение гиперболического типа четвертого порядка в частных производных общего вида

$$a_0u_{xxxx}+a_1u_{xxxy}+a_2u_{xxyy}+a_3u_{xyyy}+a_4u_{yyyy}=0, \quad (4)$$

где a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 — действительные ненулевые постоянные.

Уравнение

$$a_0\lambda^4-a_1\lambda^3+a_2\lambda-a_3\lambda+a_4=0$$

является характеристическим для уравнения (4), а его интегралы — характеристиками.

Пусть характеристическое уравнение (4) имеет четыре различных действительных корня λ_1, λ_2, λ_3, $\lambda_4\neq 0$, тогда

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=-\frac{a_1}{a_0},\quad \lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_1\lambda_4+\lambda_2\lambda_3+\lambda_2\lambda_4+\lambda_3\lambda_4=\frac{a_2}{a_0},$$
$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_2\lambda_4+\lambda_1\lambda_3\lambda_4+\lambda_2\lambda_3\lambda_4=-\frac{a_3}{a_0},\quad \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4=\frac{a_4}{a_0}.$$

Семейства линий $y-\lambda_1x=C_1$, $y-\lambda_2x=C_2$, $y-\lambda_3x=C_3$, $y-\lambda_4x=C_4$ являются характеристиками уравнения (4), C_1, C_2, C_3, $C_4\in\mathbb{R}$.

Как известно [5, 7] общее решение уравнения (4) из класса четырежды непрерывно дифференцируемых функций $C^4(\mathbb{R}^2)$ представляется в виде

$$u(x,y)=f_1(y-\lambda_1x)+f_2(y-\lambda_2x)+f_3(y-\lambda_3x)+f_4(y-\lambda_4x).$$

Задача Коши. *В плоскости* $\mathbb{R}^2\equiv\{(x,y): x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}\}$ *найти регулярное решение* $u(x,\,y)\in C^4(\mathbb{R}^2)$ *уравнения* (4), *удовлетворяющее условиям на нехарактеристической линии* $y=0$:

$$u(x,\,y)\Big|_{y=0}=\alpha(x),\quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{y=0}=\beta(x),\quad \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\Big|_{y=0}=\gamma(x),\quad \frac{\partial^3 u}{\partial n^3}\Big|_{y=0}=\sigma(x), \quad (5)$$

где $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$, $\sigma(x) \in C^4(\mathbb{R})$; $n = (0,1)$ — *нормаль к нехарактеристической линии.*

Регулярным в плоскости $\mathbb{R}^2$ решением [8,9] задачи Коши (5) уравнения (4) будем называть функцию $u(x,y) \in C^4(\mathbb{R}^2)$, имеющую в плоскости все непрерывные частные производные, входящие в уравнение (4), и удовлетворяющую уравнению (4) и условиям задачи Коши (5) в обычном смысле.

Ограничения на нехарактеристическую линию уравнения четвертого порядка такие же, как и для уравнения второго порядка: эта линия не может дважды пересекать любую характеристику из любого другого семейства [10, 11].

Определим функции f_1, f_2, f_3, f_4 таким образом, чтобы удовлетворялись условия задачи Коши (5):

$$\begin{gathered}
f_1(-\lambda_1 x) + f_2(-\lambda_2 x) + f_3(-\lambda_3 x) + f_4(-\lambda_4 x) = \alpha(x),\\
f_1'(-\lambda_1 x) + f_2'(-\lambda_2 x) + f_3'(-\lambda_3 x) + f_4'(-\lambda_4 x) = \beta(x),\\
f_1''(-\lambda_1 x) + f_2''(-\lambda_2 x) + f_3''(-\lambda_3 x) + f_4''(-\lambda_4 x) = \gamma(x),\\
f_1'''(-\lambda_1 x) + f_2'''(-\lambda_2 x) + f_3'''(-\lambda_3 x) + f_4'''(-\lambda_4 x) = \sigma(x).
\end{gathered}$$

Тогда получим

$$\begin{aligned}
&-\lambda_1^3 f_1'''(-\lambda_1 x) - \lambda_2^3 f_2'''(-\lambda_2 x) - \lambda_3^3 f_3'''(-\lambda_3 x) - \lambda_4^3 f_4'''(-\lambda_4 x) = \alpha'''(x),\\
&\lambda_1^2 f_1'''(-\lambda_1 x) + \lambda_2^2 f_2'''(-\lambda_2 x) + \lambda_3^2 f_3'''(-\lambda_3 x) + \lambda_4^2 f_4'''(-\lambda_4 x) = \beta''(x),\\
&-\lambda_1 f_1'''(-\lambda_1 x) - \lambda_2 f_2'''(-\lambda_2 x) - \lambda_3 f_3'''(-\lambda_3 x) - \lambda_4 f_4'''(-\lambda_4 x) = \gamma'(x),\\
&f_1'''(-\lambda_1 x) + f_2'''(-\lambda_2 x) + f_3'''(-\lambda_3 x) + f_4'''(-\lambda_4 x) = \sigma(x).
\end{aligned}$$

После некоторых преобразований имеем

$$\begin{aligned}
f_k'''(-\lambda_k x) = \frac{(-1)^k}{\prod_{m=1,\, m\neq k}^{4}(\lambda_k-\lambda_m)}\Big(\alpha'''(x) - \frac{a_1+\lambda_k a_0}{a_0}\beta''(x) - \\
- \frac{a_4+\lambda_k a_3}{a_0\lambda_k^2}\gamma'(x) + \frac{a_4}{a_0\lambda_k}\sigma(x)\Big), \quad k = 1,2,3,4. \qquad (6)
\end{aligned}$$

После интегрирования (6) получим

$$\begin{aligned}
f_k(y-\lambda_k x) = f_k(0) - \lambda_k f_k'(0)\Big(x-\frac{y}{\lambda_k}\Big) + \frac{\lambda_k^2}{2} f_k''(0)\Big(x-\frac{y}{\lambda_k}\Big)^2 + \\
+ \frac{(-1)^{k+1}\lambda_k^3}{\prod_{m=1,\, m\neq k}^{4}(\lambda_k-\lambda_m)}\Bigg(\alpha\Big(x-\frac{y}{\lambda_k}\Big) - \alpha(0) - \alpha'(0)\Big(x-\frac{y}{\lambda_k}\Big) - \\
- \frac{\alpha''(0)}{2}\Big(x-\frac{y}{\lambda_k}\Big)^2\Bigg) + \frac{(-1)^k\lambda_k^3}{\prod_{m=1,\, m\neq k}^{4}(\lambda_k-\lambda_m)}\frac{a_1+a_0\lambda_k}{a_0}\times \\
\times\Bigg(\int_0^{x-\frac{y}{\lambda_k}}\beta(t)dt - \beta(0)\Big(x-\frac{y}{\lambda_k}\Big) - \frac{\beta'(0)}{2}\Big(x-\frac{y}{\lambda_k}\Big)^2\Bigg) +
\end{aligned}$$

$$+\frac{(-1)^k\lambda_k^3}{\prod_{m=1,\,m\neq k}^4(\lambda_k-\lambda_m)}\frac{a_4+a_3\lambda_k}{a_0\lambda_k^2}\biggl(\int_0^{x-\frac{y}{\lambda_k}}\gamma(t)\Bigl(x-\frac{y}{\lambda_1}-t\Bigr)dt-$$
$$-\frac{\gamma(0)}{2}\Bigl(x-\frac{y}{\lambda_k}\Bigr)^2\biggr)+\frac{(-1)^{k+1}\lambda_k^3}{\prod_{m=1,\,m\neq k}^4(\lambda_k-\lambda_m)}\frac{a_4}{a_0\lambda_k}\times$$
$$\times\int_0^{x-\frac{y}{\lambda_k}}\frac{\sigma(t)}{2}\Bigl(x-\frac{y}{\lambda_1}-t\Bigr)^2dt,\quad k=1,2,3,4. \qquad (7)$$

Подставляя в формулу общего решения найденные выражения (7) для функций f_k, получим

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^4\frac{(-1)^{k+1}\lambda_k^3}{\prod_{m=1,\,m\neq k}^4(\lambda_k-\lambda_m)}F(x,y,\lambda_k), \qquad (8)$$

где

$$F(x,y,\lambda)=\alpha\Bigl(x-\frac{y}{\lambda}\Bigr)-\frac{a_1+a_0\lambda_k}{a_0}\int_0^{x-\frac{y}{\lambda_k}}\beta(t)dt-$$
$$-\frac{a_4+a_3\lambda_k}{a_0\lambda_k^2}\int_0^{x-\frac{y}{\lambda_k}}\gamma(t)\Bigl(x-\frac{y}{\lambda_k}-t\Bigr)dt+$$
$$+\frac{a_4}{a_0\lambda_k}\int_0^{x-\frac{y}{\lambda_k}}\frac{\sigma(t)}{2}\Bigl(x-\frac{y}{\lambda_k}-t\Bigr)^2dt.$$

Непосредственной подстановкой можно проверить, что формула (8) удовлетворяет уравнению (4) и условиям задачи Коши (5).

Будем называть формулу (8) аналогом формулы Даламбера для гиперболического уравнения четвертого порядка.

Приведенные исследования позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема. *Если $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$, $\sigma(x)\in C^4(\mathbb{R})$, то существует единственное регулярное решение $u(x,y)\in C^4(\mathbb{R}^2)$ задачи Коши (5) уравнения (4), которое имеет вид (8).*

3. Задача Коши для системы гиперболических уравнений четвертого порядка общего вида. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка общего вида с двумя независимыми переменными $x,y\in\mathbb{R}$ на плоскости, не содержащую производные порядка меньше четвертого,

$$AU_{xxxx}+BU_{xxxy}+CU_{xxyy}+DU_{xyyy}+U_{yyyy}=0, \qquad (9)$$

где $U(x,y)=(u^1(x,y),u^2(x,y))^\top$ — двумерная вектор-функция, A, B, C, D — постоянные квадратные матрицы второго порядка.

Пусть матрицы A, B, C, D попарно коммутирующие [12, 13], тогда существует такая матрица T, что одновременно приводит матрицы A, B, C, D к диагональной форме:

$$T^{-1}AT=\Lambda_A,\quad T^{-1}BT=\Lambda_B,\quad T^{-1}CT=\Lambda_C,\quad T^{-1}DT=\Lambda_D.$$

Поскольку матрицы A, B, C, D коммутирующие, тоже можно сказать и о матрицах Λ_A, Λ_B, Λ_C, Λ_D, полученных преобразованием подобия [14]. Будем считать, что матрицы Λ_A, Λ_B, Λ_C, Λ_D имеют различные ненулевые действительные собственные значения.

Задача Коши. *Найти регулярное решение* $U(x, y) \in C^4(\mathbb{R}^2)$ *системы уравнений* (9) *в плоскости* $\mathbb{R}^2$, *удовлетворяющее следующим условиям на нехарактеристической линии* $y = 0$:

$$\begin{aligned} &U(x,0) = S_1(x), && \frac{\partial U}{\partial n}(x,0) = S_2(x), \\ &\frac{\partial^2 U}{\partial n^2}(x,0) = S_3(x), && \frac{\partial^3 U}{\partial n^3}(x,0) = S_4(x), \end{aligned} \tag{10}$$

где $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$, $S_4(x) \in C^4(\mathbb{R})$ *— заданные вектор-функции,* $n = (0,1)$ *— нормаль к нехарактеристической линии.*

Для разделения исследуемой системы на отдельные уравнения выполнена замена

$$U = TV, \quad V(x,y) = (v^1(x,y), v^2(x,y))^\top$$

при $\det T \neq 0$ и совершен переход к системе вида

$$\Lambda_A V_{xxxx} + \Lambda_B V_{xxxy} + \Lambda_C V_{xyyy} + \Lambda_D V_{xyyy} + V_{yyyy} = 0, \tag{11}$$

или

$$\begin{cases} a_1 v^1_{xxxx} + b_1 v^1_{xxxy} + c_1 v^1_{xxyy} + d_1 v^1_{xyyy} + v^1_{yyyy} = 0, \\ a_2 v^2_{xxxx} + b_2 v^2_{xxxy} + c_2 v^2_{xxyy} + d_2 v^2_{xyyy} + v^2_{yyyy} = 0. \end{cases}$$

Каждое характеристическое уравнение системы (11) имеет четыре различных ненулевых корня λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 соответственно.

Решение задачи Коши для каждого уравнения системы может быть получено в соответствии с приведенными выше исследованиями.

Решение задачи Коши (10) для системы (9) может быть найдено в виде решения матричного уравнения $U = TV$.

ORCID
Александр Анатольевич Андреев: http://orcid.org/0000-0002-1360-0158
Юлия Олеговна Яковлева: http://orcid.org/0000-0002-9839-3740

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Rieman B. Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite (Aus dem achten Bande der Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 1860.) / *Bernard Riemann's Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass*; eds. R. Dedekind, H. M. Weber. United States: BiblioLife, 2009. pp. 145–164 (In German). doi: 10.1017/cbo9781139568050.009.
2. Ali Raeisian S. M. Effective Solution of Riemann Problem for Fifth Order Improperly Elliptic Equation on a Rectangle // *AJCM*, 2012. vol. 2, no. 4. pp. 282–286. doi: 10.4236/ajcm.2012.24038.
3. Holmgren E. Sur les systèmes linéaires aux dérivées partielles du premier ordre deux variables indépendantes à caractéristiques réelles et distinetes // *Arkiv f. Mat., Astr. och Fys.*, 1909. vol. 5, no. 1. 13 pp. (In Swedish)
4. Петровский И. Г. *Избранные труды. Системы уравнений с частными производными. Алгебраическая геометрия.* М.: Наука, 1986. 500 с.

5. Яковлева Ю. О. Аналог формулы Даламбера для гиперболического уравнения третьего порядка с некратными характеристиками // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2012. № 1(26). С. 247–250. doi: 10.14498/vsgtu1028.
6. Nikolov A., Popivanov N. Singular solutions to Protter's problem for (3+1)-D degenerate wave equation (8–13 June 2012; Sozopol, Bulgaria) / AIP Conf. Proc., 1497, 2012. pp. 233–238. doi: 10.1063/1.4766790.
7. Корзюк В. И., Чеб Е. С., Ле Тхи Тху, Решение смешанной задачи для биволнового уравнения методом характеристик // *Тр. Ин-та матем.*, 2010. Т. 18, № 2. С. 36–54.
8. Яковлева Ю. О. Одна характеристическая задача для дифференциального гиперболического уравнения третьего порядка общего вида с некратными характеристиками // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2012. № 3(28). С. 180–183. doi: 10.14498/vsgtu1108.
9. Андреев А. А., Яковлева Ю. О. Характеристическая задача для одного гиперболического дифференциального уравнения третьего порядка с некратными характеристиками // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*, 2013. Т. 13, № 1(2). С. 3–6.
10. Тихонов А. Н., Самарский А. А. *Уравнения математической физики.* М.: Наука, 1972. 736 с.
11. Бицадзе А. В. *Уравнения математической физики.* М.: Наука, 1982. 336 с.
12. Bellman R. *Introduction to matrix analysis*: 2nd ed., Reprint of the 1970 Orig. / Classics in Applied Mathematics. vol. 19. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1997. xxviii+403 pp.
13. Андреев А. А., Яковлева Ю. О. Характеристическая задача для системы гиперболических дифференциальных уравнений третьего порядка общего вида с некратными характеристиками // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2013. № 1(30). С. 31–36. doi: 10.14498/vsgtu1182.
14. Гантмахер Ф. Р. *Теория матриц.* М.: Наука, 1988. 549 с.

Поступила в редакцию 23/X/2014;
в окончательном варианте — 15/XI/2014;
принята в печать — 27/XI/2014.

Vestn. Samar. Gos. Techn. Un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.] 2014. Issue 4 (37). Pp. 7–15

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1349

MSC: 35L25

CAUCHY PROBLEM FOR THE SYSTEM OF THE GENERAL HYPERBOLIC DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE FORTH ORDER WITH NONMULTIPLE CHARACTERISTICS

A. A. Andreev[1]***, J. O. Yakovleva***[2]

[1] Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.
[2] Samara State University,
1, Academician Pavlov st., Samara, 443011, Russian Federation.

Abstract

We consider the Cauchy problem for the hyperbolic differential equation of the forth order with nonmultiple characteristics. We generalize this problem from the similar Cauchy problem for the hyperbolic differential equation of the third order with nonmultiple characteristics which solution was constructed as an analogue of D'Alembert formula. We obtain the regular solution of the Cauchy problem for the hyperbolic differential equation of the forth order with nonmultiple characteristics in an explicit form. This solution is also an analogue of D'Alembert formula. The existence and uniqueness theorem for the regular solution of the Cauchy problem for the hyperbolic differential equation of the forth order with nonmultiple characteristics is formulated as the result of the research. In the paper we consider the Cauchy problem for the system of the general hyperbolic differential equations of the forth order with nonmultiple characteristics.

Keywords: hyperbolic differential equation of the forth order, nonmultiple characteristics, Cauchy problem, D'Alembert formula, system of general hyperbolic differential equations of the forth order.

doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1349

ORCID
Aleksandr A. Andreev: http://orcid.org/0000-0002-1360-0158
Julia O. Yakovleva: http://orcid.org/0000-0002-9839-3740

How to cite Reference
Andreev A. A., Yakovleva J. O. Cauchy problem for the system of the general hyperbolic differential equations of the forth order with nonmultiple characteristics, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2014, no. 4 (37), pp. 7–15. doi: 10.14498/vsgtu1349. (In Russian)

Authors Details
Aleksandr A. Andreev (Cand. Phys. & Math. Sci.; andre01071948@yandex.ru), Associate Professor, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science.
Julia O. Yakovleva (Cand. Phys. & Math. Sci.; julia.yakovleva@mail.ru; Corresponding Author), Associate Professor, Dept. of Mathematics & Business Informatics.

REFERENCES

1. Rieman B. Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite (Aus dem achten Bande der Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 1860.), *Bernard Riemann's Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass*; eds. R. Dedekind, H. M. Weber. United States, BiblioLife, 2009, pp. 145–164 (In German). doi: 10.1017/cbo9781139568050.009.
2. Ali Raeisian S. M. Effective Solution of Riemann Problem for Fifth Order Improperly Elliptic Equation on a Rectangle, *AJCM*, 2012, vol. 2, no. 4, pp. 282–286. doi: 10.4236/ajcm.2012.24038.
3. Holmgren E. Sur les systèmes linéaires aux dérivées partielles du premier ordre deux variables indépendantes à caractéristiques réelles et distinetes, *Arkiv f. Mat., Astr. och Fys.*, 1909, vol. 5, no. 1, 13 pp. (In Swedish)
4. Petrovskiy I. G. *Izbrannye trudy. Sistemy uravnenii s chastnymi proizvodnymi. Algebraicheskaia geometriia* [Selected works. Systems of partial differential equations. Algebraic geometry]. Moscow, Nauka, 1986, 500 pp. (In Russian)
5. Yakovleva J. O. The analogue of D'Alembert formula for hyperbolic differential equation of the third order with nonmultiple characteristics, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2012, no. 1(26), pp. 247–250 (In Russian). doi: 10.14498/vsgtu1028.
6. Nikolov A., Popivanov N. Singular solutions to Protter's problem for (3+1)-D degenerate wave equation (8–13 June 2012; Sozopol, Bulgaria), AIP Conf. Proc., 1497, 2012, pp. 233–238. doi: 10.1063/1.4766790.
7. Korzyuk V. I., Cheb E. S., Le Thi Thu Solution of the mixed problem for the biwave equation by the method of characteristics, *Tr. Inst. Mat.*, 2010, vol. 18, no. 2, pp. 36–54 (In Russian).
8. Yakovleva J. O. One characteristic problem for the general hyperbolic differential equation of the third order with nonmultiple characteristics, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2012, no. 3(28), pp. 180–183 (In Russian). doi: 10.14498/vsgtu1108.
9. Andreev A. A., Yakovleva J. O. The Characteristic Problem for one Hyperbolic Differentional Equation of the Third Order with Nonmultiple Characteristics, *Izv. Saratov. Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2013, vol. 13, no. 1(2), pp. 3–6 (In Russian).
10. Tikhonov A. N., Samarskii A. A. *Uravneniia matematicheskoi fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1972, 736 pp. (In Russian)
11. Bitsadze A. V. *Uravneniia matematicheskoi fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka, 1982, 336 pp. (In Russian)
12. Bellman R. *Introduction to matrix analysis*, 2nd ed., Reprint of the 1970 Orig., Classics in Applied Mathematics, vol. 19. Philadelphia, PA, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1997, xxviii+403 pp.
13. Andreev A. A., Yakovleva J. O. The characteristic problem for the system of the general hyperbolic differential equations of the third order with nonmultiple characteristics, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2013, no. 1(30), pp. 31–36 (In Russian). doi: 10.14498/vsgtu1182.
14. Gantmakher F. R. *Teoriia matrits* [Theory of matrices]. Moscow, Nauka, 1988, 549 pp. (In Russian)

Received 23/X/2014;
received in revised form 15/XI/2014;
accepted 27/XI/2014.