Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2013. № 3 (32). С. 29–45

УДК 517.956.6

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С УСЛОВИЯМИ ПЕРИОДИЧНОСТИ

***К. Б. Сабитов*[1], *Г. Ю. Удалова*[2]**

[1] Институт прикладных исследований,
453103, Россия, Стерлитамак, ул. Одесская, 68.
[2] Самарский государственный архитектурно-строительный университет,
443001, Россия, Самара, ул. Молодогвардейская, 194.

E-mails: `sabitov_fmf@mail.ru`, `yeyeg@yandex.ru`

Исследуется задача с двумя нелокальными граничными условиями для уравнения смешанного типа третьего порядка, сводящаяся к обратной задаче для уравнения эллиптико-гиперболического типа с неизвестными правыми частями. Установлен критерий единственности. Решение построено в явном виде как суммы ортогональных рядов по системе собственных функций соответствующей одномерной спектральной задачи. Дано обоснование сходимости рядов в соответствующих классах функций при определённых ограничениях на данные задачи. Доказана устойчивость решения по граничным данным.

Ключевые слова: *уравнения смешанного типа третьего порядков, прямая и обратная задачи, спектральный метод, единственность, существование, устойчивость.*

Введение. Рассмотрим уравнение третьего порядка смешанного типа

$$\frac{\partial}{\partial y}\,(Lu) = \frac{\partial}{\partial y}\left(u_{xx} + (\operatorname{sgn} y)u_{yy} - b^2 u\right) = 0 \tag{1}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,y) \mid 0 < x < 1,\ -\alpha < y < \beta\}$, где α, β, b — заданные положительные постоянные, и следующую задачу.

Задача 1. *Найти в области D функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям:*

$$u(x,y) \in C^1(\overline{D}),\ u_y(x,y) \in C^1(D),\ u_{xxy},\ u_{yyy} \in C(D_- \cup D_+); \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\,(Lu) = 0, \quad (x,y) \in D_- \cup D_+;$$

$$u(0,y) = u(1,y), \quad u_x(0,y) = u_x(1,y), \quad -\alpha \leqslant y \leqslant \beta; \tag{3}$$

$$u(x,-\alpha) = \psi(x), \quad u(x,\beta) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1; \tag{4}$$

$$u_y(x,-\alpha) = g(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{5}$$

где $\psi(x)$, $\varphi(x)$, $g(x)$ — заданные достаточно гладкие функции, $\psi(0) = \psi(1)$, $\varphi(0) = \varphi(1)$, $\psi'(0) = \psi'(1)$, $\varphi'(0) = \varphi'(1)$, $D_- = D \cap \{y < 0\}$, $D_+ = D \cap \{y > 0\}$.

Уравнение (1) в области D равносильно уравнению эллиптико-гиперболического типа второго порядка с неизвестной правой частью

$$Lu = f(x,y) = \begin{cases} f_1(x), & y > 0, \\ f_2(x), & y < 0. \end{cases} \tag{6}$$

Камиль Басирович Сабитов (д.ф.-м.н., проф.), директор. *Удалова Галина Юрьевна*, аспирант, каф. высшей математики.

Тогда задача 1 сводится к следующей обратной задаче.

Задача 2. *Найти в области D функции $u(x,y)$ и $f(x,y)$, удовлетворяющие условиям* (2), (3)–(5) *и*

$$Lu = f(x,y), \quad (x,y) \in D_- \cup D_+; \tag{7}$$

$$f_i(x) \in C(0,1) \cap L_2[0,1], \quad i = 1,2. \tag{8}$$

Краевые задачи для дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка изучались многими авторами (см. работы [1–3] и приведенную там библиографию). В [1,2] исследуются краевые задачи для уравнения (1) при $b = 0$ аналитическими методами в области, где гиперболическая часть представляет собой характеристический треугольник. Решение найдено в классе функций, представимых в виде $u(x,y) = \omega(x,y) + \omega(x)$, где $\omega(x,y)$ — произвольное регулярное решение уравнения $Lu = 0$ при $b = 0$, $y \neq 0$, $\omega(x)$ — произвольная функция из класса $C[0,1] \cap C^2(0,1)$, удовлетворяющая условиям $\omega(0) = \omega(1) = 0$. В [3] получены теоремы об однозначной разрешимости краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных нечётного порядка в цилиндрических областях. В работах [4,5] доказаны единственность и существование решения краевых задач для уравнений параболо-гиперболического типа третьего порядка в прямоугольной области.

В данной работе, как и в работах [4,5], предлагается метод решения задачи для дифференциального уравнения третьего порядка путём сведения к обратной задаче для дифференциального уравнения смешанного типа второго порядка с неизвестными правыми частями. Ранее обратные задачи для различных типов дифференциальных уравнений в частных производных изучались многими авторами [6–13]. Обратные задачи для уравнений смешанного типа второго порядка с неизвестными правыми частями рассматривались в работах [14–20]. В работах [18–20] для уравнения (6) при $f_1(x) = f_2(x)$ и $f_1(x) \neq f_2(x)$ изучены обратные задачи с граничными условиями второго рода $u_x(0,y) = u_x(1,y) = 0$, $-\alpha \leqslant y \leqslant \beta$, когда $b = 0$ и $b > 0$.

В этой работе изучены задачи 1 и 2 с условиями периодичности (3). Установлен критерий единственности. Решение указанных задач построено в виде суммы рядов по системе собственных функций соответствующей одномерной спектральной задачи. При определенных ограничениях на данные задачи (2)–(5) дано обоснование сходимости рядов в классах (2) и (8). Установлена устойчивость решения по граничным данным.

1. Формальное построение решения задач 1 и 2. Поставленную задачу будем решать методом разделения переменных $u(x,y) = X(x)Y(y)$. Соответствующая спектральная задача относительно $X(x)$ имеет следующую систему собственных чисел и собственных функций: $\sqrt{\mu_k} = 2\pi k$, $k \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$;

$$X_0(x) = 1, \quad X_{2k-1}(x) = \sqrt{2}\sin 2\pi kx, \quad X_{2k} = \sqrt{2}\cos 2\pi kx, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

Система (9) ортонормирована, полна и образует базис в пространстве $L_2[0,1]$.

Пусть существует решение задачи 2. Будем искать его в виде суммы ортогональных рядов:

$$u(x,y) = u_0(y) + \sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(u_{2k-1}(y)\sin 2\pi kx + u_{2k}(y)\cos 2\pi kx\right), \tag{10}$$

$$f_i(x) = f_{i,0} + \sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(f_{i,2k-1}\sin 2\pi kx + f_{i,2k}\cos 2\pi kx\right), \quad i=1,2, \tag{11}$$

где

$$\begin{gathered} u_0(y) = \int_0^1 u(x,y)\,dx, \quad u_{2k-1}(y) = \sqrt{2}\int_0^1 u(x,y)\sin 2\pi kx\,dx, \\ u_{2k}(y) = \sqrt{2}\int_0^1 u(x,y)\cos 2\pi kx\,dx, \end{gathered} \tag{12}$$

$$\begin{gathered} f_{i,0} = \int_0^1 f_i(x)\,dx, \quad f_{i,2k-1} = \sqrt{2}\int_0^1 f_i(x)\sin 2\pi kx\,dx, \\ f_{i,2k} = \sqrt{2}\int_0^1 f_i(x)\cos 2\pi kx\,dx, \quad i=1,2, \quad k\in\mathbb{N}. \end{gathered} \tag{13}$$

Следуя [18], получим, что функции $u_k(y)$, $k\in\mathbb{N}_0$, являются решениями обыкновенных дифференциальных уравнений

$$u_k''(y) - (\operatorname{sgn} y)\lambda_k^2 u_k(y) = (\operatorname{sgn} y) f_{i,k}, \tag{14}$$

где $\lambda_k^2 = \sqrt{(2\pi k)^2 + b^2}$, $i=1$ при $y>0$, $i=2$ при $y<0$.

Дифференциальные уравнения (14) имеют общие решения

$$u_k(y) = \begin{cases} a_k e^{\lambda_k y} + b_k e^{-\lambda_k y} - f_{1,k}/\lambda_k^2, & y>0, \\ c_k \cos\lambda_k y + d_k \sin\lambda_k y - f_{2,k}/\lambda_k^2, & y<0, \end{cases} \tag{15}$$

здесь $k\in\mathbb{N}_0$, a_k, b_k, c_k, d_k — произвольные постоянные.

В силу условий (2) функции $u_k(y)$, определяемые формулами (15), удовлетворяют условиям сопряжения:

$$u_k(0-0) = u_k(0+0), \quad u_k'(0-0) = u_k'(0+0),\ u_k''(0-0) = u_k''(0+0), \quad k\in\mathbb{N}_0.$$

Удовлетворяя их этим условиям, получим

$$u_k(y) = \begin{cases} a_k e^{\lambda_k y} + \left(\frac{f_{1,k}-f_{2,k}}{2\lambda_k^2} - a_k\right)e^{-\lambda_k y} - \frac{f_{1,k}}{\lambda_k^2}, & y>0, \\ \frac{f_{2,k}-f_{1,k}}{2\lambda_k^2}\cos\lambda_k y + \left(2a_k + \frac{f_{2,k}-f_{1,k}}{2\lambda_k^2}\right)\sin\lambda_k y - \frac{f_{2,k}}{\lambda_k^2}, & y<0. \end{cases} \tag{16}$$

На основании (4), (5) и (12) имеем

$$u_k(-\alpha) = \psi_k, \quad u_k(\beta) = \varphi_k, \quad u_k'(-\alpha) = g_k, \quad k\in\mathbb{N}_0, \tag{17}$$

где ψ_k, φ_k, g_k — коэффициенты разложения функций $\psi(x)$, $\varphi(x)$, $g(x)$ соответственно в ряд по системе (9), т. е.

$$\begin{gathered} \psi_0 = \int_0^1 \psi(x)\,dx, \quad \psi_{2k-1} = \sqrt{2}\int_0^1 \psi(x)\sin 2\pi kx\,dx, \\ \psi_{2k} = \sqrt{2}\int_0^1 \psi(x)\cos 2\pi kx\,dx, \end{gathered} \tag{18}$$

$$\varphi_0 = \int_0^1 \varphi(x)\,dx, \quad \varphi_{2k-1} = \sqrt{2}\int_0^1 \varphi(x)\sin 2\pi kx\,dx, \\ \varphi_{2k} = \sqrt{2}\int_0^1 \varphi(x)\cos 2\pi kx\,dx, \tag{19}$$

$$g_0 = \int_0^1 g(x)\,dx, \quad g_{2k-1} = \sqrt{2}\int_0^1 g(x)\sin 2\pi kx\,dx, \\ g_{2k} = \sqrt{2}\int_0^1 g(x)\cos 2\pi kx\,dx. \tag{20}$$

Удовлетворим решения (16) условиям (17). Тогда относительно неизвестных a_k, b_k, $f_{1,k}$, $f_{2,k}$ получим системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{f_{2,k}-f_{1,k}}{2\lambda_k^2}\cos\lambda_k\alpha - \left(2a_k + \frac{f_{2,k}-f_{1,k}}{2\lambda_k^2}\right)\sin\lambda_k\alpha - \frac{f_{2,k}}{\lambda_k^2} = \psi_k, \\ a_k e^{\lambda_k\beta} + \left(-a_k - \frac{f_{2,k}-f_{1,k}}{2\lambda_k^2}\right)e^{-\lambda_k\beta} - \frac{f_{1,k}}{\lambda_k^2} = \varphi_k, \\ \frac{f_{2,k}-f_{1,k}}{2\lambda_k^2}\sin\lambda_k\alpha + \left(2a_k + \frac{f_{2,k}-f_{1,k}}{2\lambda_k^2}\right)\cos\lambda_k\alpha = \frac{g_k}{\lambda_k}, \qquad k \in \mathbb{N}_0. \end{cases} \tag{21}$$

Определители систем (21) такие:

$$\frac{\Delta_{\alpha\beta b}(k)}{\lambda_k^4} = \frac{\sin\lambda_k\alpha\,\mathrm{sh}\,\lambda_k\beta + \cos\lambda_k\alpha\,\mathrm{ch}\,\lambda_k\beta - 2\cos\lambda_k\alpha + 1}{\lambda_k^4}.$$

Тогда при условии, что при всех $k \in \mathbb{N}_0$

$$\Delta_{\alpha\beta b}(k) \neq 0, \tag{22}$$

системы (21) имеют единственные решения:

$$a_k = \frac{-(\sin\lambda_k\alpha + \cos\lambda_k\alpha)\psi_k + \varphi_k + (\cos\lambda_k\alpha - \sin\lambda_k\alpha - 2)g_k/\lambda_k}{2\Delta_{\alpha\beta b}(k)}, \tag{23}$$

$$f_{1,k} = \frac{-\lambda_k^2\left[(\sin\lambda_k\alpha\,\mathrm{sh}\,\lambda_k\beta + \cos\lambda_k\alpha\,\mathrm{ch}\,\lambda_k\beta)\psi_k + (2\cos\lambda_k\alpha - 1)\varphi_k\right]}{\Delta_{\alpha\beta b}(k)} - \\ - \frac{\lambda_k(\sin\lambda_k\alpha\,\mathrm{ch}\,\lambda_k\beta - \cos\lambda_k\alpha\,\mathrm{sh}\,\lambda_k\beta + 2\,\mathrm{sh}\,\lambda_k\beta)g_k}{\Delta_{\alpha\beta b}(k)}, \tag{24}$$

$$f_{2,k} = \frac{\lambda_k^2\left[(2\cos\lambda_k\alpha - \sin\lambda_k\alpha\,\mathrm{sh}\,\lambda_k\beta - \cos\lambda_k\alpha\,\mathrm{ch}\,\lambda_k\beta)\psi_k - \varphi_k\right]}{\Delta_{\alpha\beta b}(k)} + \\ + \frac{\lambda_k(2\sin\lambda_k\alpha - \sin\lambda_k\alpha\,\mathrm{ch}\,\lambda_k\beta + \cos\lambda_k\alpha\,\mathrm{sh}\,\lambda_k\beta)g_k}{\Delta_{\alpha\beta b}(k)}. \tag{25}$$

Таким образом, функции (16) построены однозначно.

2. Единственность решения задач 1 и 2. Пусть $\psi(x)=\varphi(x)=g(x)\equiv 0$ и выполнены условия (22). Тогда в силу (18)–(20) коэффициенты $\psi_k=\varphi_k= = g_k\equiv 0$, $k\in\mathbb{N}_0$, а значит, системы (21) имеют нулевые решения: $a_k=f_{1,k}= = f_{2,k}\equiv 0$ при $k\in\mathbb{N}_0$. Тогда из равенств (12) и (13), учитывая (16), получаем, что при всех $y\in[-\alpha,\beta]$

$$\int_0^1 u(x,y)\,dx=0,\quad \int_0^1 u(x,y)\sin 2\pi kx\,dx=0,\quad \int_0^1 u(x,y)\cos 2\pi kx\,dx=0,$$
$$\int_0^1 f_i(x)\,dx=0,\ \int_0^1 f_i(x)\sin 2\pi kx\,dx=0,\ \int_0^1 f_i(x)\cos 2\pi kx\,dx=0,\quad i=1,2.$$

Отсюда в силу полноты системы (9) в пространстве $L_2[0,1]$ и условий (2), (8) следует, что $u(x,y)\equiv 0$ и $f(x,y)\equiv 0$ в $\overline{D}$.

Пусть для некоторых α, β, b, $k=p\in\mathbb{N}$ выражение $\Delta_{\alpha\beta b}(p)=0$, тогда задачи 1 и 2, где $\varphi(x)=\psi(x)=g(x)\equiv 0$, имеют ненулевые решения:

$$u_p(x,y)=u_0(y)+u_p(y)(A_p\sin 2\pi px+B_p\cos 2\pi px),\ f_i(x)=f_{i,p},\ i=1,2,\quad (26)$$

$$u_p(y)=\begin{cases}\left(\dfrac{\overline{\Delta}_{\alpha yb}(p)}{\overline{\Delta}_{\alpha\beta b}(p)}-1\right)\dfrac{f_{2,p}}{\lambda_p^2}, & y>0,\\ \left(\dfrac{\cos\lambda_p(y+\alpha)}{\overline{\Delta}_{\alpha\beta b}(p)\lambda_p^2}-1\right)\dfrac{f_{2,p}}{\lambda_p^2}, & y<0,\quad p\in\mathbb{N}_0,\end{cases}$$
$$f_{1,p}=\left(1-\frac{2\cos\lambda_p\alpha}{\overline{\Delta}_{\alpha\beta b}(p)}\right)f_{2,p},$$
$$\overline{\Delta}_{\alpha\beta b}(p)=2\cos\lambda_p\alpha-\sin\lambda_p\alpha\,\mathrm{sh}\,\lambda_p\beta-\cos\lambda_p\alpha\,\mathrm{ch}\,\lambda_p\beta,$$

где A_p, B_p, $f_{2,p}$ — произвольные постоянные.

Теперь рассмотрим вопрос, при каких α, β и b выражение $\Delta_{\alpha\beta b}(k)=0$. Представим $\Delta_{\alpha\beta b}(k)$ в следующем виде:

$$\Delta_{\alpha\beta b}(k)=\sqrt{2(\mathrm{ch}\,\lambda_k\beta-1)^2+1}\,\sin(\lambda_k\alpha+\theta_k)+1,\quad (27)$$

где
$$\theta_k=\arcsin\frac{\mathrm{ch}\,\lambda_k\beta-2}{\sqrt{2(\mathrm{ch}\,\lambda_k\beta-1)^2+1}}\to\frac{\pi}{4}\quad\text{при}\quad k\to+\infty.$$

Решая уравнение $\Delta_{\alpha\beta b}(k)=0$ относительно α, получаем серию корней

$$\alpha=\frac{1}{\lambda_k}\left((-1)^{n+1}\gamma_k-\theta_k+\pi n\right),\quad n\in\mathbb{N},\quad (28)$$

где $\gamma_k=\arcsin\left(2(\mathrm{ch}\,\lambda_k\beta-1)^2+1\right)^{-1/2}$.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Если существует решение задач 1 и 2, то оно единственно тогда и только тогда, когда выполнены условия (22) при всех* $k\in\mathbb{N}_0$.

3. Обоснование существования решения задач 1 и 2. Решение задач 1 и 2 при условии (22) построено формально в виде сумм ортогональных рядов (10), (11). Поскольку в числители коэффициентов этих рядов входит экспонента $\exp(\lambda_k\beta)$, а в знаменатель — выражение $\Delta_{\alpha\beta b}(k)$, для обоснования существования решения задачи необходимо существование таких чисел α, чтобы $\Delta_{\alpha\beta b}(k)$ при достаточно больших k возрастало не медленнее, чем $\exp(\lambda_k\beta)$. При этом в силу (28) возникает проблема малых знаменателей [4, 22].

3.1. Оценка малых знаменателей.

Лемма 1. *Если $\alpha = p/q$, p, $q \in \mathbb{N}$, $(p,q)=1$, $(q,4)=1$, β, b — любые фиксированные положительные числа, то существуют положительные постоянные k_0 ($k_0 \in \mathbb{N}$) и C_0, вообще говоря, зависящие от α, β и b, такие, что при любом $k > k_0$ справедлива оценка*

$$|\Delta_{\alpha\beta b}(k)| > C_0 e^{2\pi k\beta}. \tag{29}$$

Доказательство. Представим выражение $\Delta_{\alpha\beta b}(k)$ в виде

$$\Delta_{\alpha\beta b}(k) = (\sin\lambda_k\alpha + \cos\lambda_k\alpha)\operatorname{sh}\lambda_k\beta + \cos\lambda_k\alpha e^{-\lambda_k\beta} + 1 - 2\cos\lambda_k\alpha = \\ = \sqrt{2}\operatorname{sh}\lambda_k\beta\sin\left(\lambda_k\alpha + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\lambda_k\alpha\left(e^{-\lambda_k\beta} - 2\right) + 1. \tag{30}$$

Из выражения (30) при $b = 0$ имеем

$$|\Delta_{\alpha\beta 0}(k)| = \left|\sqrt{2}\operatorname{sh}2\pi k\beta\sin\left(2\pi k\alpha + \frac{\pi}{4}\right) + \cos 2\pi k\alpha\left(e^{-2\pi k\beta} - 2\right) + 1\right| \geqslant \\ \geqslant \sqrt{2}\operatorname{sh}2\pi k\beta\left|\sin\left(2\pi k\alpha + \frac{\pi}{4}\right)\right| - \left|\cos 2\pi k\alpha\left(e^{-2\pi k\beta} - 2\right) + 1\right| \geqslant \\ \geqslant \sqrt{2}\operatorname{sh}2\pi k\beta\left|\sin\left(2\pi k\alpha + \frac{\pi}{4}\right)\right| - \left|\cos 2\pi k\alpha\left(e^{-2\pi k\beta} - 2\right)\right| - 1. \tag{31}$$

Оценим первое слагаемое из правой части неравенства (31):

$$\sqrt{2}\operatorname{sh}2\pi k\beta\left|\sin\left(2\pi k\alpha + \frac{\pi}{4}\right)\right| \geqslant C_1 e^{2\pi k\beta}\left|\sin\left(2\pi k\alpha + \frac{\pi}{4}\right)\right|. \tag{32}$$

Здесь и в дальнейшем C_i — положительные постоянные, зависящие, вообще говоря, от α, β и b.

Если $\alpha = n \in \mathbb{N}$, то при любом $k \in \mathbb{N}$

$$\left|\sin\left(2\pi kn + \frac{\pi}{4}\right)\right| = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

и тогда из (32) имеем

$$\sqrt{2}\operatorname{sh}2\pi k\beta\left|\sin\left(2\pi k\alpha + \frac{\pi}{4}\right)\right| > \frac{C_1}{\sqrt{2}}e^{2\pi k\beta}.$$

Пусть теперь $\alpha = p/q$, $(p,q)=1$, $(q,4)=1$. Разделив в этом случае $2kp$ на q с остатком ($2kp = sq + r$, $0 \leqslant r < q$), получим

$$\left|\sin\left(\frac{2\pi kp}{q} + \frac{\pi}{4}\right)\right| = \left|\sin\left(\frac{\pi r}{q} + \frac{\pi}{4}\right)\right| = C_2 > 0. \tag{33}$$

Из оценок (31), (32) и (33) имеем

$$|\Delta_{\alpha\beta 0}(k)| > C_3 e^{2\pi k\beta} - \left|\left(e^{-2\pi k\beta} - 2\right)\cos 2\pi k\alpha\right| - 1 >$$
$$> e^{2\pi k\beta}\left(C_3 - 3e^{-2\pi k\beta}\right) > \frac{C_3}{2}e^{2\pi k\beta} \qquad (34)$$

при $k > k_1 = (2\pi\beta)^{-1}\ln(6/C_3)$. Здесь $C_3 = \min\{C_1/\sqrt{2}, C_1 \cdot C_2\}$.

Теперь рассмотрим разность

$$|\Delta_{\alpha\beta b}(k) - \Delta_{\alpha\beta 0}(k)| = \left|\frac{e^{\lambda_k\beta} - e^{2\pi k\beta}}{2}(\sin\lambda_k\alpha + \cos\lambda_k\alpha) - \right.$$
$$-\frac{1}{2}e^{2\pi k\beta}(-\sin\lambda_k\alpha - \cos\lambda_k\alpha + \sin 2\pi k\alpha + \cos 2\pi k\alpha) + \frac{1}{2}e^{-\lambda_k\beta}(\cos\lambda_k\alpha - \sin\lambda_k\alpha) -$$
$$\left. -\frac{1}{2}e^{-2\pi k\beta}(\cos 2\pi k\alpha - \sin 2\pi k\alpha) + 2(\cos 2\pi k\alpha - \cos\lambda_k\alpha)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{e^{\lambda_k\beta} - e^{2\pi k\beta}}{2}|\sin\lambda_k\alpha + \cos\lambda_k\alpha| + \frac{1}{2}e^{2\pi k\beta}(|\sin\lambda_k\alpha - \sin 2\pi k\alpha| +$$
$$+ |\cos\lambda_k\alpha - \cos 2\pi k\alpha|) + \frac{1}{2}e^{-\lambda_k\beta}|\cos\lambda_k\alpha - \sin\lambda_k\alpha| +$$
$$+ \frac{1}{2}e^{-2\pi k\beta}|\cos 2\pi k\alpha - \sin 2\pi k\alpha| + 2|\cos 2\pi k\alpha - \cos\lambda_k\alpha| \leqslant$$
$$\leqslant e^{2\pi k\beta}\left(\frac{e^{(\lambda_k - 2\pi k)\beta} - 1}{2}\sqrt{2} + \left|\sin\frac{(\lambda_k - 2\pi k)\alpha}{2}\right| \cdot \left|\cos\frac{(\lambda_k + 2\pi k)\alpha}{2}\right| + \right.$$
$$\left. + \left|\sin\frac{(\lambda_k - 2\pi k)\alpha}{2}\right| \cdot \left|\sin\frac{(\lambda_k + 2\pi k)\alpha}{2}\right|\right) + \sqrt{2}e^{-2\pi k\beta} + 4\left|\sin\frac{(2\pi k - \lambda_k)\alpha}{2}\right|.$$

Учитывая неравенства

$$0 \leqslant e^x - 1 \leqslant 2x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1; \quad |\sin x| \leqslant |x|,$$

получим

$$|\Delta_{\alpha\beta b}(k) - \Delta_{\alpha\beta 0}(k)| \leqslant e^{2\pi k\beta}\left[\sqrt{2}(\lambda_k - 2\pi k)\beta + (\lambda_k - 2\pi k)\alpha + \right.$$
$$\left. + \sqrt{2}e^{-4\pi k\beta} + 2e^{-2\pi k\beta}|\lambda_k - 2\pi k|\alpha\right].$$

Отсюда, в силу оценки $0 < \lambda_k - 2\pi k < b^2/(2\pi k)$ при любых $k \in \mathbb{N}$, будем иметь

$$|\Delta_{\alpha\beta b}(k) - \Delta_{\alpha\beta 0}(k)| \leqslant \frac{e^{2\pi k\beta}}{2\pi k}\left(\sqrt{2}b^2\beta + b^2\alpha + 2\sqrt{2}\pi k e^{-4\pi k\beta} + 2\alpha b^2 e^{-2\pi k\beta}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{e^{2\pi k\beta}}{2\pi k}\left[\sqrt{2}b^2\beta + b^2\alpha + 2\pi k e^{-4\pi k\beta} + 2\alpha b^2\right] <$$
$$< \frac{e^{2\pi k\beta}}{2\pi k}\left[\sqrt{2}b^2\beta + 3\alpha b^2 + \frac{1}{2\beta}\right] = \frac{C_4 e^{2\pi k\beta}}{k}.$$

Из последней оценки и неравенства (34) будем иметь

$$
\begin{aligned}
|\Delta_{\alpha\beta b}(k)| = |\Delta_{\alpha\beta b}(k) - \Delta_{\alpha\beta 0}(k) + \Delta_{\alpha\beta 0}(k)| \geqslant \\
\geqslant |\Delta_{\alpha\beta 0}(k)| - |\Delta_{\alpha\beta b}(k) - \Delta_{\alpha\beta 0}(k)| > \frac{C_3}{2} e^{2\pi k\beta} - \frac{C_4 e^{2\pi k\beta}}{k} = \\
= e^{2\pi k\beta}\Big(\frac{C_3}{2} - \frac{C_4}{k}\Big) = C_0 e^{2\pi k\beta}
\end{aligned}
$$

при $k > k_0 \geqslant \max\{k_1, k_2\}$, где $k_2 = 2C_4/C_3$, $C_0 = C_3/4$. □

Лемма 2. *Пусть $\alpha > 0$ является любым иррациональным алгебраическим числом степени $n = 2$. Тогда существуют положительные постоянные β_0, b_0 и C_0, вообще говоря, зависящие от α, такие, что при всех $\beta > \beta_0$, $b < b_0$ и $k \in \mathbb{N}$ справедлива оценка*

$$
|\Delta_{\alpha\beta 0}(k)| \geqslant e^{\lambda_k \beta} \frac{C_0}{k}. \tag{35}
$$

Доказательство. Первый множитель выражения (27) имеет оценку

$$
\sqrt{2(\operatorname{ch}\lambda_k\beta - 1)^2 + 1} \geqslant \frac{1}{2}\Big[\sqrt{2}(\operatorname{ch}\lambda_k\beta - 1) + 1\Big] =
$$

$$
= \frac{e^{\lambda_k\beta}}{2\sqrt{2}}\Big[1 + \sqrt{2}e^{-2\lambda_k\beta} - (2-\sqrt{2})e^{-\lambda_k\beta}\Big] > \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} e^{\lambda_k\beta}. \tag{36}
$$

Рассмотрим теперь второй множитель выражения (27). При $b < 2\pi$ имеет место равенство

$$
\begin{aligned}
\lambda_k = \sqrt{(2\pi k)^2 + b^2} = 2\pi k \sqrt{1 + \Big(\frac{b}{2\pi k}\Big)^2} = \\
= 2\pi k\left[1 + \frac{1}{2}\Big(\frac{b}{2\pi k}\Big)^2 - \frac{1}{8}\Big(\frac{b}{2\pi k}\Big)^2 + \ldots\right] = 2\pi k + \sigma_k,
\end{aligned}
$$

При этом для σ_k справедлива оценка [15]

$$
\frac{b^2}{2\pi k} < \sigma_k < \frac{b^2}{4\pi k}. \tag{37}
$$

Тогда получим

$$
\begin{aligned}
|\sin(\lambda_k\alpha + \theta_k)| = |\sin(2\pi k\alpha + \sigma_k\alpha + \theta_k)| = \\
= |\sin(\pi k\alpha_1 + \widetilde{\sigma}_k + \theta_k)| = |\sin(\pi k\alpha_1 - \pi n + \widetilde{\sigma}_k + \theta_k)|,
\end{aligned} \tag{38}
$$

где $\widetilde{\sigma}_k = \sigma_k\alpha$, $\alpha_1 = 2\alpha$. Для $\widetilde{\sigma}_k$ с учётом (37) имеем оценку

$$
\frac{b^2\alpha}{8\pi k} < \widetilde{\sigma}_k < \frac{b^2\alpha}{4\pi k}. \tag{39}
$$

Для любого $k \in \mathbb{N}$ существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что имеет место неравенство [14]

$$\left|\alpha_1 - \frac{n}{k}\right| < \frac{1}{2k}, \tag{40}$$

с другой стороны, по теореме Лиувилля [21, с. 60] известно, что для любого алгебраического числа степени $n = 2$ найдется число $\delta > 0$ такое, что при любых целых p и q $(q > 0)$ справедлива оценка

$$\left|\alpha_1 - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{\delta}{q^2}. \tag{41}$$

Пусть $n \in \mathbb{N}$ такое, что выполняется неравенство (40). Тогда, учитывая оценку (41), имеем

$$\frac{\pi\delta}{k} \leqslant \pi k\left|\alpha_1 - \frac{m}{k}\right| < \frac{\pi}{2}.$$

Учитывая, что $\theta_k \to \pi/4$ при $k \to \infty$, в силу возрастания функций

$$y = \arcsin u \quad \text{и} \quad u = \frac{\operatorname{ch} x - 2}{\sqrt{2(\operatorname{ch} x - 1)^2 + 1}}$$

имеем

$$\theta_1 \leqslant \theta_k < \frac{\pi}{4}. \tag{42}$$

Тогда при всех $b < b_1 = \pi/\sqrt{2\alpha}$ выполнено $\widetilde{\sigma}_k < \pi/8$, а следовательно, с учётом (42),

$$\widetilde{\sigma}_k + \theta_k < \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{8}.$$

Возможны два случая:
1) $\pi/2 < |\pi k\alpha_1 - \pi n + \widetilde{\sigma}_k + \theta_k| < 7\pi/8$,
2) $0 < |\pi k\alpha_1 - \pi n + \widetilde{\sigma}_k + \theta_k| < \pi/2$.

В первом случае

$$|\sin(\pi k\alpha_1 - \pi n + \widetilde{\sigma}_k + \theta_k)| > \sin\frac{7\pi}{8}. \tag{43}$$

Во втором случае, учитывая неравенство

$$\sin x > \frac{2}{\pi}x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2},$$

получим

$$\begin{aligned} |\sin(\pi k\alpha_1 - \pi n + \widetilde{\sigma}_k + \theta_k)| &> \frac{2}{\pi}|\pi k\alpha_1 - \pi n + \widetilde{\sigma}_k + \theta_k| = \\ &= \frac{2}{\pi}\left|\pi k\Big(\alpha_1 - \frac{4n-1}{4k}\Big) + \widetilde{\sigma}_k - \varepsilon_k\right| \geqslant \\ &\geqslant \frac{2}{\pi}\left(\pi k\left|\alpha_1 - \frac{4n-1}{4k}\right| - |\widetilde{\sigma}_k| - |\varepsilon_k|\right), \end{aligned} \tag{44}$$

где $\varepsilon_k = \pi/4 - \theta_k > 0$.

Применяя формулу разности арксинусов

$$\arcsin x - \arcsin y = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}), \quad xy > 0,$$

и учитывая неравенство $\arcsin x < \pi x/2$, $0 < x < 1$, а также оценку (36), при

$$\beta > \beta_1 = \frac{\ln\frac{2+\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{b^2 + (2\pi)^2}}$$

будем иметь

$$\begin{aligned}\left|\theta_k - \frac{\pi}{4}\right| = \left|\arcsin\frac{\operatorname{ch}\lambda_k\beta - 2}{\sqrt{2(\operatorname{ch}\lambda_k\beta - 1)^2 + 1}} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}\right| = \\ = \arcsin\frac{2 - e^{-\lambda_k\beta}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2(\operatorname{ch}\lambda_k\beta - 1)^2 + 1}} \leqslant \\ \leqslant \frac{\pi\left(2 - e^{-\lambda_k\beta}\right)}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2(\operatorname{ch}\lambda_k\beta - 1)^2 + 1}} \leqslant \frac{2\pi}{(\sqrt{2}-1)e^{\lambda_k\beta}}. \end{aligned} \tag{45}$$

Из неравенства (45) следует, что

$$0 < \varepsilon_k < \frac{2\pi}{(\sqrt{2}-1)e^{\lambda_k\beta}} < \frac{2\pi}{(\sqrt{2}-1)\lambda_k\beta} \leqslant \frac{2\pi}{(\sqrt{2}-1)2\pi k\beta} = \frac{1}{(\sqrt{2}-1)\beta k}. \tag{46}$$

Тогда из (44) с учётом (39) и (46) получим

$$|\sin(\pi k\alpha_1 - \pi n + \widetilde{\sigma}_k + \theta_k)| > \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi\delta}{4k} - \frac{b^2\alpha}{4\pi k} - \frac{1}{(\sqrt{2}-1)\beta k}\right) > \frac{C_9}{k} \tag{47}$$

при

$$b < b_2 = \pi\sqrt{\frac{1}{\alpha}\left(\delta - \frac{4}{\pi\beta(\sqrt{2}-1)}\right)}, \quad \beta > \beta_2 = \frac{4}{\pi\delta(\sqrt{2}-1)}.$$

Из выражений (36), (43) и (47) следует справедливость леммы при $\beta > \beta_0 = \max\{\beta_1, \beta_2\}$ и $b < b_0 = \min\{2\pi, b_1, b_2\}$.□

Лемма 3. *Пусть $\alpha > 0$ является любым иррациональным алгебраическим числом степени $n = 2$. Тогда существует $k_0 \in \mathbb{N}$, зависящее, вообще говоря, от α, β и b, такое, что при всех $k > k_0$ справедлива оценка (35).*

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 2 с той разницей, что необходимые ограничения для выполнения неравенств накладываются не на параметры β и b, а на номер k_0.

3.2. Существование решения задач 1 и 2 при выполнении условий леммы 1. Для доказательства существования решения задач 1 и 2 из ряда (10) формально почленным дифференцированием составим ряды

$$u_{xx}(x,y) = -\sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}(2\pi k)^2(u_{2k-1}(y)\sin 2\pi kx + u_{2k}(y)\cos 2\pi kx), \tag{48}$$

$$u_{yy}(x,y) = u_0''(y) + \sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}(u_{2k-1}''(y)\sin 2\pi kx + u_{2k}''(y)\cos 2\pi kx), \tag{49}$$

$$u_{xxy}(x,y) = \sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}(2\pi k)^2(-u_{2k-1}'(y)\cos 2\pi kx + u_{2k}'(y)\sin 2\pi kx), \tag{50}$$

$$u_{yyy}(x,y) = u_0'''(y) + \sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}(u_{2k-1}'''(y)\sin 2\pi kx + u_{2k}'''(y)\cos 2\pi kx). \tag{51}$$

Лемма 4. *Пусть выполнено неравенство (29) при $k > k_0$. Тогда при таких k для любых $y \in [-\alpha, \beta]$ справедливы оценки*

$$|u_k(y)| \leqslant C_4\left(|\psi_k| + |\varphi_k| + |g_k|/k\right), \tag{52}$$

$$|u_k''(y)| \leqslant C_5 k\left(k|\psi_k| + k|\varphi_k| + |g_k|\right), \tag{53}$$

$$|u_k'''(y)| \leqslant C_6 k^2\left(k|\psi_k| + k|\varphi_k| + |g_k|\right), \tag{54}$$

$$|f_{1,k}| \leqslant C_7 k\left(k|\psi_k| + k|\varphi_k| + |g_k|\right), \tag{55}$$

$$|f_{2,k}| \leqslant C_8 k\left(k|\psi_k| + k|\varphi_k| + |g_k|\right). \tag{56}$$

Доказательство. На основании формул (16) найдём

$$\begin{aligned} |u_k(y)| \leqslant e^{2\pi k\beta}e^b|a_k| + \frac{3|f_{1,k}|}{2\lambda_k^2} + \frac{2|f_{2,k}|}{\lambda_k^2} \leqslant e^b \cdot e^{2\pi k\beta}|a_k| + \\ + \frac{3}{8\pi^2}\cdot\frac{|f_{1,k}|}{k^2} + \frac{1}{2\pi^2}\cdot\frac{|f_{2,k}|}{k^2} \leqslant C_9\Big(e^{2\pi k\beta}|a_k| + \frac{|f_{1,k}|}{k^2} + \frac{|f_{2,k}|}{k^2}\Big). \end{aligned} \tag{57}$$

На основании формул (16) вычислим

$$u_k''(y) = \begin{cases} \lambda_k^2 a_k e^{\lambda_k y} + \frac{1}{2}\left(-2a_k\lambda_k^2 - f_{2,k} + f_1, k\right)e^{-\lambda_k y}, & y > 0, \\ \frac{1}{2}(f_{1,k} - f_{2,k})\cos\lambda_k y - \frac{1}{2}(4a_k\lambda_k^2 + f_{2,k} - f_{1,k})\sin\lambda_k y, & y < 0, \end{cases} \tag{58}$$

$$u_k'''(y) = \begin{cases} \lambda_k\left[\lambda_k^2 a_k e^{\lambda_k y} + \frac{1}{2}(2a_k\lambda_k^2 + f_{2,k} - f_{1,k})e^{-\lambda_k y}\right], & y > 0, \\ \lambda_k\big[\frac{1}{2}(f_{2,k} - f_{1,k})\sin\lambda_k y - \\ \qquad -\frac{1}{2}(4\lambda_k^2 a_k + f_{2,k} - f_{1,k})\cos\lambda_k y\big], & y < 0. \end{cases} \tag{59}$$

Аналогично, исходя из равенств (58) и (59), получим

$$|u_k''(y)| \leqslant C_{10}\left(k^2 e^{2\pi k\beta}|a_k| + |f_{1,k}| + |f_{2,k}|\right), \tag{60}$$

$$|u_k'''(y)| \leqslant C_{11} k\left(k^2 e^{2\pi k\beta}|a_k| + |f_{1,k}| + |f_{2,k}|\right). \tag{61}$$

Далее на основании равенств (23)–(25) в силу оценки (29) найдём

$$|a_k| \leqslant \frac{\sqrt{2}|\psi_k| + |\varphi_k| + (\sqrt{2}+2)|g_k|/\lambda_k}{2C_0 e^{2\pi k\beta}} \leqslant \frac{C_{12}}{e^{2\pi k\beta}}\Big(|\psi_k| + |\varphi_k| + \frac{|g_k|}{k}\Big), \tag{62}$$

$$|f_{1,k}| \leqslant C_{13} k\Big(k|\psi_k| + k\frac{|\varphi_k|}{e^{2\pi k\beta}} + |g_k|\Big), \tag{63}$$

$$|f_{2,k}| \leqslant C_{14} k\Big(k|\psi_k| + k\frac{|\varphi_k|}{e^{2\pi k\beta}} + |g_k|\Big). \tag{64}$$

Тогда из соотношений (62)–(64) и (57)–(61) получим непосредственно оценки (52)–(56). □

В силу (52), (53), (55), (56) ряды (10), (11), (48), (49) мажорируются рядом

$$C_{15} \sum_{k=k_0+1}^{+\infty} k(k|\psi_k| + k|\varphi_k| + |g_k|), \tag{65}$$

а ряды (50) и (51) — рядом

$$C_{16} \sum_{k=k_0+1}^{+\infty} k^2(k|\psi_k| + k|\varphi_k| + |g_k|). \tag{66}$$

Лемма 5. *Пусть* $\psi(x), \varphi(x) \in C^3[0,1]$, $g(x) \in C^2[0,1]$, $\psi''(0) = \psi''(1)$, $\varphi''(0) = \varphi''(1)$, $g(0) = g(1)$, $g'(0) = g'(1)$. *Тогда справедливы представления*

$$\begin{aligned} &\psi_{2k-1} = -\frac{\psi^{(3)}_{2k}}{(2\pi k)^3}, \quad \psi_{2k} = -\frac{\psi^{(3)}_{2k-1}}{(2\pi k)^3}, \quad \varphi_{2k-1} = -\frac{\varphi^{(3)}_{2k}}{(2\pi k)^3}, \\ &\varphi_{2k} = -\frac{\varphi^{(3)}_{2k-1}}{(2\pi k)^3}, \quad g_{2k-1} = -\frac{g^{(2)}_{2k-1}}{(2\pi k)^2}, \quad g_{2k} = \frac{g^{(2)}_{2k}}{(2\pi k)^2}, \end{aligned} \tag{67}$$

где $\psi^{(3)}_k$, $\varphi^{(3)}_k$, $g^{(2)}_k$ $(k \in \mathbb{N})$ — *коэффициенты разложения в ряд по системе* (9) *функций* $\psi^{(3)}(x)$, $\varphi^{(3)}(x)$, $g^{(2)}(x)$, *для которых справедливы следующие оценки:*

$$\begin{gathered} \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} |\psi^{(3)}_k|^2 \leqslant \|\psi^{(3)}(x)\|^2_{L_2[0,1]}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi^{(3)}_k|^2 \leqslant \|\varphi^{(3)}(x)\|^2_{L_2[0,1]}, \\ \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} |g^{(2)}_k|^2 \leqslant \|g^{(2)}(x)\|^2_{L_2[0,1]}. \end{gathered} \tag{68}$$

Доказательство. Интегрируя вторые и третьи интегралы равенств (18), (19) по частям три раза, а равенства (20) — два раза, получим непосредственно выражения (67). Поскольку система функций (9) ортонормирована в пространстве $L_2[0,1]$, справедливость оценок (68) следует из неравенства Бесселя по этой системе. □

Лемма 6. *Пусть* $\psi(x), \varphi(x) \in C^4[0,1]$, $g(x) \in C^3[0,1]$, $\psi''(0) = \psi''(1)$, $\varphi''(0) = \varphi''(1)$, $\psi'''(0) = \psi'''(1)$, $\varphi'''(0) = \varphi'''(1)$, $g(0) = g(1)$, $g'(0) = g'(1)$, $g''(0) = g''(1)$. *Тогда справедливы представления*

$$\begin{aligned} &\psi_{2k-1} = \frac{\psi^{(4)}_{2k-1}}{(2\pi k)^4}, \quad \psi_{2k} = \frac{\psi^{(4)}_{2k}}{(2\pi k)^4}, \quad \varphi_{2k-1} = \frac{\varphi^{(4)}_{2k}}{(2\pi k)^4}, \\ &\varphi_{2k} = \frac{\varphi^{(4)}_{2k}}{(2\pi k)^4}, \quad g_{2k-1} = -\frac{g^{(3)}_{2k}}{(2\pi k)^3}, \quad g_{2k} = -\frac{g^{(3)}_{2k-1}}{(2\pi k)^3}, \end{aligned}$$

где $\psi_k^{(4)}$, $\varphi_k^{(4)}$, $g_k^{(3)}$ $(k \in \mathbb{N})$ — *коэффициенты разложения в ряд по системе* (9) *функций* $\psi^{(4)}(x)$, $\varphi^{(4)}(x)$, $g^{(3)}(x)$, *для которых справедливы следующие оценки:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\psi_k^{(4)}|^2 \leqslant 16\|\psi^{(4)}(x)\|^2_{L_2[0,1]}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k^{(4)}|^2 \leqslant 16\|\varphi^{(4)}(x)\|^2_{L_2[0,1]},$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} |g_k^{(3)}|^2 \leqslant 16\|g^{(3)}(x)\|^2_{L_2[0,1]}.$$

Доказательство леммы 6 проводится аналогично доказательству леммы 5.

При выполнении условий леммы 5 ряд (65), а значит и ряды (10), (11), (48), (49), мажорируются сходящимся числовым рядом

$$C_{23} \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{k} \big(|\psi_k^{(3)}| + |\varphi_k^{(3)}| + |g_k^{(2)}|\big).$$

При выполнении условий леммы 6 ряд (66), а значит и ряды (50), (51), мажорируются сходящимся числовым рядом

$$C_{24} \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{k} \big(|\psi_k^{(4)}| + |\varphi_k^{(4)}| + |g_k^{(4)}|\big).$$

Тогда, по признаку Вейерштрасса, при выполнении условий леммы 5 ряд (10) сходится равномерно в области $\overline{D}$, ряд (11) — на отрезке $[0,1]$, а при выполнении условий леммы 6 ряды (48)–(51) сходятся равномерно в области D. Следовательно, функции $u(x,y)$ и $f(x,y)$ удовлетворяют условиям (2), (8). Подставляя ряды (48), (49) в (10), (11), убеждаемся, что эти функции удовлетворяют условию (7).

Если для указанных в лемме 1 чисел α при некоторых $k = l = k_1, k_2, \ldots, k_p \leqslant k_0$, где k_i и p — заданные натуральные числа, выражение $\Delta_{\alpha\beta b}(l) = 0$, то для разрешимости задачи (2)–(5) достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\psi_l = \varphi_l = g_l = 0, \quad l = k_1, k_2, \ldots, k_p. \tag{69}$$

Тогда решение задачи (2)–(5) определяется в виде

$$u(x,y) = (\operatorname{sgn} k_1)u_0(y) + \left(\sum_{k=1}^{k_1-1} + \ldots + \sum_{k=k_{p-1}+1}^{k_p-1} + \sum_{k=k_p+1}^{+\infty}\right)\times$$
$$\times(u_{2k-1}(y)\sin 2\pi kx + u_{2k}\cos 2\pi kx) + \sum_l M_l u_l(x,y), \tag{70}$$

$$f_i(x) = (\operatorname{sgn} k_1)f_{i,0} + \left(\sum_{k=1}^{k_1-1} + \ldots + \sum_{k=k_{p-1}+1}^{k_p-1} + \sum_{k=k_p+1}^{+\infty}\right)\times$$
$$\times(f_{i,2k-1}\sin 2\pi kx + f_{i,2k}\cos 2\pi kx) + \sum_l M_l u_l(x,y), \tag{71}$$

где $u_l(x, y)$ определяется по формуле (26), M_l — произвольные постоянные, в сумме $\sum_l$ индекс l принимает значения $k_1, k_2, \ldots, k_p$; $\operatorname{sgn} k_1 = 0$ при $k_1 = 0$ и $\operatorname{sgn} k_1 = 1$ при $k_1 \geqslant 1$. В случае, когда в конечных суммах верхний предел меньше нижнего, соответствующую сумму следует считать равной нулю.

Таким образом, доказаны следующие утверждения.

Теорема 2. *Пусть функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $g(x)$ удовлетворяют условиям леммы* 5 *и имеет место оценка* (29) *при $k > k_0$. Тогда, если при всех $k \leqslant k_0$ выполнены условия* (22), *то существует единственное решение задачи* 2, *которое определяется рядами* (10), (11). *Если при некоторых $k \leqslant k_0$ выражение $\Delta_{\alpha\beta b}(k) = 0$, то решение задачи* 2 *существует тогда, когда выполнены условия* (69), *и определяется рядами* (70), (71).

Теорема 3. *Пусть функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $g(x)$ удовлетворяют условиям леммы* 6 *и имеет место оценка* (29) *при $k > k_0$. Тогда, если при всех $k \leqslant k_0$ выполнены условия* (22), *то существует единственное решение задачи* 1, *которое определяется рядом* (10). *Если при некоторых $k = k_1, k_2, \ldots, k_p \leqslant k_0$ выражение $\Delta_{\alpha\beta b}(k) = 0$, то решение задачи* 1 *существует тогда, когда выполнены условия* (69), *и определяется рядом* (70).

3.3. Существование решения задач 1 и 2 при выполнении условий лемм 2 и 3. Доказывая леммы, подобные леммам 2 и 3, можно обосновать справедливость следующих утверждений.

Теорема 4. *Пусть функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $g(x)$ удовлетворяют условиям леммы* 6 *и имеет место оценка* (35) *при всех $b < b_0$ и $\beta > \beta_0$. Тогда существует единственное решение задачи* 2, *которое определяется рядами* (10), (11).

Теорема 5. *Пусть функции $\varphi(x), \psi(x)$, $g(x)$ удовлетворяют условиям леммы* 6 *и имеет место оценка* (35) *при $k > k_0$. Тогда, если при всех $k \leqslant k_0$ выполнены условия* (22), *то существует единственное решение задачи* 2, *которое определяется рядами* (10), (11). *Если при некоторых $k = k_1, k_2, \ldots, k_p \leqslant k_0$ выражение $\Delta_{\alpha\beta b}(k) = 0$, то решение задачи* 2 *существует тогда, когда выполнены условия* (69), *и определяется рядами* (70), (71).

Теорема 6. *Пусть функции $\psi(x)$, $\varphi(x) \in C^5[0,1]$, $g(x) \in C^4[0,1]$, $\psi''(0) = \psi''(1)$, $\varphi''(0) = \varphi''(1)$, $\psi'''(0) = \psi'''(1)$, $\varphi'''(0) = \varphi'''(1)$, $\psi^{(4)}(0) = \psi^{(4)}(1)$, $\varphi^{(4)}(0) = \varphi^{(4)}(1)$ $g(0) = g(1)$, $g'(0) = g'(1)$, $g''(0) = g''(1)$, $g'''(0) = g'''(1)$ и имеет место оценка* (35) *при всех $b < b_0$ и $\beta > \beta_0$. Тогда существует единственное решение задачи* 1, *которое определяется рядом* (10).

Теорема 7. *Пусть функции $\varphi(x), \psi(x)$, $g(x)$ удовлетворяют условиям теоремы* 6 *и имеет место оценка* (35) *при $k > k_0$. Тогда, если при всех $k \leqslant k_0$ выполнены условия* (22), *то существует единственное решение задачи* 1, *которое определяется рядом* (10). *Если при некоторых $k = k_1, k_2, \ldots, k_p \leqslant k_0$ выражение $\Delta_{\alpha\beta b}(k) = 0$, то решение задачи* 1 *существует тогда, когда выполнены условия* (69), *и определяется рядом* (70).

4. Устойчивость решения задач 1 и 2. Рассмотрим известные нормы

$$\|u(x, y)\|_{L_2[0,1]} = \left(\int_0^1 u^2(x, y)\, dx\right)^{1/2}, \quad -\alpha \leqslant y \leqslant \beta,$$

$$\|u(x,y)\|_{C(\overline{D})} = \max_{\overline{D}} |u(x,y)|,$$

$$\|f(x)\|_{W_2^n} = \left(\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} |f^{(k)}(x)|^2\right) dx\right)^{1/2}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Теорема 8. *Если выполнены условия теоремы* 2 *и* $\Delta_{\alpha\beta b}(k) \neq 0$ *при* $k = 1, 2, \ldots, k_0$, *то для решения* (10), (11) *задач* 1 *и* 2 *справедливы оценки*

$$\|u(x,y)\|_{L_2} \leqslant C_{17}(\|\psi(x)\|_{L_2} + \|\varphi(x)\|_{L_2} + \|g(x)\|_{L_2}),$$
$$\|u(x,y)\|_{C(\overline{D})} \leqslant C_{18}(\|\psi(x)\|_{W_2^1} + \|\varphi(x)\|_{W_2^1} + \|g(x)\|_{L_2}),$$
$$\|f_i(x)\|_{L_2} \leqslant C_{19}(\|\psi(x)\|_{W_2^2} + \|\varphi(x)\|_{W_2^2} + \|g(x)\|_{W_2^1}),$$
$$\|f_i(x)\|_{C(\overline{D})} \leqslant C_{20}(\|\psi(x)\|_{W_2^3} + \|\varphi(x)\|_{W_2^3} + \|g(x)\|_{W_2^2}).$$

Здесь C_i — *положительные постоянные, не зависящие от* φ, ψ *и* g.

Теорема 9. *Если выполнены условия теоремы* 3, *то для решения* (10), (11) *задач* 1 *и* 2 *справедливы оценки*

$$\|u(x,y)\|_{L_2} \leqslant C_{21}(\|\psi(x)\|_{W_2^1} + \|\varphi(x)\|_{W_2^1} + \|g(x)\|_{L_2}),$$
$$\|u(x,y)\|_{C(\overline{D})} \leqslant C_{22}(\|\psi(x)\|_{W_2^2} + \|\varphi(x)\|_{W_2^2} + \|g(x)\|_{W_2^1}),$$
$$\|f_i(x)\|_{L_2} \leqslant C_{23}(\|\psi(x)\|_{W_2^3} + \|\varphi(x)\|_{W_2^3} + \|g(x)\|_{W_2^2}),$$
$$\|f_i(x)\|_{C(\overline{D})} \leqslant C_{24}(\|\psi(x)\|_{W_2^4} + \|\varphi(x)\|_{W_2^4} + \|g(x)\|_{W_2^4}).$$

Здесь C_i — *положительные постоянные, не зависящие от* φ, ψ *и* g.

Доказательство теорем 8 и 9 проводится аналогично работе [19].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *А. В. Бицадзе, М. С. Салахитдинов*, “К теории уравнений смешанно-составного типа” // *Сиб. матем. журн.*, 1961. Т. 2, № 1. С. 7–19. [*A. V. Bitsadze, M. S. Salakhitdinov*, “On the theory of equations of mixed-composite type” // *Sibirsk. Mat. Zh.*, 1961. Vol. 2, no. 1. Pp. 7–19].
2. *Т. Д. Джураев*, Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: Фан, 1979. 239 с. [*T. D. Dzhuraev*, Boundary value problems for equations of mixed and mixed-composite types. Tashkent: Fan, 1979. 239 pp.]
3. *А. И. Кожанов*, Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики нечетного порядка. Новосибирск: НГУ, 1990. 150 с. [*A. I. Kozhanov*, Boundary Value Problems for Odd-Order Equations of Mathematical Physics. Novosibirsk: Novosibirsk. Univ., 1990. 150 pp.]
4. *К. Б. Сабитов*, “Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа третьего порядка” // *Докл. РАН*, 2009. Т. 427, № 5. С. 593–596; англ. пер.: *K. B. Sabitov*, “A boundary value problem for a third-order equation of mixed type” // *Dokl. Math.*, 2009. Vol. 80, no. 1. Pp. 565–568.
5. *К. Б. Сабитов*, “Задача Дирихле для уравнения смешанного типа третьего порядка в прямоугольной области” // *Диффер. уравн.*, 2011. Т. 47, № 5. С. 705–713; англ. пер.: *K. B. Sabitov*, “The Dirichlet problem for a third-order equation of mixed type in a rectangular domain” // *Differ. Equ.*, 2011. Vol. 47, no. 5. Pp. 706–714.

6. *А. Н. Тихонов*, “Об устойчивости обратных задач” // *Докл. АН СССР*, 1943. Т. 39, № 5. С. 195–198; англ. пер.: *A. N. Tikhonov*, “On the stability of inverse problems” // *C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N.S.)*, 1943. Vol. 39, no. 5. Pp. 176–179.
7. *М. М. Лаврентьев*, “Об одной задаче для волнового уравнения” // *Докл. АН СССР*, 1964. Т. 157, № 3. С. 520–521. [англ. пер.: *M. M. Lavrent'ev*, “On an inverse problem for the wave equation” // *Soviet Math. Dokl.*, 1964. Vol. 5, no. 3. Pp. 970–972].
8. *М. М. Лаврентьев, К. Г. Резницкая, В. Г. Якно*, Одномерные обратные задачи математической физики. Новосибирск: Наука, Сибирск. отдел., 1982. 88 с. [*M. M. Lavrent'ev, K. G. Reznitskaya, V. G. Yakhno*, One-dimensional inverse problems of mathematical physics. Novosibirsk: Nauka, Sibirsk. Otdel., 1982. 88 pp.]
9. *Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П.*, Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с. [*V. K. Ivanov, V. V. Vasin, V. P. Tanana*, Theory of linear ill-posed problems and its applications. Moscow: Nauka, 1978. 206 pp.]
10. *А. И. Прилепко, Д. С. Ткаченко*, “Свойства решений параболического уравнения и единственность решения обратной задачи об источнике с интегральным переопределением” // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2003. Т. 43, № 4. С. 562–570; англ. пер.: *A. I. Prilepko, D. S. Tkachenko*, “Properties of solutions of a parabolic equation and the uniqueness of the solution of the inverse source problem with integral overdetermination” // *Comput. Math. Math. Phys.*, 2003. Vol. 43, no. 4. Pp. 537–546.
11. *А. В. Баев*, “Единственность решения обратной задачи для уравнения акустики и обратная спектральная задача” // *Матем. заметки*, 1990. Т. 47, № 2. С. 149–151. [*A. V. Baev*, “Uniqueness of a solution of an inverse problem for an equation in acoustics, and an inverse spectral problem” // *Mat. Zametki*, 1990. Vol. 47, no. 2. Pp. 149–151].
12. *А. М. Денисов*, Введение в теорию обратных задач. М.: МГУ, 1994. 285 с. [*A. M. Denisov*, Introduction to the theory of inverse problems. Moscow: Moscow State Univ., 1994. 285 pp.]
13. *А. И. Кожанов*, “Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи” // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2004. Т. 44, № 4. С. 694–716; англ. пер.: *A. I. Kozhanov*, “Nonlinear loaded equations and inverse problems” // *Comput. Math. Math. Phys.*, 2004. Vol. 44, no. 4. Pp. 657–675.
14. *К. Б. Сабитов, Э. М. Сафин*, “Обратная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа” // *Матем. заметки*, 2010. Т. 87, № 6. С. 907–918; англ. пер.: *K. B. Sabitov, É. M. Safin*, “The inverse problem for an equation of mixed parabolic-hyperbolic type” // *Math. Notes*, 2010. Vol. 87, no. 6. Pp. 880–889.
15. *К. Б. Сабитов, Н. В. Мартемьянова*, “Нелокальная обратная задача для уравнения смешанного типа” // *Изв. вузов. Матем.*, 2011. № 2. С. 71–85; англ. пер.: *K. B. Sabitov, N. V. Martem'yanova*, “A nonlocal inverse problem for a mixed-type equation” // *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2011. Vol. 55, no. 2. Pp. 61–74.
16. *К. Б. Сабитов, Н. В. Мартемьянова*, “Обратная задача для уравнения эллиптико-гиперболического типа с нелокальным граничным условием” // *Сиб. матем. журн.*, 2012. Т. 53, № 3. С. 633–647; англ. пер.: *K. B. Sabitov, N. V. Martem'yanova*, “An inverse problem for an equation of elliptic-hyperbolic type with a nonlocal boundary condition” // *Siberian Math. J.*, 2012. Vol. 53, no. 3. Pp. 507–519.
17. *К. Б. Сабитов, И. А. Хаджи*, “Краевая задача для уравнения Лаврентьева—Бицадзе с неизвестной правой частью” // *Изв. вузов. Матем.*, 2011. № 5. С. 44–52; англ. пер.: *K. B. Sabitov, I. A. Khadzhi*, “The boundary-value problem for the Lavrent'ev–Bitsadze equation with unknown right-hand side” // *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2011. Vol. 55, no. 5. Pp. 35–42.
18. *Г. Ю. Удалова*, “Обратная задача для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа” // *Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер.*, 2010. № 4(78). С. 89–97. [*G. Yu. Udalova*, “Inverse problem for equation of mixed elliptic-hyperbolic type” // *Vestnik SamGU. Estestvenno-Nauchnaya Ser.*, 2010. no. 4(78). Pp. 89–97].
19. *Г. Ю. Удалова*, “Обратная задача для уравнения с оператором Лаврентьева—Бицадзе” // *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, 2012. Т. 14,

№ 1. С. 98–111. [*G. Yu. Udalova*, “Inverse problem for equation with Lavrentev–Bitsadze operator” // *Doklady Adygskoy (Cherkesskoy) Mezhdunarodnoy Akademii Nauk*, 2012. Vol. 14, no. 1. Pp. 98–111].

20. *Г. Ю. Удалова*, “Краевая задача для уравнения Лаврентьева—Бицадзе с неизвестной правой частью” // *Научные ведомости Белгородского гос. ун-та. Сер. Математика. Физика*, 2012. Т. 26, № 5. С. 209–225. [*G. Yu. Udalova*, “The boundary-value problem for the Lavrent’ev–Bitsadze equation with unknown right-hand side” // *Nauchnyye Vedomosti Belgorodskogo Gos. Un-ta. Ser. Matematika. Fizika*, 2012. Vol. 26, no. 5. Pp. 209–225].
21. *А. Я. Хинчин*, Цепные дроби. М.: Наука, 1978. 112 с. [*A. Ja. Hinchin*, Continued fractions. Moscow: Nauka, 1978. 112 pp.]
22. *В. И. Арнольд*, “Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике” // *УМН*, 1963. Т. 18, № 6(114). С. 91–192; англ. пер.: *V. I. Arnol’d*, “Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics” // *Russian Math. Surveys*, 1963. Vol. 18, no. 6. Pp. 85–191.
23. *А. Зигмунд*, Тригонометрические ряды. Т. 1. М.: Мир, 1965. 616 с. [*A. Zigmund*, Trigonometric series. Vol. 1. Moscow: Mir, 1965. 616 pp.]

Поступила в редакцию 08/IV/2013;
в окончательном варианте — 20/VII/2013.

MSC: 35M12; 35M10, 35A02

BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR MIXED TYPE EQUATION OF THE THIRD ORDER WITH PERIODIC CONDITIONS

***K. B. Sabitov*[1], *G. Yu. Udalova*[2]**

[1] Institute of Applied Research,
68, Odesskaya st., Sterlitamak, Russia, 453103.
[2] Samara State University of Architecture and Civil Engineering,
194, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443001, Russia.

E-mails: `sabitov_fmf@mail.ru`, `yeyeg@yandex.ru`

The problem for the equation of the mixed elliptic-hyperbolic type with nonlocal boundary conditions is viewed. This problem is reduced to the inverse problem for elliptic-hyperbolic equation with unknown right-hand parts. The criterion of the uniqueness is established. The explicit solution is constructed as the sum of orthogonal trigonometric series of the one-dimensional spectral problem eigenfunctions. The argumentation of the series convergence under some restrictions is given. The stability of the solution by the boundary functions is proved.

Key words: *equations of the mixed type of third order, direct and inverse problems, spectral method, uniqueness, existense, stability.*

Original article submitted 08/IV/2013;
revision submitted 20/VII/2013.

Kamil B. Sabitov (Dr. Phys. & Math. Sci.), Director. *Galina Yu. Udalova*, Postgraduate Student, Dept. of Higher Mathematics.