Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2014. № 3 (36). С. 143–160
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1364

УДК 519.624.2

ОЦЕНКА ПОРЯДКА АППРОКСИМАЦИИ МАТРИЧНОГО МЕТОДА ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В. Н. Маклаков

Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

Использование трёх первых членов разложения в ряд Тейлора искомой функции при аппроксимации производных конечными разностями приводит ко второму порядку аппроксимации традиционного метода численного интегрирования краевых задач для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. В работе рассмотрен предложенный ранее метод численного интегрирования, использующего средства матричного исчисления, в котором аппроксимация производных конечными разностями не использовалась. Согласно указанному методу при составлении системы разностных уравнений может быть использовано произвольное число членов разложения в ряд Тейлора искомого решения задачи. При использовании трёх первых членов разложения система разностных уравнений совпадает с традиционной системой. В работе дана оценка невязки и порядка аппроксимации метода в зависимости от числа используемых членов разложения в ряд Тейлора. Теоретически показано, что для краевой задачи с граничными условиями первого рода порядок аппроксимации метода возрастает прямо пропорционально с увеличением числа используемых членов разложения в ряд Тейлора лишь для нечётных значений этого числа. Для чётных значений числа членов порядок аппроксимации совпадает с порядком аппроксимации для числа, меньшего на единицу нечётного значения. Для краевых задач с граничными условиями второго и третьего рода порядок аппроксимации оказался прямо пропорциональным числу используемых членов разложения в ряд Тейлора искомого решения задачи независимо от чётности. В этих случаях порядок аппроксимации в граничных точках, следовательно, и всей задачи, оказался на единицу меньше порядка для внутренних точек сетки разбиения отрезка интегрирования. Дан метод повышения порядка аппроксимации в граничных точках до порядка аппроксимации во внутренних точках сетки. Теоретические выводы подтверждены численным

Образец для цитирования: Маклаков В. Н. Оценка порядка аппроксимации матричного метода численного интегрирования краевых задач для линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2014. № 3 (36). С. 143–160. doi: 10.14498/vsgtu1364.

Сведения об авторе: *Владимир Николаевич Маклаков* (к.ф.-м.н., доц.; makvo63@yandex.ru), доцент, каф. высшей математики и прикладной информатики.

экспериментом для краевой задачи с граничными условиями первого и третьего рода.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка, краевые задачи, граничные условия, порядок аппроксимации, численные методы, многочлены Тейлора.

doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1364

Классический метод численного интегрирования краевых задач для линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (ОДУ2)

$$u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x), \quad u_0 = \widetilde{u}_0, \quad u_n = \widetilde{u}_n, \tag{1}$$

где $u(x)$ — искомое точное решение; $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ — заданные функции, дифференцируемые нужное число раз; $\widetilde{u}_0$, $\widetilde{u}_n$ — заданные числа, использующий конечные разности, имеет аппроксимацию второго порядка [1–6]. Использующие конечные разности методы численного интегрирования краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных также имеют аппроксимацию второго порядка [4–8]. Последнее обусловлено тем, что при аппроксимации производных конечными разностями в разложении искомой функции в ряд Тейлора удерживалось всего три члена разложения.

В работе [9] предложен метод, использующий обратные матрицы и позволяющий увеличить число членов (до произвольного натурального) в разложении искомой функции в ряд Тейлора при численном интегрировании первой краевой задачи для линейных неоднородных ОДУ2 с переменными коэффициентами, при этом аппроксимация производных конечными разностями не использовалась. Обобщение метода для смешанной краевой задачи для линейных неоднородных и для нелинейных ОДУ2 дано в [10,11], соответственно. Однако оценка порядка аппроксимации метода интегрирования дана не была, исследование которой для первой, второй и третьей краевых задач для линейного неоднородного ОДУ2 поставим целью настоящей работы.

Далее будем придерживаться принятых в [4] обозначений:

1) D — область интегрирования, ограниченная отрезком $[a, b]$, D_h — узлы сетки, определяемые значениями $x_i = x_0 + ih$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $x_0 = a$, $x_n = b$, $h = (b - a)/n$, $n + 1$ — число узлов сетки;
2) $u(x)$ — непрерывная функция, являющаяся точным решением краевой задачи (1);
3) $[u]_h$ — сеточная функция, совпадающая с точным решением в узлах сетки D_h;
4) $u^{(h)}$ — искомая сеточная функция.

Для краткости примем для любой функции обозначение $\varphi(x_i) = \varphi_i$, где x_i — узел сетки D_h.

В дальнейшем опустим индекс h в наименованиях сеточных функций $[u]_h$, $u^{(h)}$ и будем оговаривать особо случаи, в которых будет использоваться непрерывная функция $u(x)$, являющаяся точным решением, при сохранении обозначений $u(x_i) = u_i$ для неё в узлах сетки.

Согласно изложенному в [9] методу численного интегрирования первой краевой задачи (1) для каждого внутреннего узла x_i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$ сетки D_h составляется система линейных алгебраический уравнений (СЛАУ), состоящая из $k+1$ уравнений относительно неизвестных $u_i, u'_i, u''_i, \ldots, u_i^{(k)}$. Первые два уравнения системы есть многочлены Тейлора P^k_{i-1}, P^k_{i+1} степени k, полученные из соответствующих рядов Тейлора:

$$u_{i-1} = u_i - hu'_i + \frac{h^2}{2!}u''_i - \frac{h^3}{3!}u'''_i + \cdots = \sum_{m=0}^{k}(-1)^m\frac{h^m}{m!}u_i^{(m)} + \\ + \sum_{m=k+1}^{\infty}(-1)^m\frac{h^m}{m!}u_i^{(m)} = P^k_{i-1} + R^k_{i-1},$$

$$u_{i+1} = u_i + hu'_i + \frac{h^2}{2!}u''_i + \frac{h^3}{3!}u'''_i + \cdots = \sum_{m=0}^{k}\frac{h^m}{m!}u_i^{(m)} + \sum_{m=k+1}^{\infty}\frac{h^m}{m!}u_i^{(m)} = P^k_{i+1} + R^k_{i+1},$$

где

$$R^k_{i-1} = \frac{h^{k+1}}{(k+1)!}u^{(k+1)}(\xi_i) = O(h^{k+1}), \quad \xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$$

— остаточный член. Здесь и далее верхний индекс означает степень многочлена Тейлора, если речь не идёт о показателях алгебраических степеней, степенях производных и символов обратных матриц. Оставшиеся $k-1$ уравнений системы есть равенства, полученные дифференцированием по x обеих частей уравнения (1), т.е.

$$\big(q(x)u + p(x)u' + u''\big)^{(r)} = f(x)^{(r)},$$

где $r = 0, 1, \ldots, k-2$, которые записаны в узле x_i. Преобразования с использованием обратных матриц полученных систем для каждого узла x_i позволяют составить систему разностных уравнений для трёхточечного шаблона x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, решение которой даёт приближённое искомое решение. В [9] показано, что увеличение степени используемых многочленов Тейлора приводит к уменьшению погрешности между точным и приближённым решениями задачи в узлах сетки.

В дальнейшем систему разностных уравнений при фиксированном k будем обозначать, по аналогии с [4], в символьной форме как $L^k_h u = f^k_h$, причём наряду с $L^k_h u = f^k_h$, для краткости эту задачу будем обозначать также как L^k_h.

1. Некоторые формальные преобразования и оценки. Для функции u выполним формально следующие преобразования для тройки узлов x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, сетки D_h при фиксированном k.

Имеем точные равенства

$$[u_i] - h[u'_i] + \frac{h^2}{2!}[u''_i] - \frac{h^3}{3!}[u'''_i] + \cdots + (-1)^k\frac{h^k}{k!}[u_i^{(k)}] = [u_{i-1}] - R^k_{i-1}, \qquad (2)$$

$$[u_i'] - h[u_i''] + \frac{h^2}{2!}[u_i'''] + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{h^{k-1}}{(k-1)!}[u_i^{(k)}] = [u_{i-1}'] - R_{i-1}^{k-1}, \tag{3}$$

и

$$[u_i] + h[u_i'] + \frac{h^2}{2!}[u_i''] + \frac{h^3}{3!}[u_i'''] + \cdots + \frac{h^k}{k!}[u_i^{(k)}] = [u_{i+1}] - R_{i+1}^{k}, \tag{4}$$

$$[u_i'] + h[u_i''] + \frac{h^2}{2!}[u_i'''] + \cdots + \frac{h^{k-1}}{(k-1)!}[u_i^{(k)}] = [u_{i+1}'] - R_{i+1}^{k-1}. \tag{5}$$

Умножая обе части равенств (2), (3) на некоторые числа $\alpha_0 \neq 0$, $\beta_0 \neq 0$ соответственно и складывая, получим:

$$\begin{aligned} \alpha_0[u_i] + (-\alpha_0 h + \beta_0)[u_i'] + \Big(\alpha_0\frac{h^2}{2!} - \beta_0 h\Big)[u_i''] + \Big(-\alpha_0\frac{h^3}{3!} + \beta_0\frac{h^2}{2!}\Big)[u_i''']+ \\ + \cdots + (-1)^k\Big(\alpha_0\frac{h^k}{k!} - \beta_0\frac{h^{k-1}}{(k-1)!}\Big)[u_i^{(k)}] = \alpha_0\big([u_{i-1}] - R_{i-1}^{k}\big)+ \\ + \beta_0\big([u_{i-1}'] - R_{i-1}^{k-1}\big) = [z_{i-1}] - \alpha_0 R_{i-1}^{k} - \beta_0 R_{i-1}^{k-1}, \end{aligned} \tag{6}$$

где введено обозначение

$$[z_{i-1}] = \alpha_0[u_{i-1}] + \beta_0[u_{i-1}']. \tag{7}$$

Выполняя аналогичные действия с равенствами (4), (5) и числами $\alpha_1 \neq 0$, $\beta_1 \neq 0$, найдём

$$\begin{aligned} \alpha_1[u_i] + (\alpha_1 h + \beta_1)[u_i'] + \Big(\alpha_1\frac{h^2}{2!} + \beta_1 h\Big)[u_i''] + \Big(\alpha_1\frac{h^3}{3!} + \beta_1\frac{h^2}{2!}\Big)[u_i''']+ \\ + \cdots + \Big(\alpha_1\frac{h^k}{k!} + \beta_1\frac{h^{k-1}}{(k-1)!}\Big)[u_i^{(k)}] = \alpha_1\big([u_{i+1}] - R_{i+1}^{k}\big)+ \\ + \beta_1\big([u_{i+1}'] - R_{i+1}^{k-1}\big) = [z_{i+1}] - \alpha_1 R_{i+1}^{k} - \beta_1 R_{i+1}^{k-1}, \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$[z_{i+1}] = \alpha_1[u_{i+1}] + \beta_1[u_{i+1}']. \tag{9}$$

Для каждого узла x_i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, составим СЛАУ, в которую внесём соотношения (6), (8) и равенства

$$\big(q[u] + p[u'] + [u'']\big)^{(r)} = f^{(r)}, \quad r = 0, 1, \ldots, k-2,$$

записанные в узле x_i. В итоге получим

$$\begin{cases} \alpha_0[u_i] + (-\alpha_0 h + \beta_0)[u_i'] + \dots + (-1)^k \Big(\alpha_0 \dfrac{h^k}{k!} - \beta_0 \dfrac{h^{k-1}}{(k-1)!}\Big)[u_i^{(k)}] = \\ \qquad\qquad\qquad\qquad = [z_{i-1}] - \alpha_0 R_{i-1}^k - \beta_0 R_{i-1}^{k-1}, \\ \alpha_1[u_i] + (\alpha_1 h + \beta_1)\,[u_i'] + \dots + \Big(\alpha_1 \dfrac{h^k}{k!} + \beta_1 \dfrac{h^{k-1}}{(k-1)!}\Big)[u_i^{(k)}] = \\ \qquad\qquad\qquad\qquad = [z_{i+1}] - \alpha_1 R_{i+1}^k - \beta_1 R_{i+1}^{k-1}, \\ q_i[u_i] + p_i[u_i'] + [u_i''] = f_i, \\ q_i'[u_i] + \big(q_i + p_i'\big)\,[u_i'] + p_i[u_i''] + [u_i'''] = f_i', \\ \dots \\ q_i^{(k-2)}[u_i] + \dots + [u_i^{(k)}] = f_i^{(k-2)}. \end{cases} \tag{10}$$

В матричной форме система (10) имеет вид

$$A_i^k[V_i^k] = [G_i^k]$$

в обозначениях

$$A_i^k = \begin{bmatrix} \alpha_0 & -\alpha_0 h + \beta_0 & \dots & (-1)^k \Big(\alpha_0 \dfrac{h^k}{k!} - \beta_0 \dfrac{h^{k-1}}{(k-1)!}\Big) \\ \alpha_1 & \alpha_1 h + \beta_1 & \dots & \Big(\alpha_1 \dfrac{h^k}{k!} + \beta_1 \dfrac{h^{k-1}}{(k-1)!}\Big) \\ q_i & p_i & \dots & 0 \\ q_i' & q_i + p_i' & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_i^{(k-2)} & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

и

$$[V_i^k] = \begin{bmatrix} [u_i] \\ [u_i'] \\ [u_i''] \\ [u_i'''] \\ \dots \\ [u_i^{(k)}] \end{bmatrix}, \quad [G_i^k] = \begin{bmatrix} [z_{i-1}] - \alpha_0 R_{i-1}^k - \beta_0 R_{i-1}^{k-1} \\ [z_{i+1}] - \alpha_1 R_{i+1}^k - \beta_1 R_{i+1}^{k-1} \\ f_i \\ f_i' \\ \dots \\ f_i^{(k-2)} \end{bmatrix}.$$

В предположении существования обратной матрицы $\big(A_i^k\big)^{-1}$ от матрицы A_i^k найдём $\big(A_i^k\big)^{-1}[G_i^k] = [V_i^k]$. Выпишем первое уравнение последнего матричного равенства

$$a_{11}^{ki}\left([z_{i-1}] - \alpha_0 R_{i-1}^k - \beta_0 R_{i-1}^{k-1}\right) + a_{12}^{ki}\left([z_{i+1}] - \alpha_1 R_{i+1}^k - \beta_1 R_{i+1}^{k-1}\right) + \\ + a_{13}^{ki} f_i + \sum_{m=4}^{k+1} a_{1m}^{ki} f_i^{(m-3)} = [u_i],$$

где a_{1m}^{ki} — соответствующие элементы обратной матрицы $\left(A_i^k\right)^{-1}$ для узла x_i, или после преобразований

$$-\frac{a_{11}^{ki}}{a_{13}^{ki}}\left[z_{i-1}\right]+\frac{[u_i]}{a_{13}^{ki}}-\frac{a_{12}^{ki}}{a_{13}^{ki}}\left[z_{i+1}\right]=f_i+\frac{1}{a_{13}^{ki}}\sum_{m=4}^{k+1}a_{1m}^{ki}f_i^{(m-3)}+ \\ +\frac{-a_{11}^{ki}(\alpha_0R_{i-1}^k+\beta_0R_{i-1}^{k-1})-a_{12}^{ki}(\alpha_1R_{i+1}^k+\beta_1R_{i+1}^{k-1})}{a_{13}^{ki}}. \quad (12)$$

В дальнейшем матрицы A_i^k будем называть локальными матрицами, размерность которых равна $(k+1)$.

Найдём следующие предварительные оценки:

$$R_{i+1}^k-R_{i-1}^k=\sum_{m=k+1}^{\infty}\frac{h^m}{m!}\,u_i^{(m)}-\sum_{m=k+1}^{\infty}(-1)^m\frac{h^m}{m!}\,u_i^{(m)}= \\ =\sum_{m=k+1}^{\infty}\frac{h^m}{m!}\,u_i^{(m)}\left(1-(-1)^m\right) \quad (13)$$

и, аналогично,

$$R_{i+1}^k+R_{i-1}^k=\sum_{m=k+1}^{\infty}\frac{h^m}{m!}\,u_i^{(m)}+\sum_{m=k+1}^{\infty}(-1)^m\frac{h^m}{m!}\,u_i^{(m)}= \\ =\sum_{m=k+1}^{\infty}\frac{h^m}{m!}\,u_i^{(m)}\left(1+(-1)^m\right). \quad (14)$$

Из равенств (13), (14) для чётного k имеем

$$R_{i+1}^k-R_{i-1}^k=\frac{h^{k+1}}{(k+1)!}\,u_i^{(k+1)}\,(1+1)+ \\ +\frac{h^{k+2}}{(k+2)!}\,u_i^{(k+2)}\,(1-1)+\dots=O(h^{k+1}), \quad (15)$$

$$R_{i+1}^k+R_{i-1}^k=\frac{h^{k+1}}{(k+1)!}\,u_i^{(k+1)}\,(1-1)+ \\ +\frac{h^{k+2}}{(k+2)!}\,u_i^{(k+2)}\,(1+1)+\dots=O(h^{k+2}) \quad (16)$$

и для нечётного k —

$$R_{i+1}^k-R_{i-1}^k=\frac{h^{k+1}}{(k+1)!}\,u_i^{(k+1)}\,(1-1)+$$

$$+\frac{h^{k+2}}{(k+2)!}\,u_i^{(k+2)}\,(1+1)+\cdots=O(h^{k+2}), \quad (17)$$

$$R_{i+1}^k+R_{i-1}^k=\frac{h^{k+1}}{(k+1)!}\,u_i^{(k+1)}\,(1+1)+ \\ +\frac{h^{k+2}}{(k+2)!}\,u_i^{(k+2)}\,(1-1)+\cdots=O(h^{k+1}). \quad (18)$$

2. Порядок аппроксимации первой краевой задачи. Сеточная функция u_i, $i=0,1,\ldots,n$, являющаяся решением некоторой разностной краевой задачи, при подстановке в уравнения этой разностной краевой задачи обратит их в верные равенства. В [4] показано, что подстановка в уравнения задачи сеточной функции $[u_i]$, отличающейся от u_i, приведёт к некоторому отличию от верных равенств. Эти отличия и характеризует невязка δf_h^k [4]. Иными словами, подстановка $[u]$ в $L_h^k u=f_h^k$ приведёт к

$$L_h^k[u]=f_h^k+\delta f_h^k. \quad (19)$$

В соответствии с [4] в качестве оценки величины невязки примем норму

$$\|\delta f_h^k\|=\max\bigl(|\delta f_{h0}^k|,|\delta f_{hn}^k|,\max|\delta f_{hi}^k|\bigr), \quad i=1,2,\ldots,n-1,$$

где первые две компоненты характеризуют меру отличий в граничных узлах сетки D_h, оставшиеся — во внутренних узлах.

Согласно [4, 5] разностная краевая задача аппроксимирует дифференциальную краевую задачу на точном решении u, если $\|\delta f_h^k\|\to 0$ при $h\to 0$. Если при этом имеет место неравенство $\|\delta f_h^k\|\leqslant Ch^k$, где $C>0, k>0$ — некоторые постоянные, не зависящие от h, то говорят, что имеет место аппроксимация порядка k относительно величины h.

Пусть $L_h^k u=f_h^k$ аппроксимирует первую дифференциальную краевую задачу (1). В этом случае положим в равенствах (7), (9), (12) $\alpha_0=1$, $\beta_0=0$ и $\alpha_1=1$, $\beta_1=0$ для каждого $i=1,2,\ldots,n-1$. При $i=1$ равенство (7) обратится в краевое условие $[z_0]=u_0=\widetilde{u}_0$, равенство (9) — в $[z_2]=[u_2]$, а уравнение (12) примет вид

$$-\frac{a_{11}^{k1}}{a_{13}^{k1}}\,\widetilde{u}_0+\frac{[u_1]}{a_{13}^{k1}}-\frac{a_{12}^{k1}}{a_{13}^{k1}}\,[u_2]=f_1+\frac{1}{a_{13}^{k1}}\sum_{m=4}^{k+1}a_{1m}^{k1}f_1^{(m-3)}+\frac{-a_{11}^{k1}R_0^k-a_{12}^{k1}R_2^k}{a_{13}^{k1}}. \quad (20)$$

Аналогично при $i=n-1$ получено краевое условие $[z_n]=u_n=\widetilde{u}_n$, равенство $[z_{n-2}]=[u_{n-2}]$ и уравнение

$$-\frac{a_{11}^{k,\,n-1}}{a_{13}^{k,n-1}}[u_{n-2}]+\frac{[u_{n-1}]}{a_{13}^{k,\,n-1}}-\frac{a_{12}^{k,\,n-1}}{a_{13}^{k,\,n-1}}\,\widetilde{u}_n=$$

$$= f_{n-1} + \frac{1}{a_{13}^{k,\,n-1}} \sum_{m=4}^{k+1} a_{1m}^{k,\,n-1} f_{n-1}^{(m-3)} + \frac{-a_{11}^{k,\,n-1} R_{n-2}^{k} - a_{12}^{k,\,n-1} R_{n}^{k}}{a_{13}^{k,\,n-1}}. \quad (21)$$

Для каждого $i = 2, 3, \ldots, n-2$ уравнение (12) запишем так:

$$- \frac{a_{11}^{ki}}{a_{13}^{ki}} [u_{i-1}] + \frac{[u_i]}{a_{13}^{ki}} - \frac{a_{12}^{ki}}{a_{13}^{ki}} [u_{i+1}] =$$

$$= f_i + \frac{1}{a_{13}^{ki}} \sum_{m=4}^{k+1} a_{1m}^{ki} f_i^{(m-3)} + \frac{-a_{11}^{ki} R_{i-1}^{k} - a_{12}^{ki} R_{i+1}^{k}}{a_{13}^{ki}}, \quad i = 2, 3, \ldots, n-2. \quad (22)$$

Составим СЛАУ из уравнений (20)–(22). Отбрасывание последних дробей в уравнениях системы, что равносильно переходу от точного решения $[u_i]$ к искомому приближённому u_i, приведёт эту систему к системе разностных уравнений, соответствующей первой дифференциальной краевой задаче, по крайней мере при k равном трём и пяти, как и было получено в [9]. Следовательно, в соответствии с (19), последняя дробь в уравнениях (20)–(22), да и в (12), характеризует величину невязки в узлах x_i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, т.е. для рассматриваемой задачи имеем

$$\delta f_{hi}^{k} = \frac{-a_{11}^{ki} R_{i-1}^{k} - a_{12}^{ki} R_{i+1}^{k}}{a_{13}^{ki}}. \quad (23)$$

Для первой краевой задачи величина невязки (23) в граничных узлах сетки обращается в нуль в силу того, что уравнения (20), (21) содержат известные значения $\widetilde{u}_0$, $\widetilde{u}_n$ искомой функции в этих узлах.

Непосредственными вычислениями убедимся в справедливости оценки

$$M_{11}^{k} \approx M_{11}^{2}, \quad (24)$$

где M_{11}^{k} — алгебраическое дополнение элемента t_{11}^{k} транспонированной локальной матрицы A_i^k. Действительно, для произвольного натурального числа $k \geqslant 3$ имеем, пренебрегая старшими степенями,

$$M_{11}^{k} = \begin{vmatrix} h & p_i & q_i + p_i' & \ldots & s_i & u_i \\ \dfrac{h^2}{2!} & 1 & p_i & \ldots & v_i & w_i \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{h^{k-1}}{(k-1)!} & 0 & 0 & \ldots & 1 & p_i \\ \dfrac{h^k}{k!} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{(-1)^{k+1} h^k}{k!} \begin{vmatrix} p_i & q_i + p_i' & \ldots & s_i & u_i \\ 1 & p_i & \ldots & v_i & w_i \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & p_i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} h & p_i & q_i + p_i' & \ldots & s_i \\ \dfrac{h^2}{2!} & 1 & p_i & \ldots & v_i \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{h^{k-1}}{(k-1)!} & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= b_k\, h^k + \sum_{m=1}^{k-1} c_m h^m = b_k\, h^k + M_{11}^{k-1} \approx M_{11}^{k-1},$$

где b_k, c_m — коэффициенты, не зависящие от h; s_i, u_i, v_i, w_i — некоторые функции от q_i, p_i и их производных. Повторное использование несколько раз последней формулы приводит к (24).

Аналогично доказывается справедливость оценки

$$M_{12}^k \approx M_{12}^2. \tag{25}$$

Рассмотрим M_{13}^k. Имеем

$$M_{13}^k = \begin{vmatrix} -h & h & q_i + p_i' & \dots & s_i & u_i \\ \frac{h^2}{2!} & \frac{h^2}{2!} & p_i & \dots & v_i & w_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{(-1)^{k-1} h^{k-1}}{(k-1)!} & \frac{h^{k-1}}{(k-1)!} & 0 & \dots & 1 & p_i \\ \frac{(-1)^k h^k}{k!} & \frac{h^k}{k!} & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{-h^k}{k!} \begin{vmatrix} h & q_i + p_i' & \dots & s_i & u_i \\ \frac{h^2}{2!} & p_i & \dots & v_i & w_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{h^{k-1}}{(k-1)!} & 0 & \dots & 1 & p_i \end{vmatrix} +$$

$$+ \frac{(-1)^k h^k}{k!} \begin{vmatrix} -h & q_i + p_i' & \dots & s_i & u_i \\ \frac{h^2}{2!} & p_i & \dots & v_i & w_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{(-1)^{k-1} h^{k-1}}{(k-1)!} & 0 & \dots & 1 & p_i \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} -h & h & q_i + p_i' & \dots & s_i \\ \frac{h^2}{2!} & \frac{h^2}{2!} & p_i & \dots & v_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{(-1)^{k-1} h^{k-1}}{(k-1)!} & \frac{h^{k-1}}{(k-1)!} & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= h^k \sum_{m=1}^{k-1} b_m h^m + \sum_{m=3}^{2k-3} c_m h^m = \sum_{m=k+1}^{2k-1} b_m h^m + M_{13}^{k-1} \approx M_{13}^{k-1},$$

где b_m, c_m — коэффициенты, не зависящие от h. После повторного использования несколько раз последней формулы получим

$$M_{13}^k \approx M_{13}^2. \tag{26}$$

На основании соотношений (24)–(26) для любого $k \geqslant 3$ из очевидных равенств

$$-\frac{a_{11}^k}{a_{13}^k} = -\frac{M_{11}^k}{M_{13}^k}, \quad -\frac{a_{12}^k}{a_{13}^k} = -\frac{M_{12}^k}{M_{13}^k}$$

следуют оценки

$$-\frac{a_{11}^k}{a_{13}^k} \approx -\frac{M_{11}^2}{M_{13}^2} = \frac{2 - hp_i}{2h^2}, \quad -\frac{a_{12}^k}{a_{13}^k} \approx -\frac{M_{12}^2}{M_{13}^2} = \frac{2 + hp_i}{2h^2}.$$

Тогда величину невязки (23) на точном решении $[u]$ во внутренних узлах x_i сетки D_h задачи L_h^k запишем так:

$$\delta f_{hi}^k = \frac{-a_{11}^k R_{i-1}^k - a_{12}^k R_{i+1}^k}{a_{13}^k} = \frac{(2 - hp_i)\, R_{i-1}^k + (2 + hp_i)\, R_{i+1}^k}{2h^2} = \\ = \frac{R_{i+1}^k + R_{i-1}^k}{h^2} + \frac{hp_i \left(R_{i+1}^k - R_{i-1}^k\right)}{2h^2} \tag{27}$$

для произвольного k. Для чётного k с учётом (15), (16) из (27) имеем

$$\delta f_{hi}^k = \frac{R_{i+1}^k + R_{i-1}^k}{h^2} + \frac{hp_i \left(R_{i+1}^k - R_{i-1}^k\right)}{2h^2} = \\ = \frac{O(h^{k+2})}{h^2} + \frac{hp_i O(h^{k+1})}{2h^2} = O(h^k) + O(h^k) = O(h^k), \tag{28}$$

и для нечётного k с учётом (17), (18) —

$$\delta f_{hi}^k = \frac{O(h^{k+1})}{h^2} + \frac{hp_i O(h^{k+2})}{2h^2} = O(h^{k-1}) + O(h^{k+1}) = O(h^{k-1}). \tag{29}$$

Из равенства (28) следует оценка $\|\delta f_h^k\| \leqslant C h^k$ для чётного k, а из (29) — оценка $\|\delta f_h^k\| \leqslant C h^{k-1}$ для нечётного k, откуда имеем, что задачи L_h^{2m} и L_h^{2m+1} для любого натурального $m \geqslant 1$ имеют одинаковый порядок аппроксимации. Следовательно, на практике для уменьшения объёма вычислений следует использовать задачи L_h^k с чётными значениями k. Действительно, число арифметических операций только для нахождения обратной матрицы от локальной A_i^k методом Гаусса вычисляется по формуле [12]

$$\frac{8}{3}\,(k+1)^3 - \frac{(k+1)^2}{2} - \frac{k+1}{6} - 1.$$

Результат о выборе чётного значения k ниже будет подтверждён численным экспериментом.

3. Порядок аппроксимации второй и третьей краевых задач. При исследовании второй и третьей краевых задач в [4–6] производные в граничных узлах сетки были заменены конечными разностями первого порядка аппроксимации относительно h, в силу чего СЛАУ для вычисления u_i стала содержать

$n+1$ уравнений с $n+1$ неизвестными (по сравнению с первой краевой задачей в систему были добавлены два уравнения, содержащие неизвестные u_0, u_n). В силу того, что СЛАУ для вычисления u_i, составленная из уравнений (20)–(22), записанных без остаточных членов, содержит $n-1$ уравнений с $n-1$ неизвестными, то не представляется возможным вычислить невязки δf_{h0}^k и δf_{hn}^k с использованием последней дроби в (12). Поэтому далее в качестве нормы примем $\|\delta f_h^k\| = \max\left(|\delta f_{hi}^k|\right)$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

В узлах сетки D_h с номерами $i = 2, 3, \ldots, n-2$ второй и третьей краевых задач, граничные условия которых имеют соответственно вид $u_0' = \widetilde{u}_0'$, $u_n' = \widetilde{u}_n'$ и $\alpha_0 u_0 + \beta_0 u_0' = \widetilde{z}_0$, $\alpha_1 u_n + \beta_1 u_n' = \widetilde{z}_n$, где $\widetilde{u}_0'$, $\widetilde{u}_n'$, $\widetilde{z}_0$, $\widetilde{z}_n$, α_0, α_1, β_0, β_1 — заданные числа, ситуация полностью совпадает с изложенной выше первой краевой задачей, для которой $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = 0$ и $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 0$.

Оценим порядок аппроксимации третьей краевой задачи в узле x_1, в котором $\alpha_0 \neq 0, \beta_0 \neq 0$ и $\alpha_1 = 1, \beta_1 = 0$.

Из последней дроби равенства (12) следует оценка невязки

$$\delta f_{h1}^k = \frac{-a_{11}^{k1}(\alpha_0 R_0^k + \beta_0 R_0^{k-1}) - a_{12}^{k1} R_2^k}{a_{13}^{k1}}. \tag{30}$$

Локальная матрица A_1^k рассматриваемой задачи отличается только второй строкой, составленной из коэффициентов разложения (4), от локальной матрицы (11) при $i = 1$, поэтому оценка (24) для M_{11}^k сохранит форму, а для M_{12}^k, M_{13}^k найдём:

$$M_{12}^k = b_k h^k + c_k h^{k-1} + M_{12}^{k-1} \approx M_{12}^{k-1} \approx M_{12}^2,$$
$$M_{13}^k = \sum_{m=k+1}^{2k-1} b_m h^m + \sum_{m=k+1}^{2k-2} c_m h^m + M_{13}^{k-1} \approx M_{13}^{k-1} \approx M_{13}^2,$$

что совпадает с (25) и (26) соответственно.

На основании соотношений (24)–(26) для любого $k \geqslant 3$ из очевидных равенств

$$-\frac{a_{11}^{k1}}{a_{13}^{k1}} = -\frac{M_{11}^k}{M_{13}^k}, \quad -\frac{a_{12}^{k1}}{a_{13}^{k1}} = -\frac{M_{12}^k}{M_{13}^k}$$

следуют оценки:

$$-\frac{a_{11}^{k1}}{a_{13}^{k1}} \approx -\frac{M_{11}^2}{M_{13}^2} = \frac{2 - hp_1}{-3\beta_0 h + 2\alpha_0 h^2} \approx \frac{2}{-3\beta_0 h},$$
$$-\frac{a_{12}^{k1}}{a_{13}^{k1}} \approx -\frac{M_{12}^2}{M_{13}^2} = \frac{-2\beta_0 - 2h\left(\beta_0 p_1 - \alpha_0\right) + \alpha_0 h^2 p_1}{-3\beta_0 h^2 + 2\alpha_0 h^3} \approx \frac{2}{3h^2}.$$

Тогда из соотношения (30) имеем

$$\delta f_{h1}^k = \frac{2\left(\alpha_0 O(h^{k+1}) + \beta_0 O\left(h^k\right)\right)}{-3\beta_0 h} + \frac{2\,O(h^{k+1})}{3h^2} =$$
$$= O(h^{k-1}) + O(h^{k-1}) = O(h^{k-1}),$$

т.е. порядок аппроксимации в узле x_1, следовательно, и всей разностной краевой задачи L_h^k оказался на единицу меньше степени многочлена Тейлора k.

Точно такой же вывод о степени аппроксимации второй разностной краевой задачи следует из равенства (12), записанного в узле x_1, в котором $\alpha_0 = 0$, $\beta_0 = 1$ и $\alpha_1 = 1, \beta_1 = 0$:

$$\delta f_{h1}^k = \frac{-a_{11}^{k1} R_0^{k-1} - a_{12}^{k1} R_2^k}{a_{13}^{k1}}. \tag{31}$$

Ситуация в узле x_{n-1} третьей ($\alpha_0 = 1, \beta_0 = 0$, и $\alpha_1 \neq 0, \beta_1 \neq 0$) и второй ($\alpha_0 = 1, \beta_0 = 0$, и $\alpha_1 = 0, \beta_1 = 1$) краевых задач полностью аналогична изложенной. Действительно, в этом случае локальная матрица A_{n-1}^k задачи будет отличаться только первой строкой, составленной из коэффициентов разложения (2), от локальной матрицы (11) при $i = n-1$.

Невязка (31) показывает, что порядок аппроксимации второй разностной краевой задачи L_h^2 равен единице в узлах x_1, x_{n-1} и, как следует из (28) для чётного $k = 2$, равен двум в узлах $i = 2, 3, \ldots, n-2$. Повысим порядок аппроксимации на единицу в узлах x_1, x_{n-1}, оставаясь в рамке второй разностной краевой задачи L_h^2.

Запишем систему (10) в узле x_1 при $\alpha_0 = 0, \beta_0 = 1$ и $\alpha_1 = 1, \beta_1 = 0$, ограничиваясь степенями производных не старше третьей:

$$\begin{cases} [u_1'] - h[u_1''] + \dfrac{h^2}{2!}\,[u_1'''] = \widetilde{u}_0' - R_0^2, \\ [u_1] + h[u_1'] + \dfrac{h^2}{2!}\,[u_1''] + \dfrac{h^3}{3!}\,[u_1'''] = [u_2] - R_2^3, \\ q_1[u_1] + p_1[u_1'] + [u_1''] = f_1, \end{cases}$$

в которую подставим значение $[u_1''']$, найденное дифференцированием обеих частей равенства:

$$[u''] = f - p[u'] - q[u]. \tag{32}$$

Получим

$$\begin{cases} -\dfrac{h^2}{2!}\,q_1'[u_1] + \Big(1 - \dfrac{h^2}{2!}\,\left(q_1 + p_1'\right)\Big)[u_1'] - \Big(h + \dfrac{h^2}{2!}\,p_1\Big)[u_1''] = \widetilde{u}_0' - \dfrac{h^2}{2!}\,f_1' - R_0^2, \\ \Big(1 - \dfrac{h^3}{3!}\,q_1'\Big)[u_1] + \Big(h - \dfrac{h^3}{3!}\,\left(q_1 + p_1'\right)\Big)[u_1'] + \Big(\dfrac{h^2}{2!} - \dfrac{h^3}{3!}\,p_1\Big)[u_1''] = \\ \qquad\qquad = [u_2] - \dfrac{h^3}{3!}\,f_1' - R_2^3, \\ q_1[u_1] + p_1[u_1'] + [u_1''] = f_1. \end{cases}$$

В матричной форме последняя система уравнений имеет вид

$$A_1^2[V_1^2] = [G_1^2]$$

в обозначениях

$$A_1^2=\begin{bmatrix} -\dfrac{h^2}{2!}\,q_1' & 1-\dfrac{h^2}{2!}\,(q_1+p_1') & -h-\dfrac{h^2}{2!}\,p_1 \\ 1-\dfrac{h^3}{3!}\,q_1' & h-\dfrac{h^3}{3!}\,(q_1+p_1') & \dfrac{h^2}{2!}-\dfrac{h^3}{3!}\,p_1 \\ q_1 & p_1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$[V_1^2]=\begin{bmatrix}[u_1]\\ [u_1']\\ [u_1'']\end{bmatrix},\quad [G_1^2]=\begin{bmatrix} \widetilde{u}_0'-\dfrac{h^2}{2!}\,f_1'-R_0^2 \\ [u_2]-\dfrac{h^3}{3!}\,f_1'-R_2^3 \\ f_1\end{bmatrix}.$$

В предположении существования обратной матрицы $\left(A_1^2\right)^{-1}$ от локальной A_1^2 найдём $\left(A_1^2\right)^{-1}[G_1^2]=[V_1^2]$. Выпишем первое уравнение последнего матричного равенства

$$a_{11}^2\Big(\widetilde{u}_0'-\frac{h^2}{2!}\,f_1'-R_0^2\Big)+a_{12}^2\Big([u_2]-\frac{h^3}{3!}\,f_1'-R_2^3\Big)+a_{13}^3f_1=[u_1],$$

или

$$-\frac{a_{11}^2}{a_{13}^2}\,\widetilde{u}_0'+\frac{[u_1]}{a_{13}^2}-\frac{a_{11}^2}{a_{13}^2}\,[u_2]=f_1-\frac{a_{11}^2}{a_{13}^2}\,\frac{h^2}{2!}\,f_1'-\frac{a_{12}^2}{a_{13}^2}\,\frac{h^3}{3!}\,f_1'+\frac{-a_{11}^2R_0^2-a_{12}^2R_2^3}{a_{13}^2},$$

где последняя дробь характеризует величину невязки.

Для рассматриваемого случая имеем следующие оценки коэффициентов:

$$-\frac{a_{11}^2}{a_{13}^2}=\frac{-12+6hp_1-2h^2\left(p_1^2-q_1-p_1'\right)}{18h+4h^2p_1-5h^3\left(q_1+p_1'\right)}\approx\frac{-2}{3h},$$

$$-\frac{a_{12}^2}{a_{13}^2}=\frac{12+12hp_1+6h^2\left(p_1^2-q_1-p_1'\right)}{18h^2+4h^3p_1-5h^4\left(q_1+p_1'\right)}\approx\frac{2}{3h^2},$$

тогда

$$\delta f_{h1}^2=\frac{-2\,O\left(h^3\right)}{3h}+\frac{2\,O(h^4)}{3h^2}=O(h^2)+O(h^2)=O(h^2),$$

т.е. порядок аппроксимации в узле x_1 и, аналогично, в x_{n-1}, следовательно, и всей разностной краевой задачи L_h^2 теперь оказался равным двум.

Отметим, что такой же (второй) порядок аппроксимации имеет вторая разностная краевая задача L_h^3. Действительно, из (29) для нечётного $k=3$ следует второй порядок аппроксимации в узлах x_i, $i=2,3,\ldots,n-2$. Точно такой же (второй) порядок даёт невязка (31) при $k=3$ в узлах x_1,x_{n-1}.

Таким образом, из вышеизложенного следует, что увеличение степени многочлена Тейлора k и использование операции дифференцирования обеих частей равенства (32) $k-1$ раз позволяют аналогичным образом увеличить порядок аппроксимации в узлах x_1,x_{n-1} , следовательно, и всей задачи до произвольного натурального числа.

Использование в системе (10) различных комбинаций значений α_0, β_0 и α_1, β_1 для узлов x_1 и x_{n-1} соответственно даёт возможность рассмотреть краевые задачи со смешанными краевыми условиями [10].

4. Оценка погрешности. Для задачи L_h^k были приняты следующие две нормы для погрешности в узлах x_i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$ сетки D_h:

1) $D^k = \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1}([u_i] - u_i)^2} \Big/ \sum_{i=1}^{n-1} \big|[u_i]\big|\right) 100\%$ — суммарная оценка относительной погрешности, которую можно трактовать как некий аналог коэффициента вариации в статистике, который характеризует меру разброса в процентах [13]; величина D^k отличается от коэффициента вариации тем, что стандартное отклонение заменено корнем квадратным из остаточной дисперсии [13].
2) $E^k = \max\big|[u_i] - u_i\big|$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$ — максимальная оценка абсолютной погрешности.

В качестве примера использовано ОДУ2

$$u'' - \frac{2}{x}u' + \frac{2}{x^2} = x\cos x, \tag{33}$$

имеющее аналитическое решение $u = C_1 x + C_2 x^2 - x\cos x$, и исследованы первая и третья краевые задачи с краевыми условиями

$$u(5) = 22.32, \quad u(13) = 23.95 \tag{34}$$

и

$$u(5) + 3u'(5) = 17.60, \quad 2u(13) + 2u'(13) = 56.02 \tag{35}$$

соответственно. Было принято $n = 20$, $h = 0.4$. Результаты численного эксперимента для первой краевой задачи (33), (34) приведены в табл. 1, для третьей — в табл. 2. Расчёты для третьей краевой задачи (33), (35) выполнены без использования метода повышения порядка аппроксимации.

Анализ данных табл. 1 свидетельствует, что суммарная относительная D^k и максимальная абсолютная E^k погрешности задач L_h^{2m} и L_h^{2m+1}, имеющих одинаковый порядок аппроксимации, различаются незначительно для любого натурального $m \in [1, 4]$, тогда как указанная особенность в данных табл. 2 отсутствует, чего и следовало ожидать. Отметим, что погрешности для первой краевой задачи L_h^{2m} и третьей краевой задачи L_h^{2m+1} сравнимы между собой, что подтверждает вывод о том, что порядок аппроксимации второй и

Таблица 1

Значения погрешностей для первой краевой задачи (33), (34)
[The accuracies for the first boundary value problem (33), (34)]

k	2	3	4	5
D^k, %	$8.11 \cdot 10^{-2}$	$7.29 \cdot 10^{-2}$	$4.84 \cdot 10^{-4}$	$4.18 \cdot 10^{-4}$
E^k	$2.23 \cdot 10^{-1}$	$1.94 \cdot 10^{-1}$	$1.30 \cdot 10^{-3}$	$1.04 \cdot 10^{-3}$

k	6	7	8	9
D^k, %	$1.96 \cdot 10^{-6}$	$1.51 \cdot 10^{-6}$	$5.88 \cdot 10^{-7}$	$5.90 \cdot 10^{-7}$
E^k	$5.37 \cdot 10^{-6}$	$4.10 \cdot 10^{-6}$	$1.21 \cdot 10^{-6}$	$1.21 \cdot 10^{-6}$

Таблица 2

Значения погрешностей для третьей краевой задачи (33), (35)
[The accuracies for the third boundary value problem (33), (35)]

k	2	3	4	5
D^k, %	$6.42 \cdot 10^{-1}$	$1.08 \cdot 10^{-1}$	$1.06 \cdot 10^{-2}$	$4.22 \cdot 10^{-4}$
E^k	1.16	$2.79 \cdot 10^{-1}$	$1.79 \cdot 10^{-2}$	$1.18 \cdot 10^{-3}$

k	6	7	8	9
D^k, %	$6.88 \cdot 10^{-5}$	$1.24 \cdot 10^{-6}$	$2.98 \cdot 10^{-7}$	$3.04 \cdot 10^{-7}$
E^k	$1.15 \cdot 10^{-4}$	$2.80 \cdot 10^{-6}$	$7.10 \cdot 10^{-7}$	$6.80 \cdot 10^{-7}$

третьей разностных краевых задач на единицу меньше степени используемого многочлена Тейлора.

Выводы.

1. Теоретически выявлены закономерности между порядком аппроксимации метода и степенью используемого многочлена Тейлора для краевых задач с граничными условиями различных родов. Установлено, что порядок аппроксимации для первых разностных краевых задач L_h^{2m} и L_h^{2m+1} совпадает и равен $2m$ для любого натурального m, тогда как для второй и третьей краевых задач указанная особенность отсутствует, причем порядок аппроксимации задач прямо пропорционален степени используемого многочлена Тейлора и меньше него на единицу.

2. Предложен способ повышения порядка аппроксимации метода до произвольного натурального числа для разностных краевых задач с граничными условиями второго и третьего рода.

ORCID
Vladimir Maklakov: http://orcid.org/0000-0003-1644-7424

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Keller H. B. Accurate Difference Methods for Nonlinear Two-point Boundary Value Problems // *SIAM J. Numer. Anal.*, 1974. vol. 11, no. 2. pp. 305–320. doi: 10.1137/0711028.
2. Lentini M., Pereyra V. A Variable Order Finite Difference Method for Nonlinear Multipoint Boundary Value Problems // *Mathematics of Computation*, 1974. vol. 28, no. 128. pp. 981–1003. doi: 10.2307/2005360.
3. Keller H. B. Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential equations: Survey and Some Resent Results on Difference Methods / *Numerical Solutions of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations*; ed. A. K. Aziz. New York: Academic Press, 1975. pp. 27–88. doi: 10.1016/b978-0-12-068660-5.50007-7.
4. Годунов С. К., Рябенький В. С. *Разностные схемы. Введение в теорию.* М.: Наука, 1973. 400 с.
5. Самарский А. А. *Теория разностных схем.* М.: Наука, 1977. 656 с.
6. Формалеев В. Ф., Ревизников Д. Л. *Численные методы.* М.: Физматлит, 2004. 400 с.
7. Boutayeb A., Chetouani A. Global Extrapolations of Numerical Methods for a Parabolic Problem with Nonlocal Boundary Conditions // *International Journal of Computer Mathematics*, 2003. vol. 80, no. 6. pp. 789–797. doi: 10.1080/0020716021000039209.
8. Boutayeb A., Chetouani A. A Numerical Comparison of Different Methods Applied to the Solution of Problems with Non Local Boundary Conditions // *Applied Mathematical Sciences*, 2007. vol. 1, no. 44. pp. 2173–2185.
9. Радченко В. П., Усов А. А. Модификация сеточных методов решения линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами на основе тейлоровских

разложений // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2008. №2(17). С. 60–65. doi: 10.14498/vsgtu646.

10. Маклаков В. Н. Численное интегрирование матричным методом смешанных краевых задач для линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка // *Современный научный вестник*, 2013. №16 (155). С. 72–78.
11. Маклаков В. Н., Усов А. А. Численное интегрирование матричным методом краевых задач для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с использованием итерационных процедур / *Труды девятой Всероссийской научной конференции с международным участием* (21–23 мая 2013 г.). Часть 3: Дифференциальные уравнения и краевые задачи / Матем. моделирование и краев. задачи. Самара: СамГТУ, 2013. С. 35–42.
12. Турчак Л. И. *Основы численных методов*. М.: Наука, 1987. 320 с.
13. Закс Л. *Статистическое оценивание*. М.: Статистика, 1976. 598 с.

Поступила в редакцию 26/VII/2014;
в окончательном варианте — 16/VIII/2014;
принята в печать — 5/IX/2014.

Vestn. Samar. Gos. Techn. Un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki. 2014. Issue 3 (36). Pp. 143–160
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci. 2014. Issue 3 (36). Pp. 143–160]

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) **doi:** http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1364

MSC: 65L10, 65L12

ESTIMATION OF THE ORDER OF THE MATRIX METHOD APPROXIMATION OF NUMERICAL INTEGRATION OF BOUNDARY-VALUE PROBLEMS FOR THE SECOND ORDER INHOMOGENEOUS LINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

V. N. Maklakov

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

Using the first three terms of Taylor expansion of the required function in the approximate derivative by finite differences leads to the second order approximation of the traditional numerical quadrature method of boundary value problems for linear ordinary second order differential equations with variable coefficients. The paper shows previously proposed numerical quadrature method using tools of matrix calculus where the approximate derivative by finite differences was not used. Agreeing to above method the

How to cite Reference: Maklakov V. N. Estimation of the order of the matrix method approximation of numerical integration of boundary-value problems for the second order inhomogeneous linear ordinary differential equations, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2014, no. 3 (36), pp. 143–160. doi: 10.14498/vsgtu1364. (In Russian)

Author Details: *Vladimir N. Maklakov* (Cand. Phys. & Math. Sci.; makvo63@yandex.ru), Associate Professor, Dept. of Higher Mathematics and Applied Informatics.

arbitrary number of terms of Taylor expansion for the required solution may be used when compiling the difference equation system. When using the three first terms of expansion the difference equation system coincided with the traditional system. The estimation of residuals and the order of approximation depending on the number of the used terms of Taylor expansion is given. It is theoretically shown that for the boundary value problem with boundary conditions of the first kind the approximation method order increases in direct proportion with the increasing in the number of members used in Taylor series expansion only for odd values of this number. For even values of this number the order of approximation coincides with the order of approximation for the number less by unit of the odd values. For boundary value problems with boundary conditions of the second and third kinds the order of approximation was directly proportional to the number of used terms in the Taylor series expansion of the required solution of the problem regardless of evenness. In these cases the order of approximation of the boundary points and therefore the whole problem turned out to be one unit less than the order for the inner points of the grid for the interval of integration. The method of approximation order increase at the boundary points up to the approximation order in the inner points of the grid is presented. The theoretical conclusions are confirmed by a numerical experiment for a boundary value problem with boundary conditions of the first and third kinds.

Keywords: ordinary differential equations of second order, boundary value problems, boundary conditions, approximation order, numerical methods, Taylor polynomials.

doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1364

ORCID
Vladimir Maklakov: http://orcid.org/0000-0003-1644-7424

REFERENCES

1. Keller H. B. Accurate Difference Methods for Nonlinear Two-point Boundary Value Problems, *SIAM J. Numer. Anal.*, 1974, vol. 11, no. 2, pp. 305–320. doi: 10.1137/0711028.
2. Lentini M., Pereyra V. A Variable Order Finite Difference Method for Nonlinear Multipoint Boundary Value Problems, *Mathematics of Computation*, 1974, vol. 28, no. 128, pp. 981–1003. doi: 10.2307/2005360.
3. Keller H. B. Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential equations: Survey and Some Resent Results on Difference Methods, *Numerical Solutions of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations*; ed. A. K. Aziz. New York, Academic Press, 1975, pp. 27–88. doi: 10.1016/b978-0-12-068660-5.50007-7.
4. Godunov S. K., Ryaben'kii V. S. *Difference schemes. An introduction to the underlying theory*, Studies in Mathematics and its Applications, vol. 19. Amsterdam, New York, Oxford, Tokyo, North-Holland, 1987, xvii+489 pp.. doi: 10.1016/S0168-2024(08)70246-7.
5. Samarskii A. A. *The theory of difference schemes*, Pure and Applied Mathematics, vol. 240. New York, NY, Marcel Dekker, 2001, 786 pp.. doi: 10.1201/9780203908518.
6. Formaleev V. F., Reviznikov D. L. *Chislennye metody* [Numerical Methods]. Moscow, Fizmatlit, 2004, 400 pp. (In Russian)
7. Boutayeb A., Chetouani A. Global Extrapolations of Numerical Methods for a Parabolic Problem with Nonlocal Boundary Conditions, *International Journal of Computer Mathematics*, 2003, vol. 80, no. 6, pp. 789–797. doi: 10.1080/0020716021000039209.
8. Boutayeb A., Chetouani A. A Numerical Comparison of Different Methods Applied to the Solution of Problems with Non Local Boundary Conditions, *Applied Mathematical Sciences*, 2007, vol. 1, no. 44, pp. 2173–2185.

9. V. P. Radchenko, A. A. Usov Modified grid method for solving linear differential equation equipped with variable coefficients based on Taylor series, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2008, no. 2(17), pp. 60–65 (In Russian). doi: 10.14498/vsgtu646.
10. Maklakov V. N. Numerical integration of the mixed boundary value problems for the second order inhomogeneous linear ordinary differential equations by a matrix method, *Sovremennyi nauchnyi vestnik*, 2013, no. 16 (155), pp. 72–78 (In Russian).
11. Maklakov V. N., Usov A. A. Numerical integration of the boundary value problems for the second order nonlinear ordinary differential equations by a matrix method with the use of iterative procedures, *Proceedings of the Ninth All-Russian Scientific Conference with international participation* (21–23 May 2013). Part 3, Matem. Mod. Kraev. Zadachi. Samara, Samara State Technical Univ., 2013, pp. 35–42 (In Russian).
12. Turchak L. I. *Osnovy chislennykh metodov* [Foundations of numerical methods]. Moscow, Nauka, 1987, 320 pp. (In Russian)
13. Zaks L. *Statisticheskoe otsenivanie* [Statistical Estimation]. Moscow, Statistika, 1976, 598 pp. (In Russian)

Received 26/VII/2014;
received in revised form 16/VIII/2014;
accepted 5/IX/2014.