УДК 517.956.47

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ С ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИМ ОПЕРАТОРОМ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Т. К. Юлдашев

Сибирский государственный аэрокосмический университет им. ак. М. Ф. Решетнёва,
660014, Россия, Красноярск, пр. им. газеты «Красноярский рабочий», 31.

E-mail: tursunbay@rambler.ru

Рассматриваются вопросы обобщённой разрешимости обратной задачи для нелинейного дифференциального уравнения с псевдопараболическим оператором высокого порядка. Используется метод разделения переменных. Смешанная задача сводится к интегральному уравнению Вольтерра второго рода, а обратная задача — к системе интегральных уравнений Вольтерра. Доказана однозначная разрешимость и устойчивость решения обратной задачи.

Ключевые слова: *нелинейная обратная задача, псевдопараболический оператор высокого порядка, обобщённая разрешимость.*

1. Постановка задачи. В области D рассматривается уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (-1)^m \frac{\partial^{2m+1}}{\partial t \partial x^{2m}} + \frac{\partial^{4m+1}}{\partial t \partial x^{4m}} + \frac{\partial^{4m}}{\partial x^{4m}}\right)^n u(t,x) = \\ = f\big(t, x, u(\tau(t,\vartheta(t)), x), \vartheta(t-\tau_0)\big) \quad (1)$$

с начальными

$$u(t,x)\Big|_{t=t_0} = \varphi_1(x), \frac{\partial^{j-1}}{\partial t^{j-1}} u(t,x)\Big|_{t=t_0} = \varphi_j(x), \quad j = 2, 3, \ldots, n, \quad (2)$$

граничными

$$u(t,x)\big|_{x=0} = u_{xx}(t,x)\big|_{x=0} = \ldots = \frac{\partial^{2(2nm-1)}}{\partial x^{2(2nm-1)}} u(t,x)\Big|_{x=0} = \\ = \int_0^l K(x,y) u(t,y) dy = \int_0^l K(x,\, y) u_{yy}(t,y) dy = \\ = \ldots = \int_0^l K(x,y) \frac{\partial^{2(2nm-1)}}{\partial y^{2(2nm-1)}} u(t,y) dy = 0 \quad (3)$$

и дополнительными условиями

$$u(t,x)\big|_{x=x_0} = \psi(t), \quad 0 < x_0 < l, \quad (4)$$

$$\vartheta(t) = \eta(t), \quad t \in E_{t_0}, \quad (5)$$

где $f(t,x,u,\vartheta) \in (D \times \mathbb{R} \times U_0)$; $\varphi_j(x) \in C^{4m+1}(D_l)$, $j = 1, 2, \ldots, n$; $\varphi_j(x)\big|_{x=0} = = \varphi_j''(x)\big|_{x=0} = \ldots = \varphi_j^{(4nm-2)}(x)\big|_{x=0} = \int_0^l K(x,y)\varphi_j(y) dy = \int_0^l K(x,\, y)\varphi_j''(y) dy = = \ldots = \int_0^l K(x,y) \varphi_j^{(4nm-2)}(y) dy = 0$; $K(x,y) \in C^1(D_l^2)$; $0 \leqslant \tau(t,\vartheta) \in (D_T \times U_0)$;

Турсун Камалдинович Юлдашев (к.ф.-м.н., доц.), доцент, каф. высшей математики.

$\psi(t) \in (D_T)$; $\eta(t) \in (E_{t_0})$; $E_{t_0} \equiv [0; t_0]$; U_0 — отрезок на действительной числовой оси; $D \equiv D_T \times D_l$, $D_T \equiv [t_0, T]$, $D_l \equiv [0, l]$, $0 < l < \infty$; $0 < \tau_0 < t_0 < T < \infty$; n, $m \in \mathbb{N}$.

Функция $K(x, y)$ такая, что дифференциальное выражение $-\partial^{2nm}/\partial x^{2nm}$ при граничных условиях (3) порождает положительно определенный самосопряжённый оператор с чисто точечным спектром.

Отметим, что изучению разного типа линейных и нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных и их систем посвящено много работ. В частности, смешанные задачи с интегральными условиями были рассмотрены в работах [1–3].

Вопросам разрешимости обратных задач для линейных дифференциальных уравнений в частных производных посвящены работы [4, 5], где приведена подробная библиография по данной тематике.

В настоящей работе изучается обратная задача для нелинейного дифференциального уравнения, в которой восстанавливаемая функция $\vartheta(t)$ находится в нелинейной правой части уравнения. Кроме этого, искомая функция $u(t, x)$ входит в нелинейную функцию f с отклонением по времени $\tau(t, \vartheta(t))$, и тем самым она зависит от восстанавливаемой функции $\vartheta(t)$. Задание условия (5), во-первых, отвечает запаздыванию аргумента восстанавливаемой функции $\vartheta(t - \tau_0)$; во-вторых, обеспечивает единственность функции $\vartheta(t)$ и, в-третьих, делает некорректно поставленную задачу (1)–(4) корректно поставленной и определяет значение восстанавливаемой функции $\vartheta(t)$ в точке $t = t_0$. Используется методика разделения переменных, основанная на поиске решения смешанной задачи (1)–(3) в виде

$$u(t, x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \left(1 - \frac{i-1}{N}\right) a_i(t) \cdot b_i(x). \tag{6}$$

Следует подчеркнуть, что $b_i(x)$ — собственные функции дифференциального оператора $-\partial^{2nm}/\partial x^{2nm}$, удовлетворяющие граничным условиям

$$b_i(0) = b_i''(0) = \ldots = b_i^{(4nm-2)}(0) = \int_0^l K(x, y) b_i(y) dy =$$
$$= \int_0^l K(x, y) b_i''(y) dy = \ldots = \int_0^l K(x, y) b_i^{(4nm-2)}(y) dy = 0$$

и обладающие свойством $b_i^{(2nm)}(x) = (-1)^{2(nm+1/2)} \lambda_i^{2nm} b_i(x)$, где λ_i^{2nm} — соответствующие собственные значения данного оператора такие, что

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_i < \ldots \to \infty \quad \text{при} \quad i \to \infty.$$

Применение метода разделения переменных в виде (6) и использование интегрального тождества позволяет отказаться от непрерывной дифференцируемости правой части уравнения (1). Кроме этого, такой подход позволяет свести смешанную задачу к счётной системе нелинейных интегральных уравнений (ССНИУ). Но при решении обратной задачи (1)–(5) относительно восстанавливаемой функции получается нелинейное интегральное уравнение Вольтерра первого рода, которое с помощью нелинейного интегрального преобразования сводится к специальному виду нелинейного интегрального уравнения Вольтерра второго рода.

Обозначим через $W_{k,p}(D)$ множество функций $\Phi(t,x)$ таких, что $\Phi(t,x)$, $(\partial^2/\partial x^2)\Phi(t,x)$, …, $(\partial^{2(2nm-1)}/\partial x^{2(2nm-1)})\Phi(t,x)$ при фиксированном $t \in D_T$ принадлежат области определения оператора $-\partial^{2nm}/\partial x^{2nm}$, имеют производные порядка k по t, принадлежащие $L_p(D_l)$ и обращающиеся в нуль при $t \geqslant T-\delta$ ($\delta > 0$ зависит от $\Phi(t,x)$), где

$$L_{p,q}(D) = \left\{ u(t,x) : \left[\int_{t_0}^T \left(\int_0^l |u(t,x)|^p \, dx \right)^{q/p} dt \right]^{1/q} < \infty \right\}.$$

Пусть для функций из $W_{k,p}(D)$ при $k=n$ справедливы соотношения

$$\lim_{t\to T} \int_0^l \Phi(t,y)dy = \lim_{t\to T} \int_0^l \frac{\partial \Phi(t,y)}{\partial t} dy = \ldots = \lim_{t\to T} \int_0^l \frac{\partial^{n-1}\Phi(t,y)}{\partial t^{n-1}} dy = 0.$$

Ясно, что пространство $W_{k,p}(D)$ всюду плотно в пространстве $L_p(D)$.

2. Сведение решения смешанной задачи (1)–(3) к интегральному уравнению Вольтерра второго рода.

Определение. Обобщённым решением обратной задачи называется пара функций $\{u(t,x), \vartheta(t)\}$, удовлетворяющая условиям (4), (5) и следующему интегральному тождеству:

$$\int_{t_0}^T \int_0^l \left\{ u(t,y) \left[\frac{\partial^n}{\partial t^n}\Phi + n\frac{\partial^{n+4m-1}}{\partial t^{n-1}\partial y^{4m}}\Phi + \frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{n+4m}}{\partial t^{n-2}\partial y^{4m+2}}\Phi + \right.\right.$$
$$+ \ldots + \frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{4nm-2}}{\partial t^2\partial y^{4nm-4}}\Phi + n\frac{\partial^{4nm-1}}{\partial t\partial y^{4nm-2}}\Phi + \frac{\partial^{4nm}}{\partial y^{4nm}}\Phi +$$
$$+ \left(\frac{\partial^{n+2m}}{\partial t^n\partial y^{2m}}\Phi + n\frac{\partial^{n+6m-1}}{\partial t^{n-1}\partial y^{6m}}\Phi + \frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{n+6m}}{\partial t^{n-2}\partial y^{6m+2}}\Phi + \right.$$
$$\left. + \ldots + \frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{4nm+2m-2}}{\partial t^2\partial y^{4nm+2m-4}}\Phi + n\frac{\partial^{4nm+2m-1}}{\partial t\partial y^{4nm+2m-2}}\Phi \right) +$$
$$+ \left(\frac{\partial^{n+4m}}{\partial t^n\partial y^{4m}}\Phi + n\frac{\partial^{n+8m-1}}{\partial t^{n-1}\partial y^{8m}}\Phi + \frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{n+8m}}{\partial t^{n-2}\partial y^{8m+2}}\Phi + \right.$$
$$\left.\left.\left. + \ldots + \frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{4nm+4m-2}}{\partial t^2\partial y^{4nm+4m-4}}\Phi + n\frac{\partial^{4nm+4m-1}}{\partial t\partial y^{4nm+4m-2}}\Phi \right)\right] - f\Phi \right\} dydt =$$
$$= \int_0^l \varphi_1(y) \left[\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\Phi + n\frac{\partial^{n+4m-2}}{\partial t^{n-2}\partial y^{4m}}\Phi + \frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{n+4m-1}}{\partial t^{n-3}\partial y^{4m+2}}\Phi + \right.$$
$$+ \ldots + \frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{4nm-3}}{\partial t\partial y^{4nm-4}}\Phi + n\frac{\partial^{4nm-2}}{\partial y^{4nm-2}}\Phi +$$
$$+ \left(\frac{\partial^{n+2m-1}}{\partial t^{n-1}\partial y^{2m}}\Phi + n\frac{\partial^{n+6m-2}}{\partial t^{n-2}\partial y^{6m}}\Phi + \frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{n+6m-1}}{\partial t^{n-3}\partial y^{6m+2}}\Phi + \right.$$
$$\left. + \ldots + \frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{4nm+2m-3}}{\partial t\partial y^{4nm+2m-4}}\Phi + n\frac{\partial^{4nm+2m-2}}{\partial y^{4nm+2m-2}}\Phi \right) +$$

$$+\left(\frac{\partial^{n+4m-1}}{\partial t^{n-1}\partial y^{4m}}\Phi+n\frac{\partial^{n+8m-2}}{\partial t^{n-2}\partial y^{8m}}\Phi+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{n+8m-1}}{\partial t^{n-3}\partial y^{8m+2}}\Phi+\right.$$

$$\left.\left.+\ldots+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{4nm+4m-3}}{\partial t\partial y^{4nm+4m-4}}\Phi+n\frac{\partial^{4nm+4m-2}}{\partial y^{4nm+4m-2}}\Phi\right)\right]_{t=t_0}dy-$$

$$-\ldots+\int_0^l\varphi_{n-1}(y)\left[\frac{\partial}{\partial t}\Phi+n\frac{\partial^{4m}}{\partial y^{4m}}\Phi+\left(\frac{\partial^{2m+1}}{\partial t\partial y^{2m}}\Phi+n\frac{\partial^{6m}}{\partial y^{6m}}\Phi\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial^{4m+1}}{\partial t\partial y^{4m}}\Phi+n\frac{\partial^{8m}}{\partial y^{8m}}\Phi\right)\right]_{t=t_0}dy-\int_0^l\varphi_n(y)\left[\Phi+\frac{\partial^{2m}}{\partial y^{2m}}\Phi+\frac{\partial^{4m}}{\partial y^{4m}}\Phi\right]_{t=t_0}dy.$$

Коэффициенты разложения $a_i(t)$ обобщённого решения смешанной задачи (1)–(3) удовлетворяют следующей ССНИУ:

$$a_i(t)=w_i(t)+$$

$$+\int_{t_0}^t\int_0^l f\left(s,y,\lim_{N\to\infty}\sum_{j=1}^N\left(1-\frac{j-1}{N}\right)a_j(\tau(s,\vartheta(s)))\cdot b_j(y),\vartheta(s-\tau_0)\right)\times$$

$$\times b_i(y)P_i(t,s)dyds,\quad t\in D_T,\quad (7)$$

где

$$w_i(t)=\sum_{k=1}^n\varphi_{ki}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\sum_{j=k}^n\theta_{1i}^{j-k}\frac{t^{j-k}}{(j-k)!}\exp\bigl(-\theta_{1i}(t-t_0)\bigr),$$

$$P_i(t,s)=\frac{(n-1)!(t-s)^{n-1}}{\theta_{0i}^n}\exp\bigl(-\theta_{1i}(t-s)\bigr),$$

$$\theta_{0i}^n=\left(1+\lambda_i^{2m}+\lambda_i^{4m}\right)^n,\quad \theta_{1i}^n=\lambda_i^{4nm}/\theta_{0i}^n.$$

Действительно, согласно определению обобщённого решения обратной задачи (1)–(5) имеем

$$\int_{t_0}^t\int_0^l\left\{\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^N\left(1-\frac{i-1}{N}\right)a_i(s)\cdot b_i(y)\times\right.$$

$$\times\left[\frac{\partial^n}{\partial s^n}\Phi+n\frac{\partial^{n+4m-1}}{\partial s^{n-1}\partial y^{4m}}\Phi+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{n+4m}}{\partial s^{n-2}\partial y^{4m+2}}\Phi+\right.$$

$$+\ldots+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{4nm-2}}{\partial s^2\partial y^{4nm-4}}\Phi+n\frac{\partial^{4nm-1}}{\partial s\partial y^{4nm-2}}\Phi+\frac{\partial^{4nm}}{\partial y^{4nm}}\Phi+$$

$$+\left(\frac{\partial^{n+2m}}{\partial s^n\partial y^{2m}}\Phi+n\frac{\partial^{n+6m-1}}{\partial s^{n-1}\partial y^{6m}}\Phi+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{n+6m}}{\partial s^{n-2}\partial y^{6m+2}}\Phi+\right.$$

$$\left.+\ldots+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{4nm+2m-2}}{\partial s^2\partial y^{4nm+2m-4}}\Phi+n\frac{\partial^{4nm+2m-1}}{\partial s\partial y^{4nm+2m-2}}\Phi\right)+$$

$$+\left(\frac{\partial^{n+4m}}{\partial s^n\partial y^{4m}}\Phi+n\frac{\partial^{n+8m-1}}{\partial s^{n-1}\partial y^{8m}}\Phi+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{n+8m}}{\partial s^{n-2}\partial y^{8m+2}}\Phi+\right.$$

$$+\ldots+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{4nm+4m-2}}{\partial s^2\partial y^{4nm+4m-4}}\Phi+n\frac{\partial^{4nm+4m-1}}{\partial s\partial y^{4nm+4m-2}}\Phi\Bigg)\Bigg]-f\Phi\Bigg\}dyds=$$

$$=\int_0^l\varphi_1(y)\left[\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\Phi+n\frac{\partial^{n+4m-2}}{\partial t^{n-2}\partial y^{4m}}\Phi+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{n+4m-1}}{\partial t^{n-3}\partial y^{4m+2}}\Phi+\right.$$

$$+\ldots+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{4nm-3}}{\partial t\partial y^{4nm-4}}\Phi+n\frac{\partial^{4nm-2}}{\partial y^{4nm-2}}\Phi+$$

$$+\left(\frac{\partial^{n+2m-1}}{\partial t^{n-1}\partial y^{2m}}\Phi+n\frac{\partial^{n+6m-2}}{\partial t^{n-2}\partial y^{6m}}\Phi+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{n+6m-1}}{\partial t^{n-3}\partial y^{6m+2}}\Phi+\right.$$

$$\left.+\ldots+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{4nm+2m-3}}{\partial t\partial y^{4nm+2m-4}}\Phi+n\frac{\partial^{4nm+2m-2}}{\partial y^{4nm+2m-2}}\Phi\right)+$$

$$+\left(\frac{\partial^{n+4m-1}}{\partial t^{n-1}\partial y^{4m}}\Phi+n\frac{\partial^{n+8m-2}}{\partial t^{n-2}\partial y^{8m}}\Phi+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{n+8m-1}}{\partial t^{n-3}\partial y^{8m+2}}\Phi+\right.$$

$$\left.\left.+\ldots+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{4nm+4m-3}}{\partial t\partial y^{4nm+4m-4}}\Phi+n\frac{\partial^{4nm+4m-2}}{\partial y^{4nm+4m-2}}\Phi\right)\right]_{t=t_0}dy-$$

$$-\ldots+\int_0^l\varphi_{n-1}(y)\left[\frac{\partial}{\partial t}\Phi+n\frac{\partial^{4m}}{\partial y^{4m}}\Phi+\left(\frac{\partial^{2m+1}}{\partial t\partial y^{2m}}\Phi+n\frac{\partial^{6m}}{\partial y^{6m}}\Phi\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial^{4m+1}}{\partial t\partial y^{4m}}\Phi+n\frac{\partial^{8m}}{\partial y^{8m}}\Phi\right)\right]_{t=t_0}dy-\int_0^l\varphi_n(y)\left[\Phi+\frac{\partial^{2m}}{\partial y^{2m}}\Phi+\frac{\partial^{4m}}{\partial y^{4m}}\Phi\right]_{t=t_0}dy. \quad (8)$$

Пусть в (8) будет $\Phi=\Phi_j(t,x)=h(t)b_j(x)\in W_{k,p}(D)$, где $0\neq h(t)\in C^n(D_T)$. Тогда из (8) следует

$$\int_{t_0}^t\int_0^l\Bigg\{\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^N\left(1-\frac{i-1}{N}\right)a_i(s)\cdot b_i(y)\times$$

$$\times\Bigg[(-1)^nh^{(n)}(s)b_j(y)+(-1)^{n-1}n\lambda_j^{4m}h^{(n-1)}(s)b_j(y)+$$

$$+(-1)^{n-2}\cdot\frac{n(n-1)}{2}\lambda_j^{4m+2}h^{(n-2)}(s)b_j(y)+$$

$$+\ldots+\frac{n(n-1)}{2}\lambda_j^{4nm-4}h''(s)b_j(y)-n\lambda_j^{4nm-2}h'(s)b_j(y)+\lambda_j^{4nm}h(s)b_j(y)+$$

$$+\Big((-1)^n\lambda_j^{2m}h^{(n)}(s)b_j(y)+(-1)^{n-1}n\lambda_j^{6m}h^{(n-1)}(s)b_j(y)+$$

$$+(-1)^{n-2}\frac{n(n-1)}{2}\lambda_j^{6m+2}h^{(n-2)}(s)b_j(y)+\ldots$$

$$+\frac{n(n-1)}{2}\lambda_j^{4nm+2m-4}h''(s)b_j(y)-n\lambda_j^{4nm+2m-2}h'(s)b_j(y)\Big)+$$

$$+\Big((-1)^n\lambda_j^{4m}h^{(n)}(s)b_j(y)+(-1)^{n-1}n\lambda_j^{8m}h^{(n-1)}(s)b_j(y)+$$

$$+(-1)^{n-2}\frac{n(n-1)}{2}\lambda_j^{8m+2}h^{(n-2)}(s)b_j(y)+\ldots$$

$$+\frac{n(n-1)}{2}\lambda_j^{4nm+4m-4}h''(s)b_j(y)-n\lambda_j^{4nm+4m-2}h'(s)b_j(y)\Big)\Bigg]-$$

$$
-f\left(s,\, y,\, \lim_{N\to\infty}\sum_{j=1}^{N}\left(1-\frac{j-1}{N}\right)a_j(\tau(s,\,\vartheta(s)))\cdot b_j(y),\,\vartheta(s-\tau_0)\right)h(s)\Bigg\}dyds=0.
$$

Так как система функций $\{b_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ полна и ортонормирована в $L_p(D_l)$, из последнего равенства имеем

$$
\int_{t_0}^{t}\Bigg\{a_i(s)\cdot\Bigg[(-1)^n h^{(n)}(s)+(-1)^{n-1}n\lambda_j^{4m}h^{(n-1)}(s)+
$$
$$
+(-1)^{n-2}\cdot\frac{n(n-1)}{2}\lambda_j^{4m+2}h^{(n-2)}(s)+\ldots+\frac{n(n-1)}{2}\lambda_j^{4nm-4}h''(s)-
$$
$$
-n\lambda_j^{4nm-2}h'(s)+\lambda_j^{4nm}h(s)+
$$
$$
+\Big((-1)^n\lambda_j^{2m}h^{(n)}(s)+(-1)^{n-1}n\lambda_j^{6m}h^{(n-1)}(s)+(-1)^{n-2}\frac{n(n-1)}{2}\lambda_j^{6m+2}h^{(n-2)}(s)+\ldots
$$
$$
+\frac{n(n-1)}{2}\lambda_j^{4nm+2m-4}h''(s)-n\lambda_j^{4nm+2m-2}h'(s)\Big)+
$$
$$
+\Big((-1)^n\lambda_j^{4m}h^{(n)}(s)+(-1)^{n-1}n\lambda_j^{8m}h^{(n-1)}(s)+
$$
$$
+(-1)^{n-2}\frac{n(n-1)}{2}\lambda_j^{8m+2}h^{(n-2)}(s)+(-1)^{n-3}\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\lambda_j^{8m+4}h^{(n-3)}(s)+\ldots
$$
$$
+\frac{n(n-1)}{2}\lambda_j^{4nm+4m-4}h''(s)-n\lambda_j^{4nm+4m-2}h'(s)\Big)\Bigg]-
$$
$$
-\int_0^l f\left(s,y,\lim_{N\to\infty}\sum_{j=1}^{N}\left(1-\frac{j-1}{N}\right)a_j(\tau(s,\vartheta(s)))\cdot b_j(y),\vartheta(s-\tau_0)\right)\times
$$
$$
\times h(s)\cdot b_i(y)dy\Bigg\}ds=0.
$$

Отсюда, интегрируя по частям, получаем

$$
\int_{t_0}^{T}h(t)\Bigg[a_i^{(n)}(t)+n\lambda_i^{4m}a_i^{(n-1)}(t)+\frac{n(n-1)}{2}\lambda_i^{4m+2}a_i^{(n-2)}(t)+
$$
$$
+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\lambda_i^{4m+4}a_i^{(n-3)}(t)+\ldots+\frac{n(n-1)}{2}\lambda_i^{4nm-4}a_i''(t)+n\lambda_i^{4nm-2}a_i'(t)+
$$
$$
+\lambda_i^{4nm}a_i(t)+\Big(\lambda_i^{2m}a_i^{(n)}(t)+n\lambda_i^{6m}a_i^{(n-1)}(t)+\frac{n(n-1)}{2}\lambda_i^{6m+2}a_i^{(n-2)}(t)+
$$
$$
+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\lambda_i^{6m+4}a_i^{(n-3)}(t)+\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\lambda_i^{4nm+2m-6}a_i'''(t)+
$$
$$
+\frac{n(n-1)}{2}\lambda_i^{4nm+2m-4}a_i''(t)+n\lambda_i^{4nm+2m-2}a_i'(t)\Big)+
$$
$$
+\Big(\lambda_i^{4m}a_i^{(n)}(t)+n\lambda_i^{8m}a_i^{(n-1)}(t)+\frac{n(n-1)}{2}\lambda_i^{8m+2}a_i^{(n-2)}(t)+
$$
$$
+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\lambda_i^{8m+4}a_i^{(n-3)}(t)+\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\lambda_i^{4nm+4m-6}a_i'''(t)+
$$

$$+\frac{n(n-1)}{2}\lambda_i^{4nm+4m-4}a_i''(t)+n\lambda_i^{4nm+4m-2}a_i'(t)\Big)-$$

$$-\int_0^l f\Big(t,y,\lim_{N\to\infty}\sum_{j=1}^{N}\Big(1-\frac{j-1}{N}\Big)a_j(\tau(t,\vartheta(t)))\cdot b_j(y),\vartheta(t-\tau_0)\Big)\times$$

$$\times\, b_i(y)dy\Big]dt=0. \quad (9)$$

Так как $h(t)$ — любая функция, удовлетворяющая указанным выше условиям, a_i имеет обобщённые производные порядка k по t в смысле Соболева на отрезке D_T. Поскольку $h(t)\neq 0$ для всех $t\in D_T$, из (9) следует:

$$a_i^{(n)}(t)+n\lambda_i^{4m}a_i^{(n-1)}(t)+\frac{n(n-1)}{2}\lambda_i^{4m+2}a_i^{(n-2)}(t)+$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\lambda_i^{4m+4}a_i^{(n-3)}(t)+\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\lambda_i^{4nm-6}a_i'''(t)+$$

$$+\frac{n(n-1)}{2}\lambda_i^{4nm-4}a_i''(t)+n\lambda_i^{4nm-2}a_i'(t)+\lambda_i^{4nm}a_i(t)+$$

$$+\Big(\lambda_i^{2m}a_i^{(n)}(t)+n\lambda_i^{6m}a_i^{(n-1)}(t)+\frac{n(n-1)}{2}\lambda_i^{6m+2}a_i^{(n-2)}(t)+$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\lambda_i^{6m+4}a_i^{(n-3)}(t)+\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\lambda_i^{4nm+2m-6}a_i'''(t)+$$

$$+\frac{n(n-1)}{2}\lambda_i^{4nm+2m-4}a_i''(t)+n\lambda_i^{4nm+2m-2}a_i'(t)\Big)+\Big(\lambda_i^{4m}a_i^{(n)}(t)+n\lambda_i^{8m}a_i^{(n-1)}(t)+$$

$$+\frac{n(n-1)}{2}\lambda_i^{8m+2}a_i^{(n-2)}(t)+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\lambda_i^{8m+4}a_i^{(n-3)}(t)+\ldots$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\lambda_i^{4nm+4m-6}a_i'''(t)+\frac{n(n-1)}{2}\lambda_i^{4nm+4m-4}a_i''(t)+n\lambda_i^{4nm+4m-2}a_i'(t)\Big)=$$

$$=\int_0^l f\Big(t,y,\lim_{N\to\infty}\sum_{j=1}^{N}\Big(1-\frac{j-1}{N}\Big)a_j(\tau(t,\vartheta(t)))b_j(y),\vartheta(t-\tau_0)\Big)b_i(y)dy. \quad (10)$$

Система (10) решается методом вариации произвольных постоянных:

$$a_i(t)=\exp\big(-\theta_{1i}(t-t_0)\big)\big(C_{1i}+C_{2i}(t-t_0)+C_{3i}(t-t_0)^2+\ldots+C_{ni}(t-t_0)^{n-1}\big)+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_0^l f\Big(s,y,\lim_{N\to\infty}\sum_{j=1}^{N}\Big(1-\frac{j-1}{N}\Big)a_j(\tau(s,\vartheta(s)))\cdot b_j(y),\vartheta(s-\tau_0)\Big)\times$$

$$\times\, b_i(y)P_i(t,s)dyds, \quad t\in D_T. \quad (11)$$

Для определения коэффициентов C_{ji}, $j=1,2,\ldots,n$, используются условия

$$a_i(t_0)=\varphi_{1i}, a_i'(t_0)=\varphi_{2i},\ a_i''(t_0)=\varphi_{3i},\ \ldots, a_i^{(n-1)}(t_0)=\varphi_{ni},$$

где $\varphi_{ji}=\displaystyle\int_0^l \varphi_j(y)\cdot b_i(y)dy$. Имеем

$$C_{1i}=\varphi_{1i}, \quad C_{2i}=\theta_{1i}\varphi_{1i}+\varphi_{2i}, \quad C_{3i}=\frac{1}{2!}\left[\theta_{1i}^2\varphi_{1i}+2\theta_{1i}\varphi_{2i}+\varphi_{3i}\right],\cdots,$$

$$C_{ni}=\frac{1}{(n-1)!}\Big[\theta_{1i}^{n-1}\varphi_{1i}+(n-1)\theta_{1i}^{n-2}\lambda_i^{-4}\varphi_{2i}+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\theta_{1i}^{n-3}\varphi_{3i}+\dots$$
$$+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\theta_{1i}^{2}\varphi_{(n-2)i}+(n-1)\theta_{1i}\varphi_{(n-1)i}+\varphi_{ni}\Big].$$

Подстановка найденных значений C_{ji} в (11) даёт ССНИУ (7).

Подставляя решение ССНИУ (7) в ряд (6), получаем формальное решение смешанной задачи (1)–(3):

$$u(t,x)=\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\Big(1-\frac{i-1}{N}\Big)\Big[w_i(t)+$$
$$+\int_{t_0}^{t}\int_0^l f\Big(s,y,\lim_{N\to\infty}\sum_{j=1}^{N}\Big(1-\frac{j-1}{N}\Big)a_j(\tau(s,\vartheta(s)))\cdot b_j(y),\vartheta(s-\tau_0)\Big)\times$$
$$\times b_i(y)P_i(t,s)dyds\Big]\cdot b_i(x). \quad (12)$$

Ряд (12) можно записать в виде

$$u(t,x)=u_0(t,x)+\int_{t_0}^{t}\int_0^l Q(t,s,x,y)\times$$
$$\times f\left(s,y,u(\tau(s,\vartheta(s)),y),\vartheta(s-\tau_0)\right)dyds, \quad (13)$$

где

$$u_0(t,x)=\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\Big(1-\frac{i-1}{N}\Big)w_i(t)\cdot b_i(x),$$
$$Q(t,s,x,y)=\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\Big(1-\frac{i-1}{N}\Big)P_i(t,s)b_i(y)b_i(x).$$

Уравнение (13) является нелинейным интегральным уравнением Вольтерра второго рода относительно неизвестной функции $u(t,x)$ и нелинейным интегральным уравнением Вольтерра первого рода относительно восстанавливаемой функции $\vartheta(t)$.

3. Сведение решения обратной задачи (1)–(5) к системе интегральных уравнений Вольтерра. Воспользуемся условием (4). Тогда интегральное уравнение (13) примет вид

$$\psi(t)=u_0(t,x_0)+\int_{t_0}^{t}\int_0^l Q(t,s,x_0,\,y)\times$$
$$\times f\big(s,y,u(\tau(s,\vartheta(s)),y),\vartheta(s-\tau_0)\big)dyds, \quad (14)$$

где

$$u_0(t,x_0)=\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\Big(1-\frac{i-1}{N}\Big)w_i(t)\cdot b_i(x_0),$$

$$Q(t,s,\,x_0,y) = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\Big(1-\frac{i-1}{N}\Big)P_i(t,s)b_i(y)b_i(x_0).$$

Уравнение (14) запишем в виде нелинейного интегрального уравнения Вольтерра первого рода относительно пары неизвестных функций $u(t,x)$ и $\vartheta(t)$:

$$\int_{t_0}^{t}\int_0^l Q(t,s,\,x_0,y)f\big(s,y,u(\tau(s,\vartheta(s)),y),\vartheta(s-\tau_0)\big)dyds = g(t), \qquad (15)$$

где $g(t)=\psi(t)-u_0(t,x_0)$.

Интегральные уравнения (13) и (15) составляют систему интегральных уравнений, для разрешимости которой методом последовательных приближений относительно неизвестной функции $\vartheta(t)$ преобразуем уравнение (15). Следует отметить, что классические методы интегрального преобразования не могут привести уравнение (15) к интегральному уравнению Вольтерра второго рода. Поэтому здесь используется другая методика. С учётом условия (5) уравнение (15) запишем в виде [6]

$$\vartheta(t)+\int_{t_0}^{t}F(s)\vartheta(s)ds = \vartheta(t)+\int_{t_0}^{t}F(s)\vartheta(s)ds+g(t)-$$
$$-\int_{t_0}^{t}\int_0^l Q(t,s,\,x_0,\,y)f\left(s,\,y,\,u(\tau(s,\vartheta(s)),\,y),\,\vartheta(s-\tau_0)\right)dyds,$$

где $F(t)>0$ — произвольная функция такая, что $\exp\Big(-\int_{t_0}^{t}F(s)ds\Big)\ll 1$. Отсюда, используя резольвенту ядра $[-F(s)]$, имеем

$$\vartheta(t)=\vartheta(t)+\int_{t_0}^{t}F(s)\vartheta(s)ds+g(t)-$$
$$-\int_{t_0}^{t}\int_0^l Q(t,s,x_0,y)f\left(s,y,u(\tau(s,\vartheta(s)),y),\vartheta(s-\tau_0)\right)dyds-$$
$$-\int_{t_0}^{t}F(s)\cdot\exp\left(-\mu(t,s)\right)\cdot\Bigg[\vartheta(s)+\int_{t_0}^{s}F(\theta)\vartheta(\theta)d\theta+g(s)-$$
$$-\int_{t_0}^{s}\int_0^l Q(s,\,\theta,x_0,y)f\left(\theta,y,\,u(\tau(\theta,\vartheta(\theta)),\,y),\,\vartheta(\theta-\tau_0)\right)dyd\theta\Bigg]ds, \qquad (16)$$

где $\mu(t,s)=\int_s^t F(\theta)d\theta$, $\mu(t,t_0)=\mu(t)$.

Применяя к (16) формулу Дирихле, получаем уравнение

$$\vartheta(t)=\exp(-\mu(t))\cdot\Bigg(\vartheta(t)+\int_{t_0}^{t}F(s)\vartheta(s)ds+g(t)-$$
$$-\int_{t_0}^{t}\int_0^l Q(t,s,\,x_0,\,y)f\left(s,\,y,\,u(\tau(s,\,\vartheta(s)),\,y),\,\vartheta(s-\tau_0)\right)dyds\Bigg)+$$

$$+\int_{t_0}^{t} F(s)\cdot\exp\left(-\mu(t,s)\right)\cdot\Big[\vartheta(t)-\vartheta(s)+g(t)-g(s)+$$
$$+\int_{t_0}^{t} F(s)\vartheta(s)ds-\int_{t_0}^{s} F(\theta)\vartheta(\theta)d\theta-$$
$$-\int_{t_0}^{t}\int_{0}^{l} Q(t,s,\,x_0,\,y)f\left(s,\,y,\,u(\tau(s,\,\vartheta(s)),\,y),\,\vartheta(s-\tau_0)\right)dyds+$$
$$+\int_{t_0}^{s}\int_{0}^{l} Q(s,\,\theta,\,x_0,\,y)f\left(\theta,\,y,\,u(\tau(\theta,\,\vartheta(\theta)),y),\,\vartheta(\theta-\tau_0)\right)dyd\theta\Big]\,ds, \quad (17)$$

которое эквивалентно уравнению (15) при начальном условии (5). Условием согласования уравнения (17) с начальным условием (5) при $t=t_0$ является следующее выражение:

$$\eta(t_0)=\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\left(1-\frac{i-1}{N}\right)\varphi_{1i}\cdot b_i(x_0).$$

Отсюда получается новая система нелинейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода относительно пары неизвестных функций $u(t,x)$ и $\vartheta(t)$:

$$u(t,x)=\Theta_1(t,x;\,u,\vartheta),\quad \vartheta(t)=\Theta_2(t;\,u,\vartheta), \quad (18)$$

где $\Theta_1(t,x;\,u,\vartheta)$ — оператор правой части (13), а $\Theta_2(t;\,u,\vartheta)$ — оператор правой части (17).

4. Однозначная разрешимость обратной задачи (1)–(5). Для произвольной функции $r(t,x)\in C(D)$ норма вводится следующим образом:

$$\|r(t,x)\|_C=\max_{(t,x)\in D}|r(t,x)|\,.$$

Теорема 1. *Пусть выполняются следующие условия:*

1. $f(t,x,u,\vartheta)$ *удовлетворяет условию Гельдера по* x;
2. $\displaystyle\max_{(t,x)\in D}\int_{t_0}^{t}\int_{0}^{l}|Q(t,s,x,y)|\cdot|f(s,y,u,\vartheta)|\,dyds\leqslant\Delta<\infty$;
3. $f(t,x,u,\vartheta)\in\mathrm{Lip}\left(L_0(t,x)\big|_{u,\vartheta}\right)$, *где* $\displaystyle 0<\int_{t_0}^{t}\int_{0}^{l}L_0(s,y)dyds<\infty$;
4. $u(t,x)\in\mathrm{Lip}\left(L_1\big|_t\right)$, *где* $0<L_1=\mathrm{const}$;
5. $\tau(t,\vartheta)\in Lip\left(L_2(t)\big|_\vartheta\right)$, *где* $\displaystyle 0<\int_{t_0}^{t}L_2(s)ds<\infty$;
6. $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\Big(1-\frac{i-1}{N}\Big)\|w_i(t)\|_C\,|b_i(x_0)|<\infty$;
7. $\displaystyle\max_{t\in D_T}\int_{t_0}^{t}F(s)\cdot|g(t)-g(s)|\cdot\exp\left(-\mu(t,s)\right)ds\leqslant\beta<\infty$;
8. $\displaystyle\eta(t_0)=\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\Big(1-\frac{i-1}{N}\Big)\varphi_{1i}\cdot b_i(x_0)$;

9. $\rho = 2\max\{\max_{t\in D_T} M_1(t);\ \max_{t\in D_T} M_2(t)\} < 1,$ *где*

$$M_0(t) = \exp\left(-\mu(t)\right) + 2\int_{t_0}^{t} F(s)\cdot\exp\left(-\mu(t,s)\right)ds,$$

$$M_1(t) = \int_{t_0}^{t}\int_{0}^{l} |Q(t,s,\,x,\,y)|\,L_0(s,\,y)\left(1 + L_1L_2(s)\right)dyds,$$

$$M_2(t) = \left(1 + \int_{t_0}^{t} F(s)ds + M_1(t)\right)\cdot M_0(t).$$

Тогда обратная задача (1)–(5) *имеет единственное обобщённое решение* $u(t,x),\ \vartheta(t)$ *в области* D.

Доказательство. Используется метод последовательных приближений при сочетании его с методом сжимающих отображений:

$$\begin{cases} u^0(t,x) = u_0(t,x),\ u^{k+1}(t,x) = \Theta_1(t,x;\,u^k,\vartheta^k), \\ \vartheta^0(t) = g(t)\cdot\exp\left(-\mu(t)\right), \vartheta^{k+1}(t) = \Theta_2(t;\,u^k,\,\vartheta^k),\ k = 0{,}1{,}2{,}3,\ldots. \end{cases} \tag{19}$$

В силу условий теоремы из (19) следуют оценки

$$\left\|u^1(t,x) - u^0(t,x)\right\|_C \leqslant \Delta, \tag{20}$$

$$\left\|\vartheta^1(t) - \vartheta^0(t)\right\|_C \leqslant \beta + \Big(g(t)\cdot\exp\left(-\mu(t)\right) + \\ + \int_{t_0}^{t} F(s)\cdot g(s)\cdot\exp(-\mu(s)ds + \Delta)\Big)\cdot M_0(t), \tag{21}$$

$$\left\|u^{k+1}(t,x) - u^k(t,x)\right\|_C \leqslant \\ \leqslant M_1(t)\left(\left\|u^k(t,x) - u^{k-1}(t,x)\right\|_C + \left\|\vartheta^k(t) - \vartheta^{k-1}(t)\right\|_C\right), \tag{22}$$

$$\left\|\vartheta^{k+1}(t) - \vartheta^k(t)\right\|_C \leqslant \\ \leqslant M_2(t)\left(\left\|u^k(t,x) - u^{k-1}(t,x)\right\|_C + \left\|\vartheta^k(t) - \vartheta^{k-1}(t)\right\|_C\right), \tag{23}$$

где функции $M_0(t)$, $M_1(t)$, $M_2(t)$ определены в условии 9 теоремы 1. Так как по условию теоремы $\rho = 2\max\{\max_{t\in D_T} M_1(t);\ \max_{t\in D_T} M_2(t)\} < 1$, в силу (20) и (21) из оценок (22) и (23) следует, что операторы Θ_1 и Θ_2 в правой части системы (18) являются сжимающими. Следовательно, обратная задача (1)–(5) имеет единственное решение $u(t,x)$, $\vartheta(t)$ в области D. $\square$

5. Устойчивость решения обратной задачи (1)–(5). Рассмотрим вопрос об устойчивости решения обратной задачи по отношению к функции $\psi(t)$, заданной в (4).

Теорема 2. *Пусть выполняются условия теоремы* 1. *Тогда решение обратной задачи устойчиво относительно функции* $\psi(t)$, *заданной в* (4).

Доказательство. Пусть $u_1(t,x)$, $\vartheta_1(t)$ и $u_2(t,x)$, $\vartheta_2(t)$ — два различных решения обратной задачи (1)–(5), соответствующие двум различным значениям функции $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ соответственно. Если

$$\|\psi_1(t)-\psi_2(t)\| \leqslant \delta, \quad 0<\delta=\text{const}, \tag{24}$$

то из системы (18) следуют оценки

$$\begin{aligned}\big\|u_1(t,x)-u_2(t,x)\big\|_C &\leqslant \\ &\leqslant M_1(t)\left(\big\|u_1(t,x)-u_2(t,x)\big\|_C+\big\|\vartheta_1(t)-\vartheta_2(t)\big\|_C\right),\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}\big\|\vartheta_1(t)-\vartheta_2(t)\big\|_C &\leqslant M_0(t)\big\|\psi_1(t)-\psi_2(t)\big\|_C+ \\ &+M_2(t)\left(\big\|u_1(t,x)-u_2(t,x)\big\|_C+\big\|\vartheta_1(t)-\vartheta_2(t)\big\|_C\right),\end{aligned} \tag{26}$$

где функции $M_0(t)$, $M_1(t)$, $M_2(t)$ определены в условии 9 теоремы 1.

Так как по условию теоремы $\rho=2\max\big\{\max\limits_{t\in D_T} M_1(t);\ \max\limits_{t\in D_T} M_2(t)\big\}<1$, из оценок (25) и (26) получаем

$$V_0<\|\psi_1(t)-\psi_2(t)\|_C+\rho V_0, \tag{27}$$

где $V_0=\|u_1(t,x)-u_2(t,x)\|_C+\|\vartheta_1(t)-\vartheta_2(t)\|_C$.

В силу (24) из (27) следует $V_0<\delta/(1-\rho)$. Отсюда получаем $V_0<\varepsilon$, если положим $\delta=\varepsilon(1-\rho)$. Это и доказывает теорему. □

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Гордезиани Д. Г., Авалишвили Г. А.* Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды // *Матем. моделирование*, 2000. Т. 12, № 1. С. 94–103. [*Gordeziani D. G., Avalishvili G. A.* On the constructing of solutions of the nonlocal initial boundary value problems for one-dimensional medium oscillation equations // *Matem. Mod.*, 2000. Vol. 12, no. 1. Pp. 94–103].
2. *Дмитриев В. Б.* Нелокальная задача с интегральными условиями для волнового уравнения // *Вестн. Самар. гос. унив. Естественнонаучн. сер.*, 2006. № 2(42). С. 15–27. [*Dmitriev V. B.* A nonlocal problem with integral conditions for the wave equation // *Vestn. Samar. Gos. Univ. Estestvennonauchn. Ser.*, 2006. no. 2(42). Pp. 15–27].
3. *Пулькина Л. С.* Смешанная задача с интегральным условием для гиперболического уравнения // *Матем. заметки*, 2003. Т. 74, № 3. С. 435–445; англ. пер.: *Pul'kina L. S.* A mixed problem with integral condition for the hyperbolic equation // *Math. Notes*, 2003. Vol. 74, no. 3. Pp. 411–421.
4. *Кожанов А. И.* О разрешимости обратной задачи нахождения коэффициента теплопроводности // *Сиб. матем. журн.*, 2005. Т. 46, № 5. С. 1053–1071; англ. пер.: *Kozhanov A. I.* Solvability of the inverse problem of finding thermal conductivity // *Siberian Math. J.*, 2005. Vol. 46, no. 5. Pp. 841–856.
5. *Прилепко А. И., Ткаченко Д. С.* Свойства решений параболического уравнения и единственность решения обратной задачи об источнике с интегральным переопределением // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2003. Т. 43, № 4. С. 562–570; англ. пер.: *Prilepko A. I., Tkachenko D. S.* Properties of solutions of a parabolic equation and the uniqueness of the solution of the inverse source problem with integral overdetermination // *Comput. Math. Math. Phys.*, 2003. Vol. 43, no. 4. Pp. 537–546.

6. *Юлдашев Т. К.* Неявное эволюционное интегральное уравнение Вольтерра первого рода с нелинейным интегральным отклонением // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2009. Т. 2(19). С. 38–44. [*Yuldashev T. K.* Nonexplicit evolution Volterra integral equation of the first kind with nonlinear integral delay // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2009. Vol. 2(19). Pp. 38–44].

Поступила в редакцию 25/I/2012;
в окончательном варианте — 13/VI/2012.

MSC: 35K70; 35R30

INVERSE PROBLEM FOR NONLINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION WITH HIGH ORDER PSEUDOPARABOLIC OPERATOR

T. K. Yuldashev

M. F. Reshetnev Siberian State Aerospace University,
31, pr. "Krasnoyarskiy rabochiy", Krasnoyarsk, 660014, Russia.

E-mail: tursunbay@rambler.ru

We consider the questions of generalized solvability of inverse problem for nonlinear partial differential equations with high order pseudoparabolic operator by method of separation of variables. The mixed problem is reduced to the Volterra integral equation of the second kind, and the inverse problem — to the system of Volterra integral equations. The unique solvability of the inverse problem and the stability of its solution are proved.

Key words: *nonlinear inverse problem, high order pseudoparabolic operator, generalized solvability.*

Original article submitted 25/I/2012;
revision submitted 13/VI/2012.

Tursun K. Yuldashev (Ph. D. (Phys.& Math)), Associate Professor, Dept. of Higher Mathematics.