



Механика деформируемого твёрдого тела

УДК 539.388.24

РЕШЕНИЕ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ О ВДАВЛИВАНИИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ШТАМПА В УПРУГОЕ ШЕРОХОВАТОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО ПРИ НАЛИЧИИ КУЛОНОВА ТРЕНИЯ

А. И. Александров, Е. В. Грабко

Запорожский национальный университет,
Украина, 69600, Запорожье, ул. Жуковского, 66.

Аннотация

Получено численное решение статической пространственной контактной задачи о вдавливании прямоугольного штампа с плоским основанием в упругое шероховатое полупространство при наличии трения Кулона и неизвестными заранее зонами сцепления и проскальзывания. Учет шероховатости в этой задаче осуществлялся на основе сферической модели микровыступов путем введения в выражения относительных смещений взаимодействующих тел нелинейных слагаемых, характеризующих смятие и сдвиг поверхностных микронеровностей. Проанализировано влияние значений коэффициента трения и параметров микронеровностей на размеры и форму зоны сцепления, а также на распределение касательных контактных напряжений. Показано, что учет сдвига поверхностных микронеровностей, образующих шероховатость, может приводить к существенному увеличению размеров зоны сцепления.

Ключевые слова: упругое тело, шероховатая поверхность, трение Кулона, контактная задача, численное решение, итерационный процесс.

doi: <http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1367>

Введение. При контактировании упругих шероховатых тел возникает трение, вызывающее сдвиг поверхностных микронеровностей, образующих шероховатость. Естественно ожидать, что этот сдвиг может оказать определенное влияние на качественные характеристики контактного взаимодействия

© 2014 Самарский государственный технический университет.

Образец для цитирования

Александров А. А., Грабко Е. В. Решение контактной задачи о вдавливании прямоугольного штампа в упругое шероховатое полупространство при наличии кулонова трения // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2014. № 4 (37). С. 42–52. doi: [10.14498/vsgtu1367](http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1367).

Сведения об авторах

Александр Иванович Александров (к.т.н., доц.; heeper@gmail.com), доцент, каф. математического анализа.

Елена Валерьевна Грабко (elenagrabko@rambler.ru; автор, ведущий переписку), аспирант, каф. математического анализа.

тел, на размеры и форму зон сцепления, на распределение касательных контактных напряжений. Однако в большинстве работ, посвященных решению задач о контакте шероховатых упругих тел при наличии трения Кулона [1–9], сдвиг микронеровностей либо не учитывался совсем [1, 3, 4, 7–9] либо учитывался в упрощенной линейной форме [2, 5, 6]. Кроме этого, условия решаемых задач часто упрощаются за счет игнорирования влияния нормальных контактных напряжений на относительные касательные упругие смещения тел [3, 5–8], либо за счет рассмотрения контакта тел лишь при их полном проскальзывании [4]. Использование нелинейных интегральных уравнений для моделирования контактного взаимодействия упругих тел [3–6, 10, 11] позволяет рассматривать различные типы граничных условий контактных задач и разрабатывать эффективные алгоритмы для получения приближенных решений таких задач. За счет незначительной модификации уравнений [11], описывающих контактное взаимодействие упругих тел при наличии кулонова трения, можно обеспечить учет шероховатости поверхностей этих тел и разработать эффективный алгоритм для решения дискретного аналога модифицированных уравнений. Целью данной статьи является разработка такого алгоритма и выявление эффектов, вызванных учетом сдвига поверхностных микронеровностей, в задаче о контакте штампа с упругим шероховатым полупространством, постановка которой характеризуется отсутствием отмеченных выше упрощений.

1. Постановка контактной задачи. Рассмотрим трехмерную статическую задачу о контакте упругих тел, имеющих шероховатые поверхности. В этой задаче не исключается случай, когда одно из контактирующих тел является абсолютно жестким (в таком случае абсолютно жесткое тело условно считается упругим, имеющим бесконечное значение модуля Юнга). Будем полагать, что взаимодействие тел сопровождается кулоновым трением, и считать поверхность контакта, а также зоны проскальзывания и сцепления на этой поверхности заранее неизвестными. При определенных допущениях такая задача сводится к отысканию неизвестных функций $p_1(s)$, $p_2(s)$, $p_3(s)$, непрерывных на замыкании $\bar{\Omega}$ ограниченной плоской области Ω (охватывающей неизвестную заранее площадку контакта тел) и удовлетворяющих в каждой точке s множества $\bar{\Omega}$ следующим соотношениям [12]:

$$\begin{aligned} v_1(s) \geq 0, \quad p_1(s) \geq 0, \quad v_1(s)p_1(s) = 0; \\ \sqrt{p_2^2(s) + p_3^2(s)} \leq \mu p_1(s); \\ \sqrt{v_2^2(s) + v_3^2(s)} p_2(s) + \mu p_1(s) v_2(s) = 0; \\ \sqrt{v_2^2(s) + v_3^2(s)} p_3(s) + \mu p_1(s) v_3(s) = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

В этих соотношениях через $v_1(s)$, $v_2(s)$, $v_3(s)$ обозначены нормальная и касательные составляющие относительных смещений противоположащих поверхностных точек взаимодействующих тел, функции $p_1(s)$, $p_2(s)$, $p_3(s)$ представляют собой нормальную и касательные составляющие удельной контактной нагрузки; μ — коэффициент трения. Функции $v_1(s)$, $v_2(s)$, $v_3(s)$ имеют следующий вид [13]:

$$\begin{aligned}
 v_1(s) &= f_1(p_1(s)) + \sum_{j=1}^3 A_{1j}(p_j)(s) - \Delta_1(s), \\
 v_2(s) &= f_2(p_2(s), p_3(s), p_1(s)) + \sum_{j=1}^3 A_{2j}(p_j)(s) - \Delta_2(s), \\
 v_3(s) &= f_2(p_3(s), p_2(s), p_1(s)) + \sum_{j=1}^3 A_{3j}(p_j)(s) - \Delta_3(s).
 \end{aligned} \tag{2}$$

В правых частях равенств (1) слагаемые $f_1(p_1(s))$, $f_2(p_2(s), p_3(s), p_1(s))$, $f_2(p_3(s), p_2(s), p_1(s))$ задают сжатие и сдвиг поверхностных микронеровностей полупространства, образующих шероховатость; функции $\Delta_1(s)$, $\Delta_2(s)$, $\Delta_3(s) \in C(\bar{\Omega})$ [13] задают конфигурацию взаимодействующих тел и условия их нагружения; линейные интегральные операторы влияния $A_{ij} : C(\bar{\Omega}) \rightarrow C(\bar{\Omega})$ определены соотношениями

$$A_{ij}(p_j)(s) = \int_{\Omega} K_{ij}(s, t) p_j(t) dt, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

В этих соотношениях ядра $K_{ij}(s, t)$ заданы в соответствии с формулами Буссинеска—Черутти [14], что означает принятие гипотезы о возможности аппроксимации взаимодействующих тел упругими полупространствами.

Первое из условий (1) означает отсутствие взаимного проникания тел, второе выражает знакопостоянство контактного давления, и третье означает, что за пределами площадки контакта давление отсутствует. Последние три соотношения системы (1) выражают закон трения Кулона [12]. При формулировании этого закона трения принята гипотеза [15], позволяющая заменить в последних двух соотношениях системы (1) скорости относительного проскальзывания тел их относительными проскальзываниями.

Для неизвестных функций $p_1(s), p_2(s), p_3(s) \in C(\bar{\Omega})$ система соотношений (1), (1) эквивалентна следующей системе уравнений [12]:

$$\begin{aligned}
 p_1(s) &= h(p_1(s) - Ev_1(s)); \\
 p_2(s) &= q(p_2(s) - Ev_2(s), p_3(s) - Ev_3(s), \mu h(p_1(s))); \\
 p_3(s) &= q(p_3(s) - Ev_3(s), p_2(s) - Ev_2(s), \mu h(p_1(s))),
 \end{aligned} \tag{3}$$

где $s \in \bar{\Omega}$; E — произвольное положительное число; выражения $v_1(s)$, $v_2(s)$, $v_3(s)$ имеют вид (1), а функции $h(x)$, $q(x, y, z)$ заданы следующим образом:

$$\begin{aligned}
 h(x) &= \frac{1}{2}(x + |x|); \\
 q(x, y, z) &= \begin{cases} x, & \text{if } \sqrt{x^2 + y^2} \leq z; \\ \frac{xz}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{if } \sqrt{x^2 + y^2} > z. \end{cases}
 \end{aligned}$$

2. Учет шероховатости поверхности упругого полупространства. Используя сферическую модель микровыступов [16], образующих шероховатость, и

пренебрегая влиянием касательной нагрузки, приложенной к этим выступам, на их сжатие, можно получить для f_1 , f_2 следующие соотношения [17–19]:

$$f_1(u) = \alpha (h(u))^{2/3},$$

$$f_2(x, y, z) = \begin{cases} 0, & \text{if } \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = 0; \\ \frac{\beta \tilde{x}}{(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2)^{1/6}} \frac{1 - (1 - (\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}/\tilde{z}))^{2/3}}{(\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}/\tilde{z})^{2/3}}, & \text{if } \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 > 0; \end{cases} \quad (4)$$

где $\tilde{x} = q(x, y, \mu h(z))$, $\tilde{y} = q(y, x, \mu h(z))$, $\tilde{z} = \mu h(z)$. В этих соотношениях параметры α и β имеют одинаковую размерность и определяются следующими выражениями:

$$\alpha = 0.8255\rho \sqrt[3]{\tilde{k}\pi^2 \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right)^2};$$

$$\beta = 0.4127\rho \sqrt[3]{\frac{\tilde{k}\pi^2\mu}{\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}} \left(\frac{(1 + \nu_1)(2 - \nu_1)}{E_1} + \frac{(1 + \nu_2)(2 - \nu_2)}{E_2} \right)}. \quad (5)$$

В равенствах (1) параметры ν_1 , ν_2 , E_1 , E_2 представляют собой коэффициенты Пуассона и модули Юнга взаимодействующих тел, параметр ρ есть радиус сферического выступа, параметр \tilde{k} принимает значения 2 или 1 (в зависимости от того, оба ли взаимодействующих тела имеют шероховатые поверхности или лишь одно из них). Если одно из взаимодействующих тел является абсолютно жестким, то в равенствах (1) нужно положить равными нулю все дроби, в знаменателях которых содержится модуль Юнга абсолютно жесткого тела.

3. Алгоритм численного решения контактной задачи. Для получения численного решения системы интегральных уравнений (1) зададим область Ω в виде открытого прямоугольника, ограниченного отрезками прямых, параллельных координатным осям x и y декартовой системы координат, введенной на общей для взаимодействующих тел касательной плоскости. Разобьем Ω на k непересекающихся одинаковых прямоугольных областей $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$, ориентированных подобно прямоугольнику Ω (размеры области Ω выберем так, чтобы эта область включала в себя прямоугольную подошву штампа). Полагая, что искомые функции $p_1(s)$, $p_2(s)$, $p_3(s)$ принимают на каждом граничном элементе ω_i постоянные значения x_{3i-2} , x_{3i-1} , x_{3i} ($i = 1, 2, \dots, k$), можно для определения этих значений получить из (1) следующую систему $3k$ скалярных уравнений [19]:

$$x_{3i-2} = h \left(x_{3i-2} - E \left(f_1(x_{3i-2}) + \sum_{j=1}^{3k} a_{3i-2j} x_j - b_{3i-2} \right) \right);$$

$$x_{3i-1} = q \left[x_{3i-1} - E \left(f_2(x_{3i-1}, x_{3i}, x_{3i-2}) + \sum_{j=1}^{3k} a_{3i-1j} x_j - b_{3i-1} \right), \right.$$

$$\left. x_{3i} - E \left(f_2(x_{3i}, x_{3i-1}, x_{3i-2}) + \sum_{j=1}^{3k} a_{3ij} x_j - b_{3i} \right), \mu x_{3i-2} \right]; \quad (6)$$

$$x_{3i} = q \left[x_{3i} - E \left(f_2(x_{3i}, x_{3i-1}, x_{3i-2}) + \sum_{j=1}^{3k} a_{3ij} x_j - b_{3i} \right), \right.$$

$$\left. x_{3i-1} - E \left(f_2(x_{3i-1}, x_{3i}, x_{3i-2}) + \sum_{j=1}^{3k} a_{3i-1j} x_j - b_{3i-1} \right), \mu x_{3i-2} \right],$$

$$i = 1, 2, \dots, k.$$

Входящие в эту систему числовые параметры a_{ij} и b_j задаются соотношениями [19]:

$$\begin{aligned} b_{3i-l} &= \frac{k}{d} \int_{\omega_i} \Delta_{3-l}(s) ds & \forall l = 0, 1, 2; i = 1, 2, \dots, k; \\ a_{3i-r} a_{3j-l} &= \frac{k}{d} \int_{\omega_i} \left(\int_{\omega_j} K_{3-r, 3-l}(s, t) dt \right) ds & \forall r, l = 0, 1, 2; i, j = 1, 2, \dots, k, \end{aligned} \quad (7)$$

где d есть площадь прямоугольника Ω .

Для получения приближенного решения системы уравнений (1) можно использовать итерационный процесс

$$\begin{aligned} x_i^{(0)} &= 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, 3k; \\ x_{3i-2}^{(m+1)} &= h(\gamma_i^{(m)}), \\ x_{3i-1}^{(m+1)} &= q(\alpha_i^{(m)}, \beta_i^{(m)}, \mu h(x_{3i-2}^{(m)})), \\ x_{3i}^{(m+1)} &= q(\beta_i^{(m)}, \alpha_i^{(m)}, \mu \cdot h(x_{3i-2}^{(m)})), \quad i = 1, 2, \dots, k; m = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (8)$$

где величины $\alpha_i^{(m)}$, $\beta_i^{(m)}$, $\gamma_i^{(m)}$, $i = 1, 2, \dots, k$, определяются равенствами

$$\begin{aligned} \gamma_i^{(m)} &= x_{3i-2}^{(m)} - E \left(f_1(x_{3i-2}^{(m)}) + \sum_{j=1}^{3k} a_{3i-2, j} x_j^{(m)} - b_{3i-2} \right), \\ \alpha_i^{(m)} &= x_{3i-1}^{(m)} - E \left(f_2(x_{3i-1}^{(m)}, x_{3i}^{(m)}, x_{3i-2}^{(m)}) + \sum_{j=1}^{3k} a_{3i-1, j} x_j^{(m)} - b_{3i-1} \right), \\ \beta_i^{(m)} &= x_{3i}^{(m)} - E \left(f_2(x_{3i}^{(m)}, x_{3i-1}^{(m)}, x_{3i-2}^{(m)}) + \sum_{j=1}^{3k} a_{3i, j} x_j^{(m)} - b_{3i} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Будем полагать, что входящая в равенства (1) константа E удовлетворяет неравенству

$$0 < E \leq \left(L + \max_{1 \leq i \leq 3k} \left(\sum_{j=1}^{3k} |a_{ij}| \right) \right)^{-1}, \quad (10)$$

в котором неотрицательное число L зависит от значений параметров α и β , входящих в выражения функций f_1 и f_2 .

4. Численные результаты. При помощи разработанного алгоритма было получено численное решение пространственной задачи о вдавливании гладкого прямоугольного штампа с плоским основанием в шероховатое упругое полупространство при действии на штамп сжимающей силы $P = 57$ кН (соответствующие значения углубления штампа δ_1 , которые входят в первое уравнение системы (1), подбирались отдельно для каждого варианта расчета). Ширина основания штампа $2a = 0.006$ м, длина $-2b = 0.024$ м, модуль Юнга полупространства $E_1 = 200 \cdot 10^3$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu_1 = 0.3$. Значения коэффициента трения μ изменялись от 0.05 до 1. Учет шероховатости полупространства осуществлялся с помощью выражений (1), (1), в которых

значения параметра ρ принимались равными $\rho = 0$ м, $\rho = 13.73 \cdot 10^{-6}$ м, $\rho = 137.3 \cdot 10^{-6}$ м. Численное решение задачи получено на сетке, которая состоит из $k = 29 \times 57 = 1653$ одинаковых прямоугольных граничных элементов (стороны этих элементов соотносятся как 1 : 2), площадь каждого из которых равна $0.125 \cdot 10^{-6}$ м². Для вычисления входящих в систему (1) коэффициентов a_{ij} матрицы податливости и элементов b_i использовались соотношения (1). Неизвестные значения удельной контактной нагрузки $x_1, x_2, \dots, x_{5043}$ вычислялись при помощи итерационного процесса (1), (1), в котором значение параметра E принималось наибольшим из всех возможных его значений, задаваемых соотношением (1), при $L = (2/3)\alpha x_0^{-1/3}$, $x_0 = 0.1$ МПа.

По результатам полученного численного решения контактной задачи для разных значений параметров ρ , μ вычислялось значение отношения полуширины a_1 зоны сцепления к полуширине a основания штампа (значение a_1 найдено как расстояние от центра пятна контакта до точки пересечения оси x с граничным контуром зоны сцепления). Полученные данные показаны в таблице, где в первой строке указаны значения a_1/a , приведенные в работе [20] для соответствующей плоской контактной задачи, а в остальных строках — эти значения, найденные по результатам численного решения. Первые две строки отвечают случаю отсутствия шероховатости ($\rho = 0$), третья — случаю незначительной шероховатости ($\rho = 13.73 \cdot 10^{-6}$ м) и четвертая — случаю существенной шероховатости ($\rho = 137.3 \cdot 10^{-6}$ м).

Отношение полуширины зоны сцепления к полуширине основания штампа

μ	0.05	0.06	0.09	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.8	1
1	0	0	0	0.037	0.366	0.695	0.868	0.942	0.974	0.993	0.997
2	0	0	0	0	0.333	0.75	0.917	0.917	1	1	1
3	0	0	0	0.083	0.417	0.75	0.917	1	1	1	1
4	0	0.083	0.167	0.167	0.667	1	1	1	1	1	1

Заметное расхождение между соответствующими значениями a_1/a в первых двух строках таблицы, вероятно, объясняется неполным соответствием условий плоской контактной задачи [20] и рассмотренной в этой статье пространственной контактной задачи (ожидаемая близость данных первой и второй строк таблицы основывается на соответствии значения удельной сжимающей силы $P_1 = P/(2b)$ для плоской контактной задачи [20] значению сжимающей силы P для рассмотренной в этой статье пространственной контактной задачи).

Анализ приведенных данных свидетельствует о том, что при росте значения μ от 0 до 1 условия в зоне контакта изменяются от полного проскальзывания до полного сцепления (как при наличии шероховатости, так и при ее отсутствии). При наличии существенной шероховатости наблюдается заметный рост размеров зоны сцепления в интервале изменения значений μ от 0.06 до 0.5 (в сравнении со случаем отсутствия шероховатости). Причем, если появление сцепления при отсутствии шероховатости наступает при $\mu = 0.2$, то в случае незначительной шероховатости оно наступает при $\mu = 0.1$, а в случае существенной шероховатости — уже при $\mu = 0.06$. Как и следовало ожидать, учет шероховатости поверхности полупространства приводит к появлению зон сцепления в тех случаях контакта, для которых эти зоны отсутствовали при отсутствии шероховатости, либо к увеличению размеров этих зон в остальных случаях.

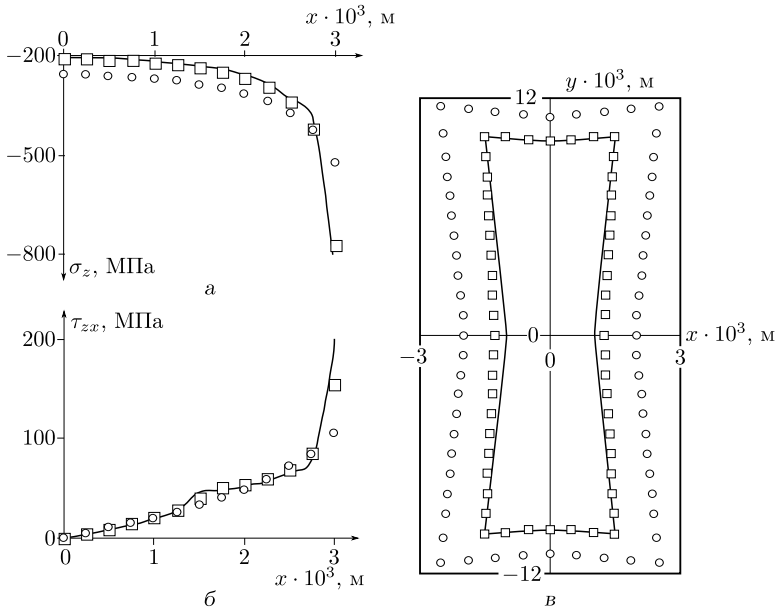


Рис. 1. Результаты решения задачи при $\mu = 0.2$

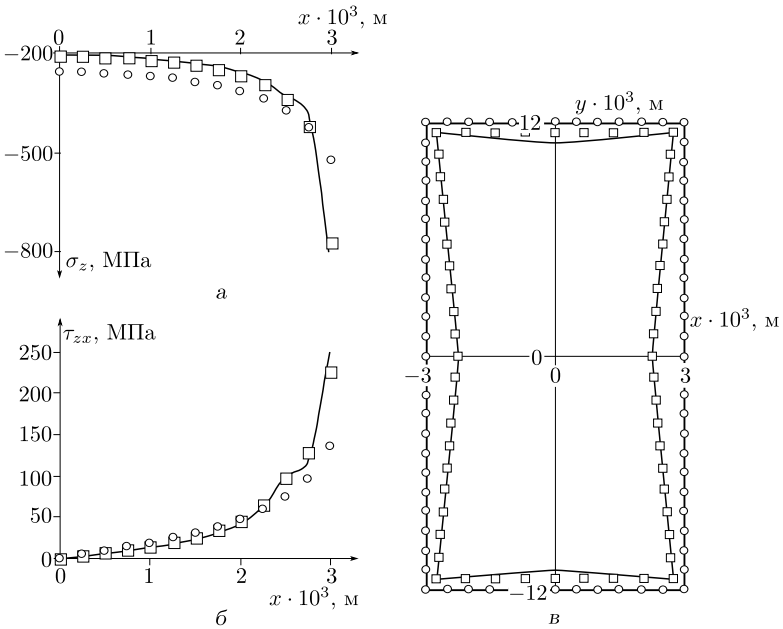


Рис. 2. Результаты решения задачи при $\mu = 0.3$

Полученные результаты численного решения рассматриваемой пространственной контактной задачи представлены на рис. 1 и 2. Здесь приведены распределения нормальных σ_z и касательных τ_{zx} напряжений на поверхности полупространства вдоль поперечной оси симметрии контактной площадки, а также граничные контуры зон сцепления на этой площадке при $\mu = 0.2$ и $\mu = 0.3$.

На рис. 1, а и 2, а изображено распределение нормальных контактных напряжений, на рис. 1, б и 2, б — распределение касательных контактных напряжений и на рис. 1, в и 2, в — граничные контуры зон сцепления (зоны сцепления представляют собой внутренность этих контуров). Здесь сплошной линией изображены распределения напряжений и граница зоны сцепления при отсутствии шероховатости, квадратиками — при наличии незначительной шероховатости и кольцами — при наличии существенной шероховатости.

Приведенные на рис. 1 и 2 результаты свидетельствуют, что значение напряжений σ_z и τ_{zx} при отсутствии шероховатости несущественно отличаются от их значений при наличии шероховатости почти на всей площадке контакта (кроме участков, расположенных близ границ площадки контакта и близ границы между зоной сцепления и зоной проскальзывания). Следует отметить, что расхождение сравниваемых величин напряжений возрастает с ростом значения коэффициента трения μ .

Из рис. 1, в и 2, в следует, что размеры зон сцепления, полученные при отсутствии шероховатости, могут очень сильно отличаться от этих размеров для случая наличия существенной шероховатости. Это означает, что качественные показатели контактного взаимодействия штампа и полупространства могут существенно зависеть от того, учитывается ли шероховатость поверхности полупространства или нет.

Выводы. Полученные результаты свидетельствуют о том, что предложенный алгоритм решения статических задач о контакте упругих шероховатых тел при наличии кулонова трения между ними позволяет находить распределение контактных напряжений, а также конфигурацию зон проскальзывания и сцепления в задачах такого класса. Анализ полученных результатов решения конкретной контактной задачи свидетельствует о том, что учет шероховатости поверхности полупространства может приводить к существенному росту размеров зоны сцепления и к заметным изменениям в распределениях нормальных и касательных контактных напряжений по сравнению со случаем отсутствия шероховатости.

ORCID

Александр Иванович Александров: <http://orcid.org/0000-0003-1568-337X>

Елена Валерьевна Грабко: <http://orcid.org/0000-0002-0874-8326>

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Александров В. М. Контактные задачи в трибологии / *Механика и научно-технический прогресс*. Т. 3, Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. С. 170–180.
2. Вовкушевский А. В. Вариационная постановка и методы решения контактной задачи с трением при учете шероховатости поверхностей // *Изв. АН СССР. МТТ*, 1991. № 3. С. 56–62.
3. Горячева И. Г. *Механика фрикционного взаимодействия*. М.: Наука, 2001. 478 с.

4. Александров В. М., Пожарский Д. А. Трехмерные контактные задачи при учете трения и нелинейной шероховатости // *ПММ*, 2004. Т. 68, № 3. С. 516–527.
5. Pauk V., Zastrau B. W. Plane contact problems with partial slip for rough half-space // *J. Theor. Appl. Mech.*, 2004. vol. 42, no. 1. pp. 107–124, <http://www.ptmts.org/2004-1-pauk-z.pdf>.
6. Pauk V. Plane elastic contact involving friction and boundary roughness // *EJPAU*, 2006. vol. 9, no. 1, #31, <http://www.ejpau.media.pl/articles/volume9/issue1/art-31.pdf>.
7. Дьяченко Н. Н., Шашкова Е. В. Контакт параболического штампа с упругим шероховатым полупространством в условиях частичного проскальзывания // *Вісник Запорізького національного університету. Фіз.-мат. науки*, 2010. № 2. С. 29–37.
8. Дьяченко Н. Н., Менько Н. И.-В., Шашкова Е. В. Задача контакта квадратного в плане штампа с шероховатым полупространством в условиях частичного проскальзывания / *Методи розв'язання прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: Збірник наукових праць Дніпропетровського національного університету*, Вип. 13. Дніпропетровськ, 2012. С. 159–168.
9. Грабко Е. В. Численное решение статической задачи о контакте упругих шероховатых тел при наличии кулонова трения / *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*, Вип. 18. Дніпропетровськ: Ліра, 2012. С. 39–47.
10. Галанов Б. А. Метод граничных уравнений типа Гаммерштейна для контактных задач теории упругости в случае неизвестных областей контакта // *ПММ*, 1985. Т. 49, № 5. С. 827–835.
11. Александров А. И. Метод нелинейных граничных интегральных уравнений для решения пространственных контактных задач о взаимодействии упругих тел при наличии трения // *Вісник Дніпропетровського національного університету. Сер. Механіка*, 2010. Т. 18, № 14(1). С. 26–38, [http://nbuv.gov.ua/j-pdf/vdumec_2010_18_14\(1\)_5.pdf](http://nbuv.gov.ua/j-pdf/vdumec_2010_18_14(1)_5.pdf).
12. Kalker J. J. A survey of the mechanics of contact between solid bodies // *ЗААМ*, 1977. vol. 57, no. 5. pp. T3–T17. doi: 10.1002/zamm.19770570503.
13. Александров А. И., Грабко Е. В. Теоремы существования решения для контактной задачи о взаимодействии упругих тел, имеющих шероховатые поверхности // *Вісник Запорізького національного університету. Фіз.-мат. науки*, 2010. № 2. С. 5–11.
14. Love A. E. H. *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. New York: Dover Publ., 1944. xviii+643 pp.
15. Кравчук А. С. К постановке краевых задач теории упругости с трением на границе / *Механика деформируемого твердого тела*. Куйбышев: Куйбыш. ун-т, 1976. С. 102–105.
16. Демкин Н. Б. *Контактирование шероховатых тел*. М.: Наука, 1970. 227 с.
17. Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. *Справочник по сопротивлению материалов*. Киев: Наукова думка, 1988. 736 с.
18. Johnson K. L. *Contact mechanics*. Cambridge: Cambridge University Press. xi+452 pp.. doi: 10.1017/cbo9781139171731
19. Александров А. И., Грабко Е. В. Решение задач о контакте упругих шероховатых тел с использованием нелинейных интегральных уравнений / *Методи розв'язання прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: Збірник наукових праць Дніпропетровського національного університету*, Вип. 13. Дніпропетровськ, 2012. С. 14–21.
20. Галин Л. А. *Контактные задачи теории упругости*. М.: Гостехиздат, 1953. 250 с.

Поступила в редакцию 13/XI/2014;
в окончательном варианте — 07/XII/2014;
принята в печать — 11/XII/2014.

MSC: 74M15, 74M10

SOLUTION OF THE CONTACT PROBLEM ON INDENTATION OF RECTANGULAR PUNCH IN AN ELASTIC ROUGHNESSES HALF-SPACE IN THE PRESENCE OF COULOMB FRICTION*A. I. Alexandrov, E. V. Grabko*Zaporizhzhya National University,
66, Zhukovskogo st., Zaporizhzhya, 69600, Ukraine.**Abstract**

The numerical solution of the static three-dimensional contact problem of the indentation of a rectangular stamp with a flat base in an elastic rough half-space in the presence of Coulomb friction and previously unknown adhesion and slip zones is obtained. Accounting for surface roughness in this problem is carried out based on the spherical model of microroughnesses by introducing the nonlinear terms describing surface microroughnesses crushing and shearing to the expression of relative displacement of the interacting bodies. The influence of the values of the friction coefficient and the parameters of the microscopic irregularities on the size and shape of the zone of adhesion and the distribution of the tangential contact stresses are analyzed. It is shown that the inclusion of surface microroughness shear forming roughness can lead to a substantial increase in the size of the zone of adhesion.

Keywords: elastic body, rough surface, Coulomb friction, contact problem, numerical solution, iterative process.

doi: <http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1367>

ORCID

Alexandr I. Alexandrov: <http://orcid.org/0000-0003-1568-337X>

Elena V. Grabko: <http://orcid.org/0000-0002-0874-8326>

REFERENCES

1. Aleksandrov V. M. Contact Problems in Tribology, *Mekhanika i nauchno-tekhnicheskii progress* [Mechanics and Scientific-Technical Progress], vol. 3, Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela [Mechanics of deformable solids]. Moscow, Nauka, 1988, pp. 170–180 (In Russian).
2. Vovkushevskiy A. V. Variational Statement and Methods for Solving the Contact Problem with Friction and Surface Roughness Taken into Account, *Izv. Akad. Nauk SSSR. Mekh. Tverd. Tela*, 1991, no. 3, pp. 56–62 (In Russian).

© 2014 Samara State Technical University.

How to cite Reference

Alexandrov A. I., Grabko E. V. Solution of the contact problem on indentation of rectangular punch in an elastic roughnesses half-space in the presence of Coulomb friction, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2014, no. 4 (37), pp. 42–52. doi: [10.14498/vsgtu1367](http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1367). (In Russian)

Authors Details

Alexandr I. Alexandrov (Cand. Tech. Sci.; hepper@gmail.com), Associate Professor, Dept. of Mathematical Analysis.

Elena V. Grabko (elenagrabko@rambler.ru; Corresponding Author), Postgraduate Student, Dept. of Mathematical Analysis.

3. Goryacheva I. G. *Mekhanika friktsionnogo vzaimodeistviia* [Mechanics of friction interaction]. M., Nauka, 2001, 478 pp. (In Russian)
4. Aleksandrov V. M., Pozharskii D. A. Three-dimensional contact problems taking friction and non-linear roughness into account, *J. Appl. Math. Mech.*, 2004, vol. 68, no. 3, pp. 463–472. doi: [10.1016/S0021-8928\(04\)00061-9](https://doi.org/10.1016/S0021-8928(04)00061-9).
5. Pauk V., Zastrau B. W. Plane contact problems with partial slip for rough half-space, *J. Theor. Appl. Mech.*, 2004, vol. 42, no. 1, pp. 107–124, <http://www.ptmts.org/2004-1-pauk-z.pdf>.
6. Pauk V. Plane elastic contact involving friction and boundary roughness, *EJPAU*, 2006, vol. 9, no. 1, #31, <http://www.ejpau.media.pl/articles/volume9/issue1/art-31.pdf>.
7. Dyachenko N. N., Shashkova E. V. Contact of the paraboloidal punch with elastic rough half-space in conditions partial slippage, *Visnik Zaporiz'kogo natsional'nogo universitetu. Fiz.-mat. nauki*, 2010, no. 2, pp. 29–37 (In Russian).
8. Dyachenko N. N., Man'ko N. I.-V., Shashkova E. V. Contact problem of a punch, square in the plan, with rough half-space in partial slippage conditions, *Metodi rozv'iazavnnia prikladnikh zadach mekhaniki deformivnogo tverdogo tila* [Methods of Solving Applied Problems in Solid Mechanics], Issue 13. Dnipropetrovsk, 2012, pp. 159–168 (In Russian).
9. Grabko E. V. Numerical solution of the static contact problem of elastic rough bodies with Coulomb friction, *Problemi obchisliual'noi mekhaniki i mitsnosti konstruksii* [Problems of Computational Mechanics and Strength of Structures], Issue 18. Dnipropetrovsk, Lira, 2012, pp. 39–47 (In Russian).
10. Galanov B. A. The method of boundary equations of the Hammerstein-type for contact problems of the theory of elasticity when the regions of contact are not known, *J. Appl. Math. Mech.*, 1985, vol. 49, no. 5, pp. 634–640. doi: [10.1016/0021-8928\(85\)90084-X](https://doi.org/10.1016/0021-8928(85)90084-X).
11. Aleksandrov A. I. The method of nonlinear boundary integral equations for solving three-dimensional contact problem of the interaction of elastic bodies in the presence of friction, *Visnik Dnipropetrovs'kogo universitetu. Ser. Mekhanika*, 2010, vol. 18, no. 14(1), pp. 26–38 (In Russian), [http://nbuv.gov.ua/j-pdf/vdumec_2010_18_14\(1\)_5.pdf](http://nbuv.gov.ua/j-pdf/vdumec_2010_18_14(1)_5.pdf).
12. Kalker J. J. A survey of the mechanics of contact between solid bodies, *ZAAM*, 1977, vol. 57, no. 5, pp. T3–T17. doi: [10.1002/zamm.19770570503](https://doi.org/10.1002/zamm.19770570503).
13. Aleksandrov A. I., Grabko E. V. The existence theorems for the problem of contact interaction between elastic bodies with the rough surfaces, *Visnik Zaporiz'kogo natsional'nogo universitetu. Fiz.-mat. nauki*, 2010, no. 2, pp. 5–11 (In Russian).
14. Love A. E. H. *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. New York, Dover Publ., 1944, xviii+643 pp.
15. Kravchuk A. S. By the formulation of boundary value problems of the theory of elasticity with boundary friction, *Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela* [Mechanics of deformable solids]. Kuibyshev, Kuibyshev. Univ., 1976, pp. 102–105 (In Russian).
16. Demkin N. B. *Kontaktirovanie sherokhovatykh tel* [Contacting of Rough Surfaces]. Moscow, Nauka, 1970, 227 pp. (In Russian)
17. Pisarenko G. S., Yakovlev A. P., Matveev V. V. *Spravochnik po soprotivleniiu materialov* [Reference book on strength of materials]. Kiev, Naukova dumka, 1988, 736 pp. (In Russian)
18. Johnson K. L. *Contact mechanics*. Cambridge, Cambridge University Press, xi+452 pp.. doi: [10.1017/cbo9781139171731](https://doi.org/10.1017/cbo9781139171731)
19. Aleksandrov A. I., Grabko E. V. Solution of the problems on contact between elastic rough bodies with the use of nonlinear integral equations, *Metodi rozv'iazavnnia prikladnikh zadach mekhaniki deformivnogo tverdogo tila* [Methods of Solving Applied Problems in Solid Mechanics], Issue 13. Dnipropetrovsk, 2012, pp. 14–21 (In Russian).
20. Galin L. A. *Contact problems*, Solid Mechanics and Its Applications, vol. 155, ed. G. M. L. Gladwell. Dordrecht, Springer, 2008, xiii+315 pp.. doi: [10.1007/978-1-4020-9043-1](https://doi.org/10.1007/978-1-4020-9043-1).

Received 13/XI/2014;
received in revised form 07/XII/2014;
accepted 11/XII/2014.